Conseils :

- Ce devoir comporte deux exercices.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).

  Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

I. CAVITATION

Sous l'effet d'une baisse de pression brutale, des bulles de gaz peuvent se former dans l'eau : ce phénomène appelé cavitation est particulièrement important au voisinage des hélices de navires ou dans les centrales hydrauliques et provoque une forte érosion.

À $t = 0$, une bulle de gaz sphérique se forme dans un volume d'eau supposé infini. On note μ la masse volumique de l'eau, p_∞ la pression loin de la bulle et a_0 le rayon initial de la bulle.

Q1 1. Une pression p exercée sur une surface S entraine une force $F = pS$. En déduire la dimension d'une pression.

Q2 2. Montrer que la dimension d'une pression est la même que celle d'une énergie volumique (énergie par unité de volume).

Q3 3. On admet que le temps d'implosion T de la bulle (temps pour que la bulle disparaisse) s'exprime sous la forme :

$$T = k a_0^\alpha \mu^\beta p_\infty^\gamma$$

où k est une constante sans dimension et α, β, γ des réels.

Trouver la valeur de α, β, γ par analyse dimensionnelle.

II. VOL "ZÉRO-G"

Afin de simuler une gravité nulle comme on pourrait la rencontrer dans l'espace, une technique est d'utiliser un avion qui suit une trajectoire de chute libre. Ainsi, les objets étant à l'intérieur de l'avion tombent à "la même vitesse que l'avion" ce qui donne une sensation d'apesanteur, aussi appelée "zéro-G". Cela permet de réaliser des entrainements en vue de missions spatiales ou des expériences sans pour autant aller dans l'espace.

Pour que l'avion suive une trajectoire de chute libre, il suffirait en théorie que les pilotes coupent les moteurs (puis les rallument pour éviter de s'écraser bien sûr), toutefois à cause des perturbations et des frottements les pilotes doivent apporter quelques corrections au cours du mouvement.

Données :

- masse de l'airbus A310 Zéro-G et de son équipement : $m = 1{,}5.10^5$ kg ;
- constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2} ;
- masse de la Terre : $M_T = 5{,}97.10^{24}$ kg ;
- rayon de la Terre : $R_T = 6380$ km ;
- angle par rapport à l'horizontal au début de la parabole : $47°$;
- altitude au départ et à la fin de la trajectoire : 7600 m ;
- vitesse au début de la trajectoire : 527 km/h ;
- altitude au sommet de la trajectoire : 8200 m ;
- vitesse au sommet de la trajectoire : 355 km/h ;

On admet que le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen pour l'étude du mouvement de l'avion.

1. Intensité du champ de pesanteur

   (a) En détaillant votre raisonnement, montrer que l'intensité de la pesanteur g_h, en un point
   Q4 situé à l'altitude h au-dessus de la surface de la Terre, peut s'écrire :

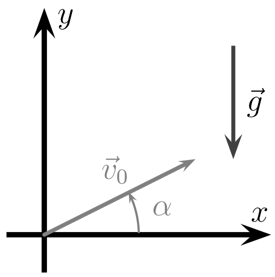
$$g_h = \mathcal{G}\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

   Q5 (b) Vérifier l'homogénéité de cette expression.

Q6 2. Que peut-on dire de l'énergie mécanique E_m pour une chute libre ?

3. Les données de la trajectoire de l'avion sont-elles compatibles avec ce qui est énoncé à la
Q7 question précédente ? Justifier précisément grâce à des valeurs numériques.

   On étudie le mouvement dans le repère xOy donné ci-contre, le point O étant le début de la parabole. Le vecteur vitesse à $t = 0$, noté $\vec{v}_0$, fait un angle α avec l'horizontal. On considère que l'intensité de la pesanteur terrestre est constante lors d'un vol Zéro-G et qu'elle est égale à $g = 9{,}8$ N.kg^{-1}.



Q8 4. Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ dans le cas d'un objet en chute libre.

Q9 5. En déduire la trajectoire que doit suivre l'avion pour que l'intérieur soit en "Zéro-G" . On donnera l'équation de la trajectoire. Quel est le nom de ce type de trajectoire ? Représenter son allure en reproduisant puis complétant le schéma ci-dessus.

6. Compte-tenu des équations horaires, déterminer la durée en apesanteur en fonction des
Q10 données de l'énoncé. Faire l'application numérique.

7. Quels paramètres faut-il modifier pour augmenter la durée de l'apesanteur ? Cela vous
Q11 semble-t-il possible ?

Remarques générales

A. Note et barème

Mes abréviations : A.N. = application numérique ; C.S. = chiffre significatif ; C.I. = conditions initiales ; pq = pourquoi.

Pour votre note, il faut bien comprendre que l'échelle de notation n'est plus la même qu'au lycée et il ne faut pas s'en formaliser. Avoir « 10 » ou n'importe qu'elle autre note n'a plus du tout le même sens. Ce n'est qu'**une** note qui représente **cette** copie **ce** jour précis. Si vous avez eu une mauvaise note, rien ne dit que vous en aurez toute l'année et réciproquement.

Au même titre, le classement n'est pas indiqué pour vous stigmatiser, mais pour vous aider à vous repérer dans la classe.

B. Comment progresser ?

Un des moyens de progresser le plus important est d'apprendre de ses erreurs. En tant qu'étudiant, il est **normal** de faire des erreurs et de ne pas avoir tout compris. Les devoirs servent entre autre à vous faire prendre conscience de ce que vous savez et de ce que vous ne savez pas. Il est donc **extrêmement** important de retravailler les devoirs en se posant par exemple les questions suivantes sur les points que vous avez mal traités ou que vous n'avez pas réussi :

1. Pourquoi n'ai je pas su faire cette question ? (En particulier, est-ce que j'ai mal lu l'énoncé, est-ce que j'ai mal compris l'énoncé, est-ce que je ne connaissais pas/pas assez bien mon cours, ai-je voulu aller trop vite, me suis-je trop creusé la tête pour pas grand chose ?)
2. Quel schéma aurai-je pu faire et comment représenter les grandeurs dessus (cela ne fonctionne pas pour toutes les questions, mais ça reste quelque chose de très important) ?
3. Quelles connaissances de cours étaient nécessaires pour cette question et est-ce que je les maitrisais ?
4. À quelle exercice ou exemple de cours ou TP cette question aurait dû me faire penser ?
5. Est-ce j'ai compris le corrigé ? Est-ce que je saurais refaire la question si on me la redonnait demain ?

C. Les erreurs fréquentes

- Attention à la gestion du temps. Il ne faut "ni trainer, ni se précipiter". Il faut justifier avec tous les arguments, mais ne rajoutez pas d'arguments inutiles et ne faites pas non plus de grandes phrases si quelque chose de plus court convient.
- La propreté, le soin et l'orthographe dans les copies est importante. En particulier l'usage de l'effaceur et du correcteur orthographique (« blanc ») est à limiter très très fortement. Dans le cas où un paragraphe ou une phrase entière doivent « disparaitre » de la copie, il vaut mieux les rayer **proprement** à la règle plutôt que de tout effacer (gain de temps et de propreté).
- On change de page (voire même de copie si c'est demandé) pour faire un nouvel exercice.
- Gardez l'énoncé, il ne doit pas être rendu avec la copie. Si quelque chose doit être complété, l'énoncé fournira une feuille à part où vous pourrez inscrire votre nom.
- Attention à ce que j'appelle des « arnaques » (volontaires ou non) : je connais le résultat que je veux trouver, je change « miraculeusement » certains signes pour que de mon hypothèse fausse arrive à un résultat juste. C'est très mal vu par les correcteurs.
- Lorsque la réponse est donnée dans l'énoncé, il est indispensable d'être **irréprochable** au niveau de ses justifications.

I. Cavitation

Q1

1. $[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{\mathrm{MLT^{-2}}}{\mathrm{L^2}}$. $\boxed{[p] = \mathrm{ML^{-1}T^{-2}}}$

Q2
2. À partir de $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ par exemple, on retrouve la dimension d'une énergie $[E] = \mathrm{ML^2T^{-2}}$. Pour une énergie volumique, on divise par une longueur au cube soit
[énergie volumique] $= \mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$ ce qui est bien la même dimension que la pression.
Attention, justifier brièvement la dimension d'une énergie puisque compte tenu de la question d'avant et de l'énoncé, on SAIT ce que l'on doit trouver. Si vous ne justifiez pas, on pourra soupçonner que vous êtes parti du résultat.

Q3
3. $[a_0^\alpha \mu^\beta p_\infty^\gamma] = L^\alpha(\mathrm{ML^{-3}})^\beta(\mathrm{ML^{-1}T^{-2}})^\gamma = \mathrm{M}^{\beta+\gamma}\mathrm{L}^{\alpha-3\beta-\gamma}\mathrm{T}^{-2\gamma}$
Par identification avec la dimension d'un temps, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & \beta+\gamma \\ 0 & = & \alpha-3\beta-\gamma \\ 1 & = & -2\gamma \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \beta & = & -\gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha & = & 3\beta+\gamma = 1 \\ \gamma & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

D'où $\boxed{\alpha = 1, \quad \beta = 1/2, \quad \gamma = -1/2}$

II. VOL "ZÉRO-G"

1. Intensité du champ de pesanteur
   (a) Le poids vaut en norme $P = mg_h$; l'interraction gravitationnelle vaut $\mathcal{G}\frac{mM_T}{d^2}$ avec d la distance entre le point de masse m et le centre de la Terre. Compte tenu que l'altitude est prise par rapport à la surface de la Terre, on a $d = R_T + h$. Puisque le poids résulte
Q4 de l'interraction gravitationnelle, on a[1] $mg_h = \mathcal{G}\frac{mM_T}{d^2} \Rightarrow \boxed{g_h = \mathcal{G}\frac{M_T}{(R_T+h)^2}}$
   (b) Compte tenu des unités $[g_h] = L.T^{-2}$.
   Pour le membre de droite $[\mathcal{G}] = M^{-1}.L^3.T^{-2}$ (donné par les unités dans l'énoncé); $[M_T] = M$; $[(R_T+h)^2] = L^2$, ce qui donne $\left[\mathcal{G}\frac{M_T}{(R_T+h)^2}\right] = M^{-1}.L^3.T^{-2}.M.L^{-2} = L.T^{-2}$. La
Q5 dimension du membre de gauche étant égale à celle du membre de droite, la formule est $\boxed{\text{homogène}}$.

Justifier très rigoureusement lorsque le résultat est donné.

Remarque : si vous justifiez en repartant de la formule de l'interaction gravitationnelle, en fait vous ne vérifiez pas grand chose car vous utilisez la même formule de départ qu'à la question précédente. Il vaut bien mieux repartir d'un autre "point de départ" comme les unités données par l'énoncé.

Q6
2. Lors une chute libre sans frottement, l'énergie mécanique $\boxed{\text{se conserve}}$ (la seule force qui travaille est le poids et elle est conservative).

1. Il y a en fait une légère différence du au caractère non galiléen du référentiel terrestre, voir cours de 2e année, mais la correction est de l'ordre du pourcent.

Beaucoup d'entre vous ont fait un raisonnement du type "$E_p \nearrow$, $E_c \searrow$ donc E_m est constant". C'est faux à cause du "donc".

Exemple : $x^2 \nearrow$ lors que $-2x^2 \searrow$ et vice-versa. Pour autant, peut-on dire "donc $x^2 - 2x^2$ est constant" ? L'argument ici est qu'il n'y a pas de force non-conservative qui travaille comme cela sera vu dans le troisième chapitre de mécanique.

3. Il faut ici calculer numériquement l'énergie mécanique aux différents instants de la parabole où l'on peut la faire et regarder si cela donne quelque chose de constant ou non. Il faut faire attention à convertir les km/h en m/s bien sûr. Ici, les deux seuls instants où l'on a à la fois l'altitude et la vitesse sont : le point de départ (noté 0 par la suite) et le sommet de la trajectoire (noté 1 par la suite).

   Numériquement en prennant la référence des altitudes au niveau du sol, on trouve grâce à $Em = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$ les valeurs numériques suivantes : $\boxed{Em_0 = 1{,}3 \times 10^{10}\ \mathrm{J}}$; $\boxed{Em_1 = 1{,}3 \times 10^{10}\ \mathrm{J}}$. Compte tenu du nombre de chiffres significatifs, l'application numérique est compatible

Q7 avec $\boxed{\text{une énergie mécanique constante}}$.

   Remarque, si on prennait la référence au niveau du début de la trajectoire, on trouve $\boxed{Em_0 = 1{,}6 \times 10^9\ \mathrm{J}}$; $\boxed{Em_1 = 1{,}6 \times 10^9\ \mathrm{J}}$, ce qui est cohérent aussi.

4. Système : {Un objet en chute libre (dans l'avion éventuellement)[2]}
   Référentiel : terrestre (galiléen d'après l'énoncé)
   Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$.

   Le principe fondamental de la dynamique (ou 2nd loi de Newton) donne $m\vec{a} = \vec{P} \Rightarrow \vec{a} = -g\vec{e}_y$, soit en projetant :

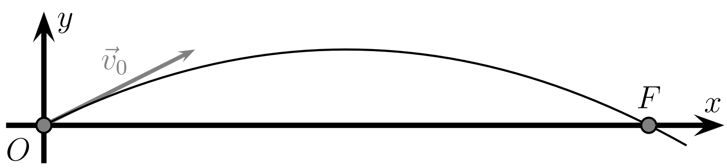
$$\left\{\begin{array}{lcl}\ddot{x} & = & 0\\ \ddot{y} & = & -g\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\dot{x} & = & v_0\cos\alpha\\ \dot{y} & = & -gt + v_0\sin\alpha\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{lcl}x & = & v_0\cos(\alpha)t\\ y & = & -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t\end{array}\right.}$$

Q8 Les constantes d'intégrations ont été trouvées grâce aux conditions initiales, la vitesse étant $\vec{v}(t=0) = v_0\cos\alpha\vec{e}_x + v_0\sin\alpha\vec{e}_y$ et la position initiale étant $x = 0; y = 0$. Remarque : on a bien $y(t=0) = 0$ alors même que l'énoncé dit que l'altitude est de 7600 m car l'origine des y est prises au début de la trajectoire (alors que l'origine des altitudes est au niveau de la mer).

5. La trajectoire d'un objet en chute libre se déduit de la question précédente. On isole t : $t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$ (on suppose $\alpha \neq \pm\pi/2$ bien sûr). On substitue ensuite dans l'autre équation :

Q9 $y = -\frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)} + v_0\sin(\alpha)\frac{x}{v_0\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{y = -\dfrac{1}{2}\dfrac{gx^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)} + x\tan\alpha}$. Cette trajectoire suivie par un objet en chute libre est donc celle que doit suivre l'avion pour que les objets à l'intérieur puissent être en chute libre et donc se sentir "en apesanteur".

   La trajectoire est une $\boxed{\text{parabole}}$ et a l'allure ci-contre (attention à faire en sorte que la trajectoire soit tangente à $\vec{v}_0$ en O).



6. D'après l'énoncé, on est en apesanteur jusqu'à ce que l'on revienne à l'altitude de départ (il est dit : "altitude au départ et à la fin de la trajectoire : 7600 m). C'est donc de O à F sur le

2. Remarque : le système d'étude n'est pas l'avion qui n'est pas en chute libre. Le but de l'avion est de suivre une trajectoire de chute libre malgré les frottements et les perturbations de façon à ce que les objets dans l'avion puissent être eux en chute libre (puisque non soumis aux frottements avec l'air car protégés par l'avion).

schéma ci-dessus. La mise en équation est donc $y = 0$ (compte tenu de la référence des altitudes) et $x \neq 0$. Pour avoir le temps, le mieux est de reprendre les réponses à la question 4 : t_{ap} le temps en apesanteur est donc solution de $y(t_{ap}) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}gt_{ap}^2 + v_0\sin(\alpha)t_{ap} = 0 \Rightarrow t_{ap} \times$
Q10 $\left(-\frac{1}{2}gt_{ap} + v_0\sin(\alpha)\right) = 0$, or $t_{ap} \neq 0$ d'où $-\frac{1}{2}gt_{ap} + v_0\sin(\alpha) = 0$ et donc $\boxed{t_{ap} = \frac{2v_0\sin\alpha}{g} = 22\text{ s}}$.

Remarque : il était bien demandé "en fonction des données de l'énoncé" et "faire l'application numérique". Certains ont remplacé g, v_0 et α avant de résoudre, il ne faut surtout pas faire cela car : 1) c'est plus difficile car dans "la vraie vie", contrairement aux exercices de maths, les données numériques ne tombent pas "juste" 2) cela empêche de raisonner sur le résultat comme ci-dessous pour voir comment augmenter la durée de "zéro-g".

7. Pour pouvoir répondre à cette question, il est nécessaire d'obtenir une expression litérale à la question précédente pour voir comment la durée dépend des paramètres du vol.

   g ne peut pas varier de façon notable (bien que dépendant de l'altitude, cette dépendance est faible). Si l'on veut augmenter la durée de l'apesanteur, il faut augmenter v_0 et/ou α (sinus étant une fonction croissante). Toutefois, même en augmentant fortement α, on n'augmenterait la durée que d'un facteur $\sqrt{2}$ au maximum (au prix de problèmes pour la reprise du vol de l'avion et/ou au sommet de la trajectoire où l'avion devrait changer brusquement de direction alors même que sa vitesse est presque nulle). Il ne me semble pas raisonnable de modifier notablement α.

   On peut envisager d'augmenter v_0, mais cela a deux contreparties : le coût en carburant et une gravité apparente plus importante entre deux phases d'apesanteur je pense (à moins d'augmenter l'altitude du vol, mais cela augmenterait alors le temps entre deux phases d'apesanteur). De plus, v_0 ne peut pas non plus être augmenté d'un grand facteur, l'avion
Q11 ne passant pas le mur du son.

   Ainsi, il est peut-être possible d'augmenter la durée en apesanteur, mais sans doute pas plus d'un facteur deux.

Ci-dessous quelques vidéos de vulgarisateurs scientifiques ayant eu la possibilité de tester un vol en "zéro-G".

https://www.youtube.com/watch?v=lVTTpKShVtE
https://www.youtube.com/watch?v=xdJwG_9kF8s
https://www.youtube.com/watch?v=q1_AJWZajEk

Quelques questions supplémentaires pour réfléchir un peu plus loin :

1. Compte tenu de la formule au début du problème, que vaut g_h au niveau de la station spatiale internationnale (altitude 408 km) ?
2. Compte tenu de la question précédente, le "poids" des scientifiques à bord de la station internationnale est combien de fois plus faible qu'au niveau du sol ?
3. Pourquoi les scientifiques "flottent-ils" dans la station internationnale ?
4. Quelle est la trajectoire de la station spatiale dans le référentielle terrestre a priori ?
5. En comparant le résultat de la question précédente avec celui de la question 5., commenter.