Conseils :

- Ce devoir comporte 3 exercices.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).

  Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

I. HOMOGÉNÉITÉ

1. On condidère la force $\vec{F}$ exercée par une hélice sur un fluide dans lequel elle se déplace.

Q1 (a) Donner la dimension de μ la masse **volumique** du fluide.

Q2 (b) Déterminer, à une constante sans dimension près, l'expression de la norme $||\vec{F}||$ de la force $\vec{F}$ sachant qu'elle dépend des grandeurs suivantes : μ la masse **volumique** du fluide, S l'aire balayée par l'hélice et v la vitesse relative du point d'application de la force $\vec{F}$ par rapport au fluide.

2. Lors de l'étude d'un système en mécanique, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{m}v + \frac{k}{m}x = \frac{kA}{m}\cos(\omega t)$$

où v est la vitesse du système, x sa position, m sa masse, λ est lié à une force de frottement $\vec{f}$, k est la constante de raideur d'un ressort, A est une longueur, ω est une pulsation et t la variable temporelle.

Q3 (a) En utilisant l'homogénéité de l'équation différentielle, déterminer la dimension de λ.

Q4 (b) En déduire, à une constante sans dimension près, la relation liant $\vec{f}$ à la vitesse $\vec{v}$ et λ.

II. Étude d'une lentille

On place un objet lumineux AB de hauteur $h = 2$ cm à une distance $d = 8$ cm d'une lentille convergente de focale $f' = 4$ cm. L'objet AB est perpendiculaire à l'axe optique et A est placé sur cet axe.

Q5 1. Quelle est le lien entre la focale et la vergence de la lentille ? Que vaut la vergence de cette lentille (on nommera l'unité) ?

Q6 2. Donner la formule de conjugaison de Descartes avec origine en O centre de la lentille.

Q7 3. Répresenter sur un schéma à l'échelle la lentille, les foyers, l'axe optique et l'objet AB.

Q8 4. Déterminer graphiquement la position de $A'B'$, l'image par la lentille, ainsi que sa taille et sa nature.

Q9 5. Retrouver la position $\overline{OA'}$ de l'image grâce aux formules de conjugaison.

Q10 6. Retrouver la taille de l'image grâce aux formules de grandissement.

Q11 7. Que doit-on faire pour observer cette image ?

Q12 8. Si on change la lentille par une lentille L_2 de vergence $V = 5\ \delta$, où se situerait l'objet AB pour obtenir une image au même endroit qu'avec la première lentille ?

III. Localisation d'une épave à l'œil nu

1 Découverte de l'épave

Lors d'une expédition en mer, alors que le soleil est au zénith à la verticale du lieu où il se trouve, un pêcheur de coquillages se trouvant à une hauteur $H = 1{,}0\,\text{m}$ au-dessus de la surface aperçoit un éclat brillant au fond de l'eau, lequel se trouve à une profondeur $h = 20\,\text{m}$. Il décide donc de plonger et découvre une épave du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. L'éclat brillant aperçu provient d'un miroir abandonné dans le carré des officiers, à la verticale d'un puits de lumière, incliné de telle sorte que la lumière réfléchie a été renvoyée par une large brèche percée plus loin dans le pont.

La situation est modélisée sur la figure 1, qu'il est inutile de reproduire sur la copie. On notera $n_e = 1{,}34$ l'indice de réfraction de l'eau de mer, et $n_a = 1{,}00$ celui de l'air.

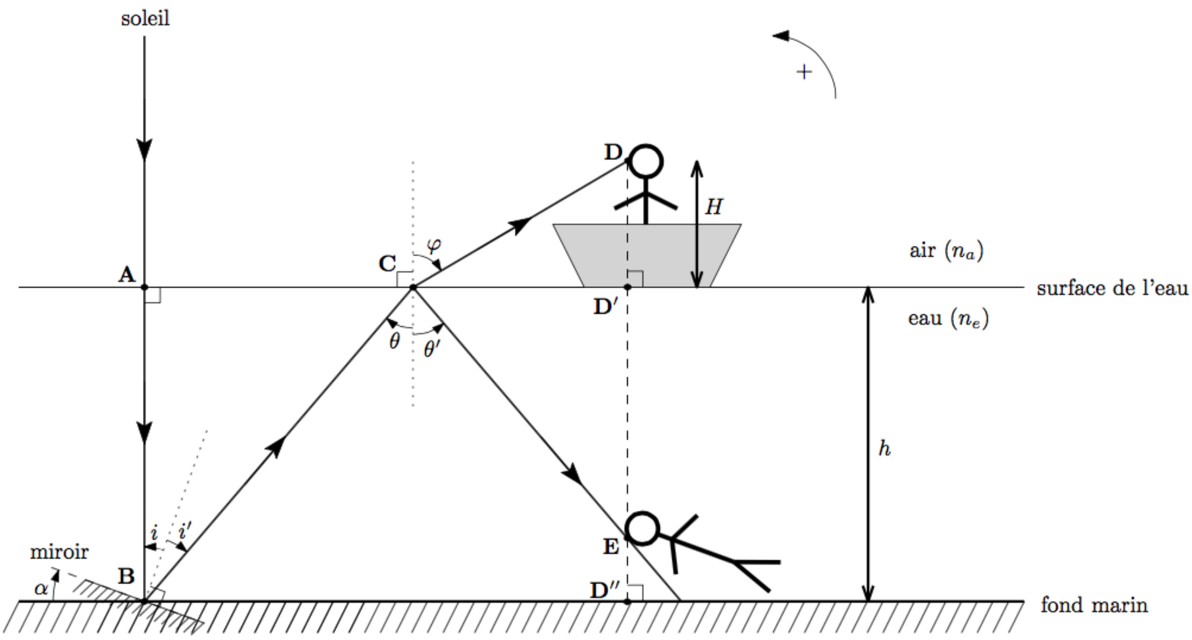


Figure 1 - Schéma (pas à l'échelle ! et pas nécessairement réaliste ...) de la situation.
Pour plus de clarté, l'épave n'a pas été représentée ; seul le miroir figure sur le dessin.

Q13 1. Rappeler la définition de l'indice de réfraction n d'un milieu transparent.

Q14 2. Rappeler les lois de Descartes pour la réfraction. Faites un schéma.

Q15 3. Justifier le tracé du rayon lumineux lorsqu'il frappe l'eau au point A (incidence normale).

Q16 4. Exprimer l'angle i d'incidence sur le miroir au point B en fonction de l'angle α que fait le miroir avec le fond de la mer.
On fera attention aux angles orientés : les angles sont pris positifs selon la convention choisie sur le schéma. i est ainsi pris positif. i et α sont orientés de façon opposée. Faites un schéma des angles autour de B.

Q17 5. Exprimer l'angle i' de réflexion sur le miroir en fonction de l'angle i d'incidence sur le miroir, puis en fonction de α.

Q18 6. En déduire l'angle θ d'incidence à la surface de l'eau au point C du rayon réfléchi par le miroir, en fonction de i et i'. En déduire que :

$$\theta = 2\alpha$$

Q19 7. Que se passe-t-il au point C ?

Q20 8. (a) Exprimer l' angle φ, d'abord en fonction de θ, n_a et n_e, puis en fonction de α, n_a et n_e. On pourra utiliser les fonctions trigonométriques inverses.

Q21 (b) Faire de même pour l'angle θ'.

9. On note D la position du pêcheur sur son bateau, D' le projeté orthogonal de D sur la surface de l'eau, et D'' le projeté orthogonal de D sur le fond marin. Déterminer :

Q22 (a) la distance CD', en fonction de φ et H (on fera attention au signe de φ qui est négatif, la distance doit bien être positive),

Q23 (b) la distance AC, en fonction de θ et h.

(c) la distance BD'', en fonction de α, h, H, n_a et n_e.

Q24 (d) Effectuer l'application numérique pour $\alpha = -20°$. A priori, le plongeur peut-il parcourir cette distance en apnée ?

Q25 10. À quelle profondeur $D'E$ le pêcheur, plongeant à la verticale de son bateau, aurait-il dû se trouver pour apercevoir l'éclat lumineux dû au rayon réfléchi en C ?

2 Pourquoi l'épave n'a-t-elle pas été détectée auparavant ?

Le pêcheur va toujours pêcher sensiblement dans la même zone. Pourtant jamais auparavant il n'a aperçu depuis son bateau l'éclat brillant... pourquoi ? La réponse est due à un crabe, qui s'est abrité sous le miroir, et l'a fait bouger !

Q26 11. Expliquer pourquoi il n'existe pas toujours, au point C, un rayon émergent hors de l'eau. Comment appelle-t-on ce phénomène ?

Q27 12. (a) Déterminer, en fonction de n_a et n_e, l'angle limite α_{lim} en-dessous duquel le rayon émergent n'existe plus.

(b) Effectuer l'application numérique.

Q28 13. L'angle α était-il plus grand ou plus petit avant que le crabe fasse bouger le miroir ?

I. HOMOGÉNÉITÉ

Q1 1. (a) Une masse volumique est une masse par unité de volume c'est-à-dire : $\boxed{[\mu] = M.L^{-3}}$

Q2 (b) On suppose que l'on peut écrire $||\vec{F}||$ sous la forme : $||\vec{F}|| = A\mu^x S^y v^z$
avec A une constante sans dimension.
Or $[F] = [mg] = M.L.T^{-2}$
En utilisant $[\mu] = M.L^{-3}$, on obtient :
$[A\mu^x S^y v^z] = (M.L^-3)^x(L^2)^y(L.T^{-1})^z = M^x.L^{-3x+2y+z}.T^{-z}$

Par identification :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ -3x+2y+z & = & 1 \\ -z & = & -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ z & = & 2 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

D'où $\boxed{||\vec{F}|| = A\mu S v^2}$

Q3 2. (a) Les termes de l'équation sont de même dimension :
$[\frac{dv}{dt}] = [\frac{\lambda}{m}v]$ or $[dv] = [v]$ et $[dt] = T$ d'où $\frac{1}{T} = \frac{[\lambda]}{M}$ Ainsi : $\boxed{[\lambda] = M.T^{-1}}$
<u>*rem :*</u> Il ne faut pas chercher à isoler λ. Il faut utiliser le fait que les différents termes de l'équation ont même dimension.
<u>*rem2 :*</u> Constante ne veut pas dire "sans dimension", k est une constante, mais $[k] \neq 1$ (pensez par exemple à la vitesse de la lumière dans le vide, constante, mais avec une unité).

Q4 (b) Comme$[F] = M.L.T^{-2}$, on peut proposer $\vec{f} = A\lambda\vec{v}$.
Plus précisément, c'est une force de frottement qui s'oppose à la vitesse.
Donc en prenant λ et A positifs, on peut écrire $\boxed{\vec{f} = -A\lambda\vec{v}}$

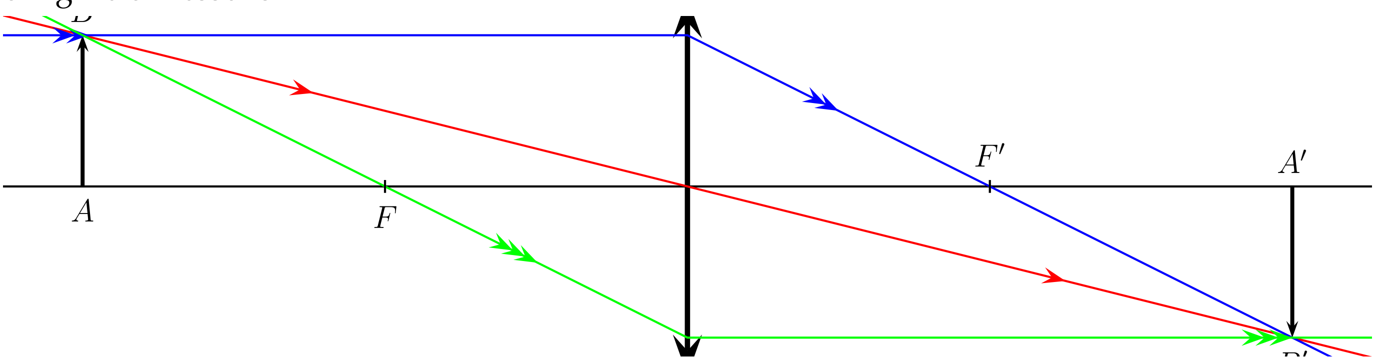
II. ÉTUDE D'UNE LENTILLE

Q5 1. $\boxed{f' = \frac{1}{V}}$ A.N. $V = \frac{1}{4.10^{-2}} = 25\ \delta$; l'unité de V est la dioptrie (δ).

2. Relation de conjugaison de Descartes avec origine au centre O de la lentille :

Q6 $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = V = \frac{1}{f'}$.

Q7 3. cf figure ci-dessous



Q8 4. Graphiquement la position de $A'B'$ est $\overline{OA'} = +8$ cm (attention à l'échelle), sa taille est $AB = 2$ cm et sa nature est : "réelle".

Q9 5. En utilisant la formule de conjugaison : $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA} f'}{\overline{OA}+f'} = \frac{-8*4}{-8+4} = 8$ cm.

Q10 6. En utilisant les formules de grandissement (ou le théorème de Thalès dans les triangles OAB et $OA'B'$) : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = -1$. La taille de l'image est donc de -2 cm.

Q11 7. Pour observer l'image il suffit de mettre un écran en A', orthogonal avec l'axe optique.

Q12 8. $f' = 1/V = 0{,}20\ m = 20\ cm$. On cherche cette fois $\boxed{\overline{OA} = \frac{\overline{OA'} f'}{-\overline{OA'}+f'} = \frac{8\times 20}{-8+20} = 13 \text{ cm}}$.

III. Localisation d'une épave à œil nu

Q13 1. Pour un milieu transparent, on définit l'indice de réfraction par $\boxed{n = \frac{c}{v}}$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide et v la vitesse de la lumière dans le milieu.

Attention à ne pas confondre définition précise et interprétation qualitative.

L'interprétation est intéressante, mais ne permet pas de faire des mesures quantitatives et des prédictions quantitatives. Il faut connaitre les définitions précices.

Q14 2. Lois de Descartes pour la réflexion.

Q15 3. Le rayon arrive sur le dioptre air/eau avec un angle d'incidence nul (incidence normale). D'après la seconde loi de Snell-Descartes pour la réfraction, le rayon réfracté n'est pas dévié.

REMARQUE : il existe aussi un rayon réfléchi qui n'est pas représenté car il ne peut être vu par le pêcheur.

Q16 4. D'après la question précédente, le rayon incident en B est perpendiculaire au fond marin. Puisque deux angles à côtés perpendiculaires sont égaux, l'angle i entre la normale au miroir et ce rayon est égal à celui entre le miroir et le fond marin. $\boxed{i = -\alpha}$

Q17 5. D'après la seconde loi de Snell-Descartes pour la réflexion, on a $\boxed{i' = -i = \alpha}$

Q18 6. Le rayon (AB) étant normal à la surface de l'eau, les angles θ et $(i' - i)$ sont des angles alternes-internes égaux. $\boxed{\theta = i' - i = 2\,\alpha}$

Q19 7. En C, le rayon incident (BC) rencontre un dioptre eau/air. D'après la 1ère loi de Snell-Descartes, on observe toujours un rayon réfléchi (CE) et parfois un rayon réfracté (CD) tels que le rayon incident, le rayon réfléchi, le rayon réfracté s'il existe et la normale à la surface de l'eau en C sont coplanaires.

8. (a) Expression de φ :

D'après la 2nde loi de Snell-Descartes pour la réfraction : $n_e \sin(\theta) = n_a \sin(\varphi)$.

Q20 Donc si le rayon réfracté existe, $\boxed{\varphi = \arcsin\left(\frac{n_e}{n_a} \sin(\theta)\right)}$

D'après la question 5), on a $\boxed{\varphi = \arcsin\left(\frac{n_e}{n_a} \sin(2\alpha)\right)}$

(b) Expression de θ' :

Q21 D'après la 2nde loi de Snell-Descartes pour la réflexion, il vient $\boxed{\theta' = -\theta = -2\,\alpha}$

Attention à répondre à ce qui est demandé ! θ' en fonction de θ puis de α, pas ϕ.

9. On note D la position du pêcheur sur son bateau.

Q22 (a) (DD') est normale à la surface de l'eau, donc les angles φ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DD'},\overrightarrow{DC}}\right)$ sont alternes-internes égaux. Ainsi, dans le triangle CDD' rectangle en D', on a : $\tan(\varphi) = -\frac{CD'}{DD'} \Rightarrow$ $\boxed{CD' = -H\ \tan(\varphi)}$

Q23 (b) Dans le triangle ABC rectangle en A, et d'après la question 5) :
$\tan(i - i') = -\tan(\theta) = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{h} \Rightarrow \boxed{AC = -h\ \tan(\theta)}$

(c) ⋆ $AD'D''B$ étant un rectangle, $BD'' = AD' = AC + CD'$ car A, C et D' sont alignés.
⋆ D'après les questions a) et b), on en déduit :
$BD'' = -h\ \tan(\theta) - H\ \tan(\varphi)$
⋆ D'après les questions 5) et 6), il vient finalement
$\boxed{BD'' = -h\ \tan(2\,\alpha) - H\ \tan\left[\arcsin\left(\frac{n_e}{n_a}\ \sin(2\,\alpha)\right)\right]}$

Q24 (d) Numériquement : $\boxed{BD'' \simeq 18\ \text{m}}$
Il est tout à fait raisonnable pour un pêcheur en apnée bien entraîné de couvrir cette distance (voire un peu plus, puisqu'en réalité, le pêcheur doit couvrir $BD' = \sqrt{BD''^2 + h^2} \simeq 27$ m et remonter à la surface ensuite ! Cela devient alors plus délicat, mais l'énoncé ne demandait que BD'').

10. Les angles θ' et $\left(\widehat{\overrightarrow{ED'},\overrightarrow{EC}}\right)$ sont alternes-internes égaux, donc dans le triangle $D'CE$ rectangle en D' :

Q25 $\tan(\theta') = \frac{CD'}{D'E}$
D'où $D'E = \frac{CD'}{\tan(\theta')}$
Donc, d'après les questions précédentes :
$\boxed{D'E = H\ \frac{\tan\left[\arcsin\left(\frac{n_e}{n_a}\ \sin(2\,\alpha)\right)\right]}{\tan(2\,\alpha)}}$
$\boxed{D'E \approx 2{,}0\ \text{m}}$
Cette profondeur est très facile à atteindre par tout être humain sans problème de santé particulier.

11. D'après la question 8) :$\varphi = \arcsin\left(\frac{n_e}{n_a}\ \sin(2\,\alpha)\right)$avec $n_e > n_a$

Q26 Par conséquent, si l'angle α est trop petit (donc grand en valeur absolue), l'argument de l'arcsin sera < -1 et φ ne sera pas défini. On n'observera alors pas de rayon réfracté : ce phénomène est appelé réflexion totale car seul le rayon réfléchi existe.

Q27 12. D'après le raisonnement mené à la question précédente, le rayon émergent n'existe plus lorsque
$\frac{n_e}{n_a}\ \sin(2\,\alpha) < -1 \quad \rightleftharpoons \quad \sin(2\,\alpha) < -\frac{n_a}{n_e}$
$\rightleftharpoons \quad 2\,\alpha < \arcsin\left(-\frac{n_a}{n_e}\right)$car arcsin est croissante
$\boxed{\alpha < \alpha_{lim} = -\frac{1}{2}\ \arcsin\left(\frac{n_a}{n_e}\right)}$
$\boxed{\alpha \approx -0{,}421\ \text{rad} \approx -24{,}1°}$

Q28 13. Auparavant, le rayon réfracté n'existait pas : il y avait réflexion totale et on était donc dans le cas $\alpha < \alpha_{lim}$. Par conséquent,
$\boxed{\text{L'angle } \alpha \text{ était plus petit (plus grand en valeur absolue).}}$