Conseils :

- Ce devoir comporte trois exercices indépendants.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).

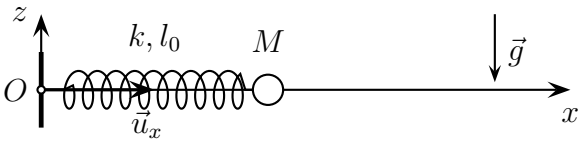
  Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- Changer de page pour un nouvel excercice.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

I. Différents oscillateurs

Le but de ce problème est de montrer comment une modélisation simple peut correspondre à une situation un peu plus complexe.

1 Modèle simple

On considère une masse M attachée à un mur par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. L'origine du repère O sera prise au niveau du mur. La masse de M sera notée m. La masse glisse sans frottement sur un plan horizontal.
Le point M sera repérée par son abscisse x.



Q1 1. Exprimer la force exercée par le ressort sur M en fonction des données du problème.

Q2 2. À partir de la formule précédente, déterminer la dimension de k.

3. Équation du mouvement :

Q3 (a) En détaillant le raisonnement, établir l'équation du mouvement reliant $x, \ddot{x}$ et les constantes du problème.

(b) Mettre l'équation sous forme canonique et donner l'expression de la pulsation propre ω_0.

Q4 (c) En utilisant l'équation différentielle du mouvement, déterminer la dimension de ω_0.

Q5 (d) En utilisant ici l'expression de ω_0 en fonction des constantes du problèmes, déterminer la dimension de ω_0. Est-ce cohérent avec la question précédente ?

Q6 (e) Donner l'expression de la période T_0.

Q7 4. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle établie à la question 3) en fonction de ω_0, l_0 et de deux constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer à cette question.

Q8 5. À $t = 0$, la masse est lancée de la position $x = l_0$ avec une vitesse v_0, en déduire la valeur des constantes d'intégration.

6. Aspect énergétique :

Q9 (a) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle élastique. Justifier.

Q10 (b) Montrer que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement. On fera l'énoncé explicite complet du théorème utilisé.

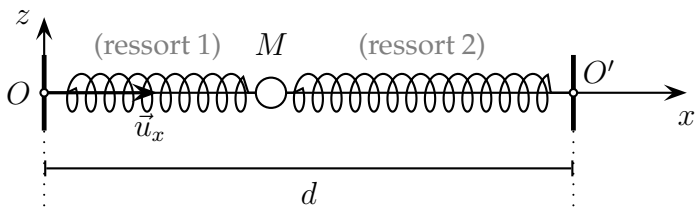
Q11 (c) Tracer sur un même graphique les allures des courbes $x(t), v(t)$. On tiendra compte des conditions initiales que l'on fera apparaître. On prendra $v_0 > 0$.

Q12 (d) Tracer sur un même graphique (aligné au-dessous) les allures des courbes $E_p(t), Ec(t)$ et $E_m(t)$.

2 Situation plus réaliste

En fait, un ressort comprimé est généralement "instable", et le mouvement de la masse va avoir tendance à ne plus être 1D, mais 2D. Une solution pour le guider est de mettre un deuxième ressort de façon à ce que les deux ressorts soient en extension.

On considère donc une situation comme celle de la figure ci-contre : la masse M est attachée à deux ressorts, un à gauche fixé en $x = 0$ comme précédémment, plus un deuxième à droite fixé en O' d'abscisse $x = d$.



Les deux ressorts ont la même constante de raideur k et la même longueur à vide l_0. Le but de cette partie est de montrer que cette situation est équivalente à la précédente.

Q13 1. Exprimer la force $\vec{F}_2$ exercée par le deuxième ressort sur M en fonction de l'abscisse x du point M, de k, l_0, d et $\vec{u}_x$.

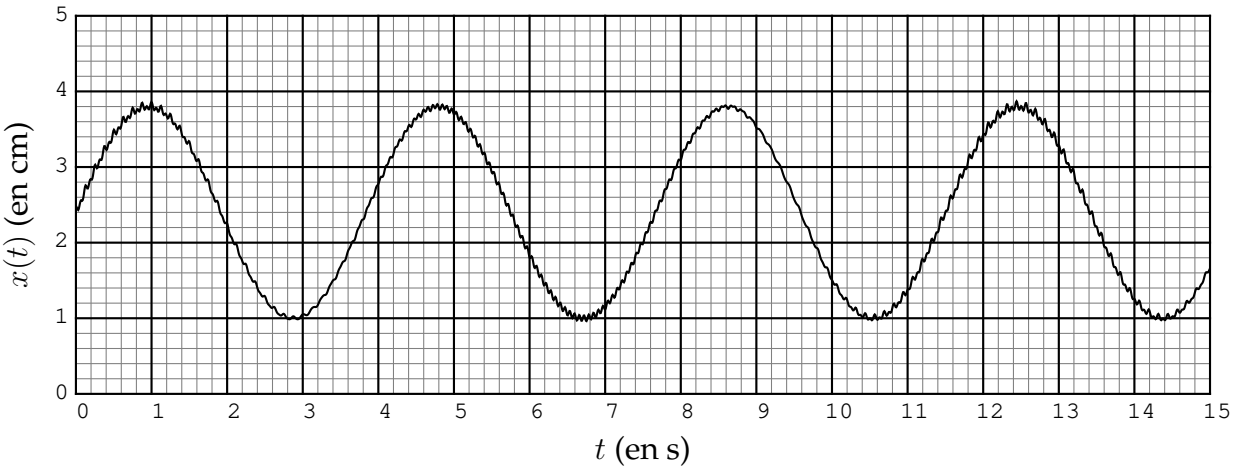
Q14 2. Déterminer la position d'équilibre x_{eq} pour laquelle la masse M restera immobile si elle est lâchée sans vitesse.

Q15 3. Mettre la force totale subie par M de la part des ressorts sous la forme $-K(x - L_0)\vec{u}_x$ où K et L_0 sont à exprimer en fonction des constantes du problème.

On en déduit que la situation de cette partie est équivalente d'un point de vue théorique à une situation avec un seul ressort comme dans la première partie.

3 Étude expérimentale

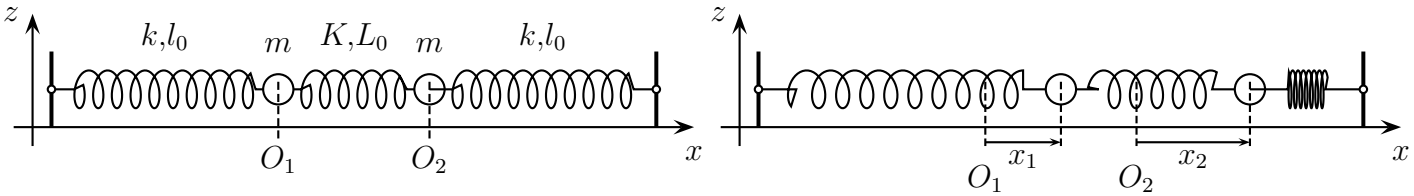
Expérimentalement, on mesure la position au cours du temps et on obtient la courbe suivante.



Q16 1. Mesurer sur le graphique les grandeurs suivantes (on expliquera la méthode et on ajoutera un schéma par exemple) :
   - amplitude du mouvement notée S_m,
   - valeur moyenne notée S_0,
   - période notée T_0.

Q17 2. En déduire ω_0 et v_0 en utilisant les résultats des parties précédentes.

4 Trois ressorts et deux masses : oscillateurs couplés



On étudie le dispositif représenté ci-dessus et constitué de 3 ressorts linéaires de raideurs respectives (k, K et k) liés à deux masses identiques m, mobiles sur l'axe Ox.

Soient x_1 et x_2 les élongations des deux masses à partir de leur position d'équilibre. On notera $l_{eq,1}, l_{eq,2}$ et $l_{eq,3}$ les longueurs à l'équilibre des trois ressorts (numérotés de gauche à droite).

On tient compte dans cette question des forces de frottements qui sont de la forme : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ sur chaque masse où $\vec{v}$ est la vitesse de la masse. Par exemple, pour la masse 1, on prendra : $\vec{f_1} = -\lambda\dot{x_1}\vec{u}_x$

1. On commence par prendre la masse repérée par x_1 comme système.

Q18 (a) Écrire la force $\vec{F_1}$ exercée par le ressort 1 puis celle exercée par le ressort 2, notée $\vec{F_2}$, en fonction des donneés du problème ($k, K, l_0, L_0, l_{eq,1}, \ldots$).

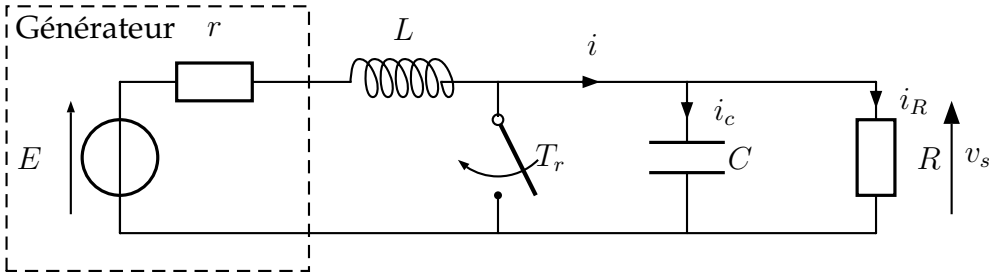
Q19 (b) Écrire la relation fondamentale de la dynamique lorsque le point M est à l'équilibre (on ne cherchera pas à simplifier ou à résoudre quoi que ce soit à cette question).

Q20 (c) Déterminer l'équation différentielle liant x_1 et x_2.

Q21 (d) Simplifier l'équation différentielle obtenue à la question précédente en utilisant la relation obtenue en 19) afin d'obtenir une équation différentielle ne faisant intervenir que k, K, m, x_1, x_2 et leurs dérivées (dit autrement, les longueurs à l'équilibre et à vide ne devraient plus apparaitre dans l'équation différentielle après simplification).

Q22 2. Faire de même pour la deuxième masse. On dit que les équations différentielles sont "couplées" car elles contiennent chacune x_1 et x_2.

II. Circuit du second ordre



On considère le circuit de la figure ci-dessus, dans lequel l'interrupteur T_r est fermé depuis un temps suffisamment long pour que le régime permanent soit établi.

La résistance r et le générateur E représentent la modélisation de Thévenin d'un générateur de tension réel.

On s'intéresse au régime transitoire qui suit l'ouverture de l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

Q23 1. Représenter les branchements de l'oscilloscope permettant de mesurer les tensions v_s en voie 1 et la tension de sortie du générateur en voie 2. On utilisera sur le schéma les notations CH1 et CH2 et masse de l'oscilloscope.

Q24 2. Proposer un protocole expérimental pour mesurer la résistance interne r d'un GBF. Faire un schéma. Donner un ordre de grandeur de r.

Q25 3. (a) Établir l'équation différentielle concernant v_s sous sa forme canonique, après l'ouverture de l'interrupteur.

Q26 (b) Montrer que la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q ont pour expression :

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{1+\frac{r}{R}}}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{1+\frac{r}{R}}\sqrt{LC}}{rC+\frac{L}{R}}$$

Q27 4. Déterminer numériquement ces coefficients à partir des valeurs numériques suivantes : $E = 15$ V, $r = 5\ \Omega$, $L = 0{,}1$ H, $C = 1000\ \mu$F et $R = 200\ \Omega$.

Q28 5. On recherche ensuite les conditions initiales pour v_s. Montrer que :

$$v_s(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{rC}$$

6. (a) Justifier brièvement le type de régime et ainsi que l'on peut chercher des solutions $v_s(t)$
Q29 de l'équation différentielle sous la forme :

$$v_s(t) = A - Be^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$$

Q30 (b) Expliciter ensuite les variables A, B, α, ω et ϕ en fonction des données du problème.

Q31 7. Représenter l'allure de $v_s(t)$.

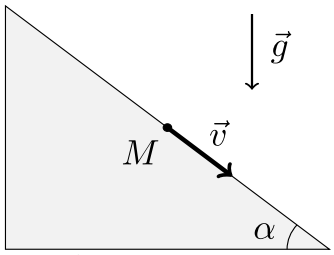
III. La luge : un sport olympique

La luge est devenue un sport olympique en 1964 à Innsbruck (Autriche). Le lugeur est allongé, sur le dos et les pieds en avant, sur la luge qui glisse sur une piste de glace. Pour freiner, le lugeur ne peut compteur que sur ses pieds car la luge ne comporte pas de frein. Les spécialistes peuvent atteindre des vitesses supérieures à $100\,\text{km/h}$.

Pour la modélisation, on assimile l'ensemble { luge + lugeur } (désigné par la suite sous le terme simple de luge) à un point matériel M de masse $m = 100\,\text{kg}$. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 10\,\text{m.s}^{-2}$.

A. Descente rectiligne

Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse $v_0 = 5{,}0\,\text{m/s}$. Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de $10\,\%$ (on descend verticalement de $10\,\text{m}$ quand on avance horizontalement de $100\,\text{m}$). On appelle α l'angle que fait la piste avec l'horizontale. Les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu. Le point M est ainsi en mouvement rectiligne uniformément accéléré.



Q32 1. Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur la luge et dessiner un schéma représentant ces forces, en justifiant soigneusement leur direction et leur sens.

Q33 2. Par application de la relation fondamentale de la dynamique, exprimer et calculer numériquement l'accélération a de la luge en fonction de l'accélération de la pesanteur g et de l'angle α.

Q34 3. L'origine des temps est fixée juste après la phase de poussée. Donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Au bout de quelle durée t_a la luge atteint-elle la vitesse $v_a = 25\,\text{m/s}$? Donnez l'expression analytique du résultat et faites l'application numérique.

Q35 4. Quelle est la distance parcourue lorsque la luge atteint la vitesse v_a ? Donnez l'expression analytique du résultat et faites l'application numérique.

5. La luge franchit la ligne d'arrivée à la vitesse $v_b = 30\,\text{m/s}$. Le ralentissement à l'arrivée se fait sur une piste inclinée de $10\,\%$ (on monte de $10\,\text{m}$ quand on avance horizontalement de $100\,\text{m}$). On note l'angle d'inclinaison α.

Q36 (a) Déterminer la longueur $\mathcal{L}$ de la piste de ralentissement nécessaire pour que la luge passe de $v_b = 30\,\text{m/s}$ à l'arrêt en utilisant une méthode énergétique.

Q37 (b) Faire l'application numérique et conclure sur la faisabilité de cette méthode de ralentissement.

(c) Pour une modélisation plus réaliste, on souhaite prendre en compte les frottements même s'ils sont faibles en prenant un coefficient de frottement $\mu = 0{,}1$ ici.

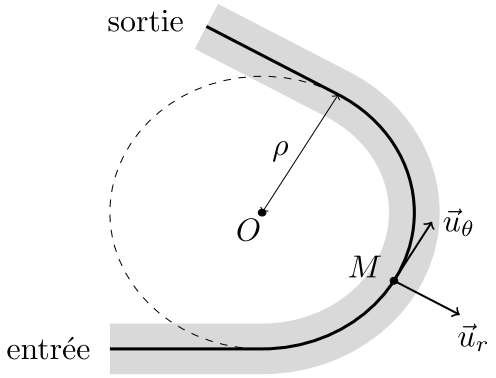
Q38 En tenant compte des frottements, que vaut maintenant la longueur nécessaire pour la piste de ralentissement ? L'effet des frottements était-il en effet négligeable ou non ?

B. Virage circulaire

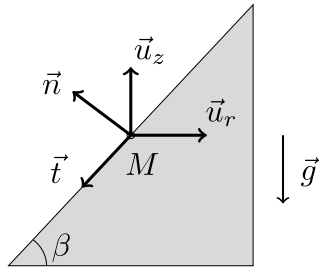
À présent, le point M est en mouvement circulaire uniforme à la vitesse V, sur un cercle de rayon ρ. La piste est inclinée latéralement d'un angle $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. La trajectoire se situe dans un plan horizontal donc la vitesse est : $\vec{v} = V\vec{u}_\theta$.

Le trièdre de vecteur unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est orthonormé direct.

On désigne par $\vec{R} = R_N\,\vec{n} + R_T\,\vec{t}$ la réaction de la piste, qui n'est plus uniquement normale. Les vecteurs unitaires $\vec{n}$ (normal) et $\vec{t}$ (tangent) sont définis sur la figure de droite ci-dessous.



Vue de dessus de la piste



Vue en coupe de la piste

Q39 6. Refaire le schéma vue de dessus et représenter la vitesse et l'accélération. Exprimer l'accélération $\vec{a}$ en fonction de V, ρ et de $\vec{u}_r$. Justifier physiquement le sens de l'accélération.

Q40 7. La luge n'étant soumise qu'à son poids et à la réaction du support, écrire la relation fondamentale de la dynamique en projection dans le repère $\left(\vec{t}, \vec{n}\right)$. On représentera les forces sur un schéma de la vue en coupe de la piste.

Q41 8. En déduire les expressions des réactions R_N et R_T en fonction de V, ρ, β, g, et m.

Q42 9. Quelle est la valeur V_c de la vitesse pour laquelle la réaction tangentielle est nulle ? Écrire alors R_T en fonction de m, ρ β et $(V^2 - V_c^2)$.

Soit $f = 0{,}3$ le coefficient de frottement latéral de la luge sur la piste de glace. Les lois du frottement solide indiquent que la luge ne dérape pas tant que $|R_T| < f|R_N|$. Dans la suite des questions, on ne considère que le cas $V \geqslant V_c$ ce qui correspond à un dérapage possible vers l'extérieur du virage.

Q43 10. Montrer que V doit respecter l'inégalité suivante pour éviter le dérapage :

$$V^2(\cos\beta - f\sin\beta) \leqslant g\rho(\sin\beta + f\cos\beta)$$

Q44 11. En déduire que si l'inclinaison β est suffisante, il n'y aura jamais dérapage quelle que soit la vitesse V. Donner l'inclinaison minimale à respecter, qui dépend uniquement du coefficient f. Faire l'application numérique de façon approchée, et convertir le résultat en en degrés.

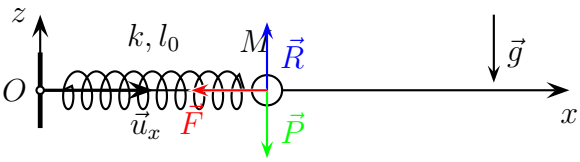
Q45 12. Si cette inclinaison minimale n'est pas respectée, montrer que la condition de non dérapage impose une vitesse V à ne pas dépasser, à exprimer en fonction de g,ρ, β et f. Que risque la luge si sa vitesse est trop grande ?

Q46 13. Montrer à partir des résultats précédents qu'en l'absence de frottement latéral, on ne pourrait aborder le virage qu'à la vitesse V_c. Les frottements permettent ainsi d'avoir une certaine marge de vitesse dans un virage.

I. Différents oscillateurs

1 Modèle simple

Sur le schéma, la force $\vec{F}$ peut être représentée vers la gauche ou vers la droite. Le sens change au cours du mouvement (lié au changement de signe de la grandeur $l(t) - l_0$ dans l'expression de la force). On fait généralement moins d'erreurs en faisant l'hypothèse $l(t) - l_0 > 0$ (ressort étiré), c'est donc le choix qui a été fait sur le schéma ci-contre.



Q1 1. Force exercée par le ressort sur M : $\boxed{\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{e}_x}$. C'est généralement implicite, mais il ne faut pas oublier que $l = l(t)$ dépend du temps, et donc $\vec{F}$ aussi.

2. Dimension de k : comme vu dans le problème précédent $[F] = \text{M.L.T}^{-2}$, d'où $[k(l - l_0)] =$
Q2 M.L.T^{-2}, soit $[k].\text{L} = \text{M.L.T}^{-2}$ et donc finalement $\boxed{[k] = \text{M.T}^{-2}}$.

3. Équation du mouvement :

(a) système : $\{M\}$; référentiel : terrestre galiléen ; bilan des forces : $\vec{F}$ la force du ressort, $\vec{P}$ le poids et $\vec{R}$ la réaction du support, orthogonale au support car il n'y a pas de frottement. On peut donc appliquer la seconde loi de Newton : $\vec{F} + \vec{R} + \vec{P} = m\vec{a}$.

Q3 On projette selon l'axe horizontal Ox : $-k(x - l_0) + 0 + 0 = m\ddot{x}$ $\boxed{-k(x - l_0) = m\ddot{x}}$

(b) Pour mettre l'équation sous forme canonique, on met $\ddot{x}$ et x du même coté du signe égal et le reste de l'autre côté. On fait en sorte d'avoir un 1 devant $\ddot{x}$: $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0}$.

Par identification avec la forme du cours $\ddot{x} + \omega_0^2 x = cte$, on en déduit que $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$.

(c) La forme canonique est une équation juste est doit donc être homogène, en particulier
Q4 l'addition $\ddot{x} + \omega_0^2 x$, on en déduit que $[\ddot{x}] = [\omega_0^2 x] \to \text{L.T}^{-2} = [\omega_0]^2\text{L}$ d'où $\boxed{[\omega_0] = \text{T}^{-1}}$.

(d) On a trouvé précédemment $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, soit avec les dimensions :$[\omega_0] = \sqrt{\frac{\text{M.T}^{-2}}{M}} = \text{T}^{-1}$ en
Q5 utilisant la dimension de k déterminée au début. On en déduit que c'est $\boxed{\text{cohérent}}$.

Q6 (e) D'après le cours $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$.

4. La solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.
Cherchons une solution particulière sous la forme d'une fonction constante $x_p : t \mapsto C$ où C est une constante à déterminer. En injectant x_p dans l'équation, on trouve $0 + \omega_0^2 C = \omega_0^2 l_0$, soit $C = l_0$.
Pour la solution générale de l'équation homogène associée, on utilise une des formes du cours $x_H : t \mapsto A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ (n'importe quelle forme du cours convient).
Q7 On en déduit que la forme générale des solutions de l'équation différentielle est :
$\boxed{x(t) = x_p(t) + x_H(t) = l_0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$ où A et B sont des constantes d'intégration dont la valeur dépend des C.I.

5. À $t = 0$, la masse est lancée de la position $x = l_0$ avec une vitesse v_0, soit $x(t = 0) = l_0$ et $\dot{x}(t = 0) = v_0$. La formule proposée avant pour $x(t)$ doit être vraie quelque soit t et donc en particulier elle doit "marcher" à $t = 0$, soit :

$$\left\{\begin{array}{lllll} l_0 & = & x(t=0) & = & l_0 + A\cos(\omega_0 \times 0) + B\sin(\omega_0 \times 0) = l_0 + A \\ v_0 & = & \dot{x}(t=0) & = & 0 - A\omega_0 \sin(\omega_0 \times 0) + B\omega_0 \cos(\omega_0 \times 0) = B\omega_0 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & A \\ v_0/\omega_0 & = & B \end{array}\right.}$$

Q8

On en déduit que dans ce cas $x(t) = l_0 + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$.

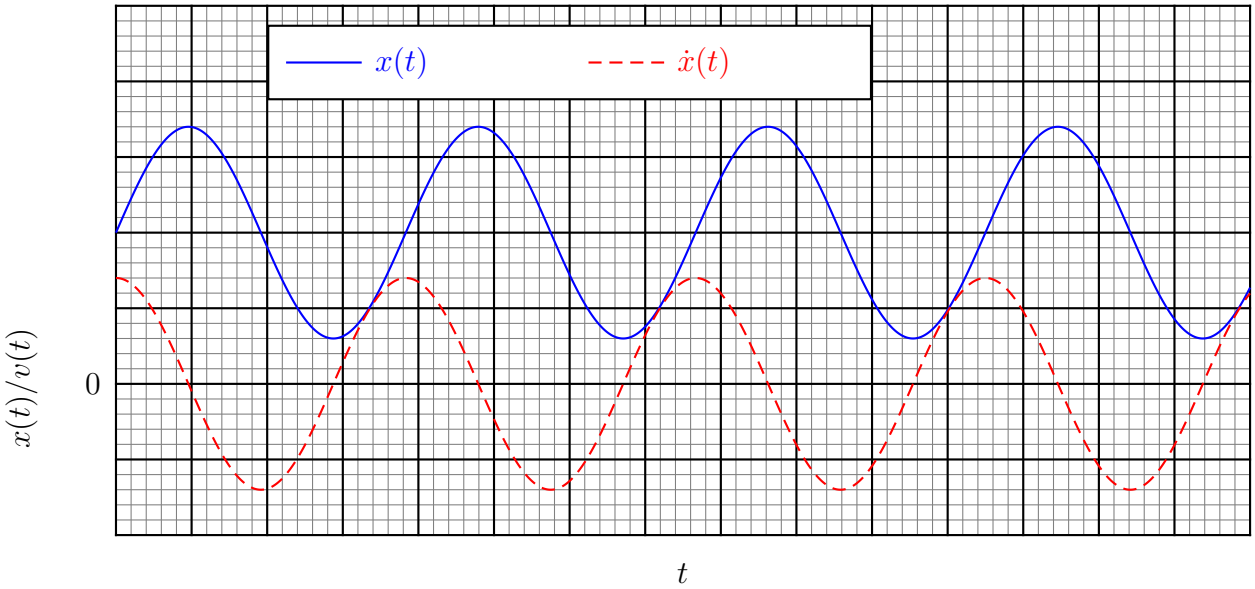
6. Aspect énergétique :

Q9 (a) D'après le cours $\boxed{E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2}$.

(b) Il y a plusieurs méthode pour montrer que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement (cf cours où deux méthodes ont été faites, on en montre ici une 3e possible). Par exemple : $E_m(t) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Dérivons cette expression (on doit trouver 0 si la fonction $E_m(t)$ est constante).

Q10 $\frac{\mathrm{d}E_m(t)}{\mathrm{d}t} = k\dot{x}(x - l_0) + m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x} \times [k(x - l_0) + m\ddot{x}]$, or d'après l'équation différentielle, ce qui est dans les [ ] est égal à 0, d'où $\boxed{\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0}$. En intégrant, on en déduit $E_m(t) = cte$.

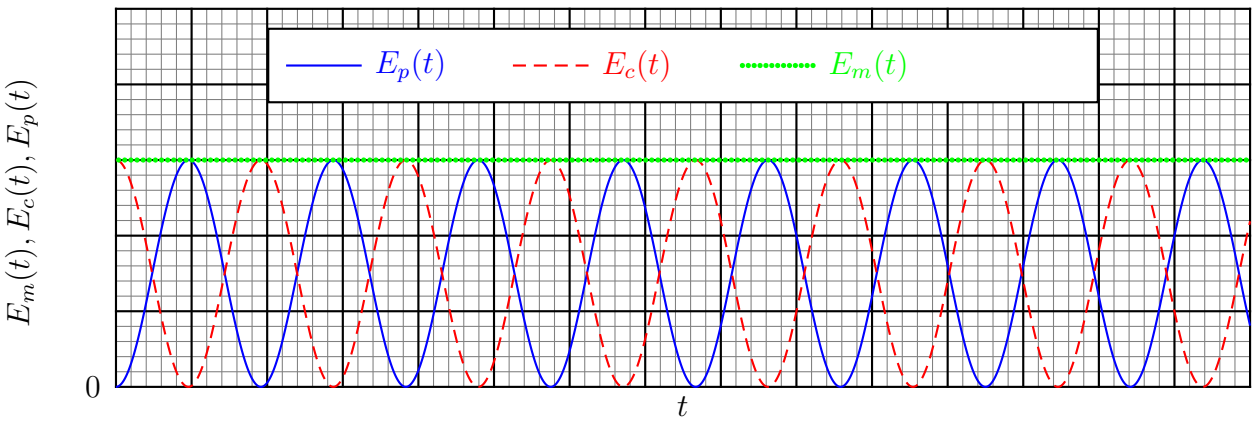
(c) Tracé des courbes :



Q11 Pour tenir compte des C.I., il faut que la courbe de x soit un sinus + constante, donc commence à sa valeur moyenne non nulle et augmente au début.La courbe de $\dot{x}$ doit être un cosinus de valeur moyenne nulle (donc commencer à son maximum et être symétrique par rapport à $y = 0$). Les périodes des deux courbes doivent être les mêmes. Puisque l'on n'a pas de valeur et que x et v n'ont pas la même unité, les amplitudes sur les graphiques sont arbitraires.

(d) Ici, il est important que E_p et E_c soient de même amplitude et oscillent deux fois plus vite que les courbes précédentes (à cause du carré). E_m doit être constante et être tangente au maximum. Il faut aussi que E_p soit nulle lorsque x passe par sa valeur moyenne et E_c maximum à ce moment. De même, il faut que E_p soit maximum au niveau des

Q12 extremums de x et E_c nul à ce moment.



2 Situation plus réaliste

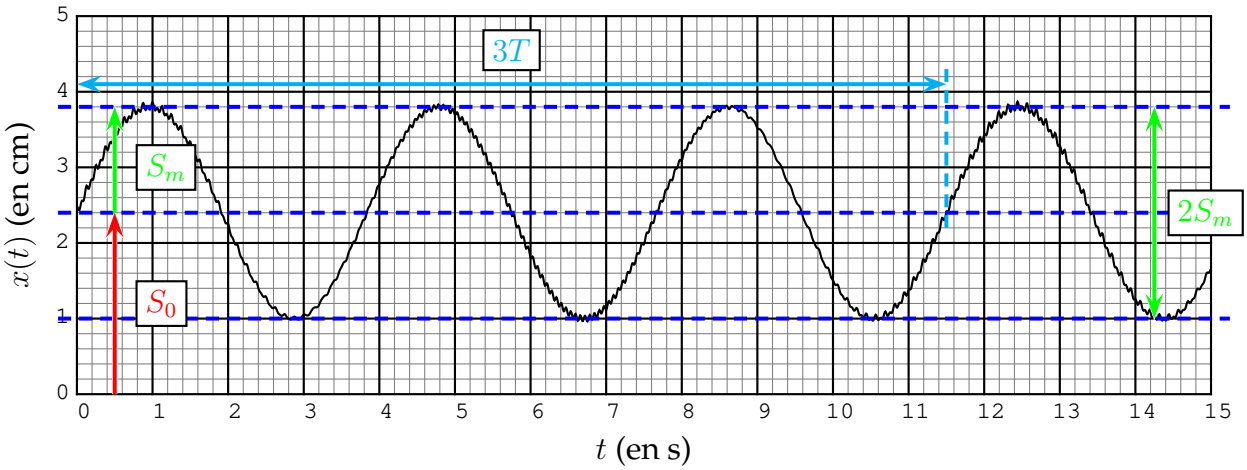
Q13 1. $\vec{F}_2 = -k(l_2 - l_0) \times (-\vec{u}_x) = \boxed{k(d - x - l_0)\vec{u}_x}$.

2. À l'équilibre dans un référentiel galiléen, la somme des forces sur un système est nulle (première loi de Newton) : $\vec{F}_2 + \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$. En projetant selon x on trouve $k(d - x_{eq} -$

Q14 $l_0) - k(x_{eq} - l_0) = 0 \Rightarrow \boxed{x_{eq} = \dfrac{d}{2}}$.

Q15 3. La force totale subie par M de la part des ressorts est $[k(d - x_{eq} - l_0) - k(x_{eq} - l_0)]\vec{u}_x = -k(2x - d)\vec{u}_x = \boxed{-2k(x - d/2)\vec{u}_x}$. On en déduit $\boxed{K = 2k \text{ et } L_0 = d/2}$.

3 Étude expérimentale



Q16 1. Graphique ci-dessus :

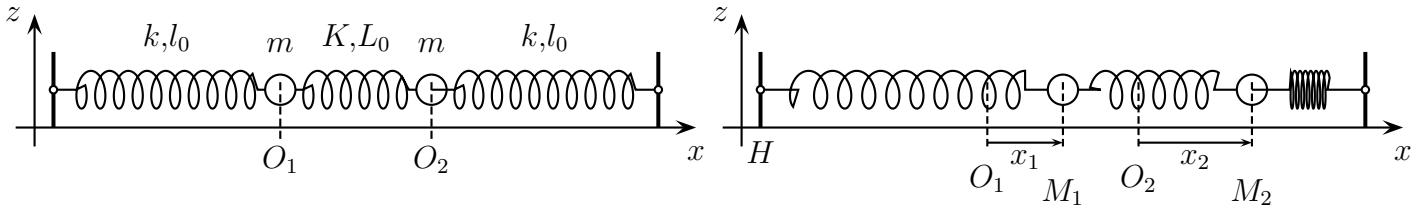
- amplitude du mouvement $S_m = 1{,}4$ cm, (s'obtient en faisant $(max - min)/2$)
- valeur moyenne notée $S_0 = 2{,}4$ cm , (s'obtient en faisant $(max + min)/2$)
- période notée $T_0 = 11{,}5/3 = 3{,}83$ s. (On mesure 3 périodes au niveau des intersection de la courbe avec la valeur moyenne.)

Q17 2. On en déduit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1{,}64$ rad/s.

Attention à l'unité de la pulsation w !

Pour v_0 le plus simple est d'utiliser le fait que l'amplitude est $S_0 = v_0/\omega_0$, soit $v_0 = S_0\omega_0 = 2{,}3$ cm/s.

4 Trois ressorts et deux masses : oscillateurs couplés



1. On commence par prendre la masse repérée par x_1 comme système.

   (a) La partie difficile pour cette question est la longueur des ressorts. x_1 étant la position par rapport à la position d'équilibre, on en déduit $l_1 = l_{eq,1} + x_1$. Une autre manière de le voir est d'utiliser la relation de Chasles : $l_1(t) = \overline{HM_1} = \overline{HO_1} + \overline{O_1M_1} = l_{eq,1} + x_1$. Dans le cas du premier ressort, la relation était facile, mais cela aidera bien pour le second ressort.
   Pour le 2e ressort $l_2(t) = \overline{M_1M_2} = \underbrace{\overline{M_1O_1}}_{=-\overline{O_1M_1}} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2M_2} = -x_1 + l_{eq,2} + x_2$.

Q18 On en déduit : $\vec{F_1} = -k(l_1 - l_0)\vec{u}_x = \boxed{-k(l_{eq,1} + x_1 - l_0)\vec{u}_x}$ et
$\vec{F_2} = +K(l_2 - L_0)\vec{u}_x = \boxed{K(l_{eq,2} + x_2 - x_1 - L_0)\vec{u}_x}$.

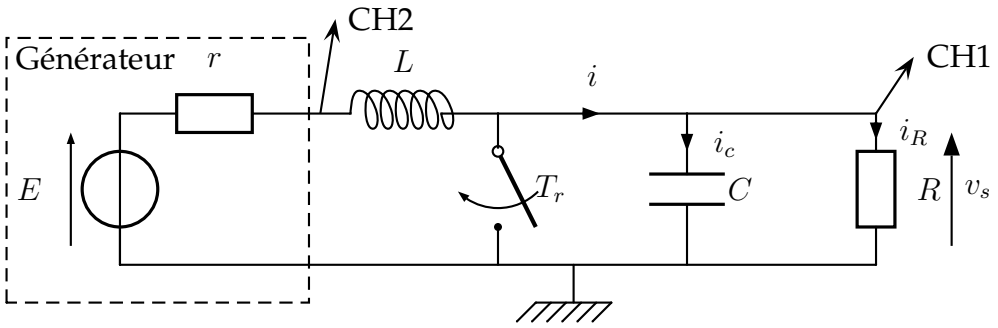
   (b) Le système est la masse 1, le référentiel est le référentiel terrestre galiléen, le bilan des forces sur la masse M_1 est donc des deux forces de la question d'avant, plus la force de frottement $\vec{f_1} = -\lambda\dot{x_1}\vec{u}_x$, le poids et la réaction du support.
   À l'équilibre, l'accélération et la vitesse sont nulles, donc $\dot{x}_1 = 0$. D'après la première
Q19 loi de Newton : $\vec{0} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{P_1} + \vec{R_1}$. On projette selon x : $0 = -k(l_{eq,1} + x_1 - l_0) + K(l_{eq,2} + x_2 - x_1 - L_0)$. Mais vu que x_1 et x_2 sont les écarts à la position d'équilibre, ils sont évidemment nuls à l'équilibre.
   On en déduit $\boxed{0 = -k(l_{eq,1} - l_0) + K(l_{eq,2} - L_0)}$

Q20 (c) Même système/ref que précédemment.Donc d'après la seconde loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{P_1} + \vec{R_1} + \vec{f_1}$. On projette selon x :
   $\boxed{m\ddot{x}_1 = -k(l_{eq,1} + x_1 - l_0) + K(l_{eq,2} + x_2 - x_1 - L_0) + 0 + 0 - \lambda\dot{x_1}}$

   (d) On décompose pour faire apparaitre les forces à l'équilibre + les perturbations par rap-
Q21 port à l'équilibre : $m\ddot{x}_1 = \underbrace{-k(l_{eq,1} - l_0) + K(l_{eq,2} - L_0)}_{\text{0 en utilisant l'équilibre}} - kx_1 + K(x_2 - x_1) - \lambda\dot{x_1}$. Soit :
   $\boxed{m\ddot{x}_1 = -kx_1 + K(x_2 - x_1) - \lambda\dot{x_1}}$

Q22 2. De même pour la deuxième masse, on trouverait en détaillant un peu :
   $\boxed{m\ddot{x}_2 = -kx_2 - K(x_2 - x_1) - \lambda\dot{x_2}}$

II. Circuit du second ordre



Q23 1. Cf schéma ci-dessus. Bien utiliser les notations pour la masse ("borne '-' de l'oscilloscope", commune aux deux voies) et pour l'endroit où le potentiel est mesuré ("borne '+' de l'oscilloscope). La masse correspondant au "pied" de la flèche de tension que l'on veut mesurer et la flèche de la voie de mesure se met du côté de la flèche.

Q24 2. Cf TP : méthode de la tension moitié. On mesure la tension en circuit ouvert, cela nous donne $E - ri = E$ car $i = 0$ en circuit ouvert, puis on place une résistance variable R_v en sortie. En faisant varier la résistance jusqu'à ce que la tension mesurée soit $E/2$, on a alors $R_v = r$. On s'attend à mesure quelque chose de l'ordre de $50\ \Omega$ pour les GBF. (ou $0\ \Omega$ pour les générateurs stabilisés en tension.)

Q25 3. (a) On applique la loi des mailles en remarquant que les deux dipôles à droite sont soumis à la même tension v_s.

On veut tout exprimer en fonction de v_s, on fait cela de proche en proche : $i_c = C\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}$ et $i_R = \frac{v_s}{R}$ d'après les relations constitutives. D'après la loi des nœuds, $i = i_c + i_R = C\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + \frac{v_s}{R}$. D'après la loi des mailles, $E = ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + v_s$. On réutilise la loi des nœuds pour éliminer i : $E = r\left(C\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + \frac{v_s}{R}\right) + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + \frac{v_s}{R}\right) + v_s$

On regroupe alors les termes de même dérivée :

$$E = LC\frac{\mathrm{d}^2v_s}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R} + rC\right)\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{r}{R} + 1\right)v_s$$

On obtient finalement :

$$\frac{E}{LC} = \frac{\mathrm{d}^2v_s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L/R + rC}{LC}\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + \frac{1 + r/R}{LC}v_s$$

Q26 (b) En identifiant le coefficient devant v_s à ω_0^2 et celui devant $\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}$ à ω_0/Q, on trouve

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{1 + \frac{r}{R}}}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{1 + \frac{r}{R}}\sqrt{LC}}{rC + \frac{L}{R}}$$

Q27 4. On trouve $\boxed{\omega_0 = 101{,}2\ \text{rad.s}^{-1} \text{ et } Q = 1{,}84 > \frac{1}{2}}$.

5. ➢ On a par continuité de la tension aux bornes du condensateur $v_s(0^+) = v_s(0^-) = 0$ (interrupteur fermé pour $t < 0$ donc tension nulle à ses bornes).

➢ La dérivée de v_s apparait dans la relation constitutive du condensateur $i_C = C\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}$. Il convient alors d'exprimer ce courant à $t = 0^+$.

Pour cela, on remarque que $i(0^+) = i_C(0^+) + i_R(0^+)$ et que $i_R(0^+) = v_s(0^+)/R = 0$ d'après le point précédant. La présence de la bobine dans la maille principale indique que $i(0^+) = i(0^-)$. Cette dernière quantité peut alors être simplement exprimée à l'aide d'une loi des mailles exprimée à $t = 0^-$ (donc en régime permanent lorsque $u_L = 0$) :

Q28 $E = ri(0^-) + \underbrace{v_s(0^-)}_{=0} \Rightarrow i(0^-) = \frac{E}{r} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{rC}$

Q29 6. (a) La valeur du facteur de qualité obtenue précédemment indique que l'on est en présence d'un régime pseudo-périodique. On obtient donc une solution du type : $v_s(t) = sol_p + Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$. Puisque le second membre est une constante, on s'attend à ce que la solution particulière soit elle aussi une constante : on pose $A = sol_p$ et $B = -C$ ce qui donne la forme proposée par l'énoncé. $v_s(t) = A - Be^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$.

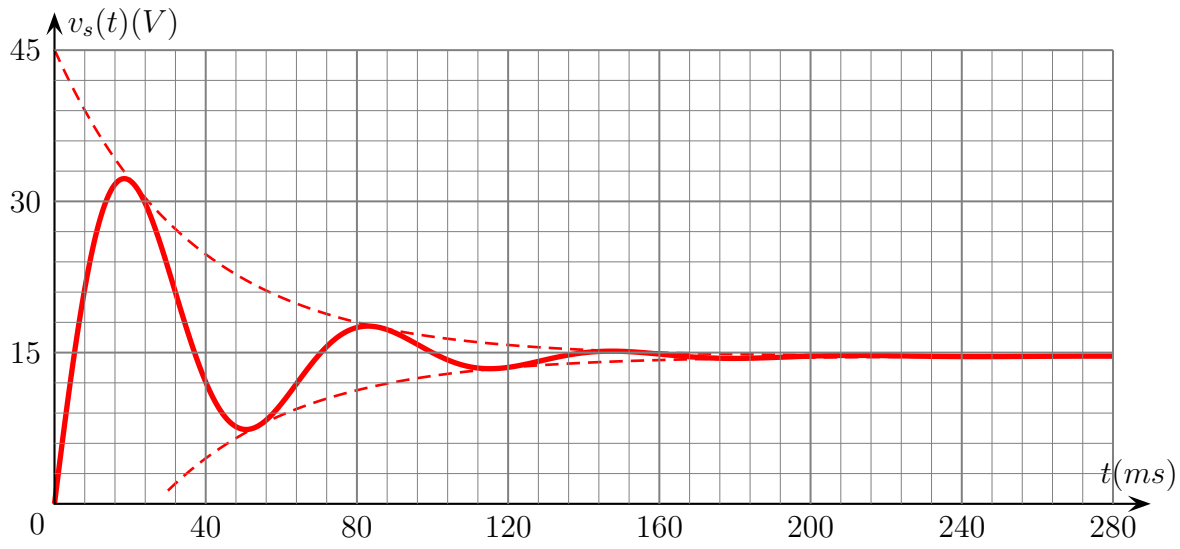
(b) ➢ La constante A correspond au régime permanent : $\boxed{A = \dfrac{E}{1+\frac{r}{R}}}$.

➢ On peut ensuite trouver α et ω en résolvant le polynôme caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$. $Q > 1/2 \Rightarrow \Delta < 0$. On cherche alors des racines complexes donc $r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$. On a par identification $\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}$ puis $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$.

➢ Finalement, on peut retrouver ϕ et B à l'aide des CIs. On a premièrement $v_s(0^+) = 0 = A - B\cos(\phi)$. Puis pour la dérivée, $\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{rC} = B\left(\alpha\cos(\phi) + \omega\sin(\phi)\right)$ d'où l'on déduit $\frac{E}{rC} = \alpha A + B\omega\sin(\phi)$. On doit découpler les équations, on peut pour cela faire apparaitre $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ce qui permet de faire disparaitre ϕ pour trouver B, puis on en déduira ϕ.

$$\begin{cases} B\cos\phi &= A \\ B\sin\phi &= \frac{\frac{E}{rC}-\alpha A}{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) &= A^2 + \left(\frac{\frac{E}{rC}-\alpha A}{\omega}\right)^2 \\ \sin\phi &= \frac{\frac{E}{rC}-\alpha A}{B\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B &= \sqrt{A^2 + \left(\frac{\frac{E}{rC}-\alpha A}{\omega}\right)^2} \\ \phi &= \arcsin\left(\frac{\frac{E}{rC}-\alpha A}{B\omega}\right) \end{cases}$$

Q30 7. Représenter l'allure de $v_s(t)$.



III. La luge : un sport olympique

A. Descente rectiligne

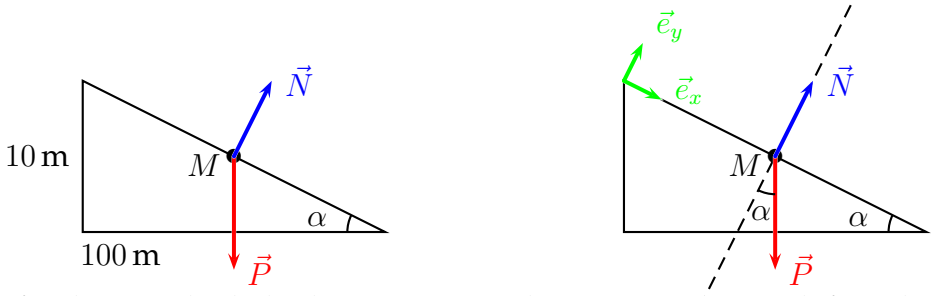
Système : $\{M\}$; Référentiel : La piste (considérée comme galiléen)

Q31 1. Les forces sont :

➢ Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ orienté selon $\vec{g}$ (vers le bas)

➢ La réaction du support $\vec{R}$ qui est orthogonale au support puisque les frottement sont négligés dans cette question. De plus elle est dirigée depuis le support vers la masse (repousse la masse).

Les forces sont représentées sur le schéma ci-desous à gauche. L'énoncé représentait un schéma avec un angle proche de 45°, ne faites pas comme lui pour ne pas vous tromper dans les projections.



Q32 2. La relation fondamentale de la dynamique appliquée au système défini plus haut dans le référentiel de la piste donne $\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$. Il faut faire un schéma et choisir des vecteurs de bases ici. Le schéma est ci-dessus à droite.

La relation fondamentale de la dynamique projetée sur les deux axes donne :

$$\begin{cases} 0 + P\sin\alpha &= m\ddot{x} \\ N - P\cos\alpha &= m\ddot{y} = 0 \end{cases}$$

La deuxième relation n'est pas utile ici et toute l'accélération est selon x puisqu'il n'y a pas de mouvement selon y. On a donc $a = \ddot{x} = \frac{P}{m}\sin\alpha \Rightarrow \boxed{a = g\sin\alpha}$.

Pour l'application numérique, la valeur de α n'était pas donnée directement. Ce qui était donné, c'est « la pente de la piste est de 10% », c'est-à-dire $\tan\alpha = 0{,}1$ (schéma ci-dessus à gauche). On lit donc dans le tableau que l'angle correspondant et son sinus sont $\alpha = 0{,}1$ et $\sin\alpha = 0{,}1$. L'application numérique donne donc $\boxed{a = 10 \times 0{,}1 = 1\ \mathrm{m/s^2}}$.

Q33 3. Le problème est 1D ici, l'accélération étant constante on en déduit $\boxed{v = at = gt\sin\alpha + v_0}$ (attention à ne pas oublier la constante liée aux conditions initiales qui vaut v_0 ici).

Pour trouver t_a on utilise l'équation prise en $t = t_a$: $v_a = gt_a\sin\alpha + v_0 \Rightarrow \boxed{t_a = \frac{v_a - v_0}{g\sin\alpha}}$.

Numériquement $\boxed{t_a = \frac{25-5}{10\times 0{,}1} = 20\,\mathrm{s}}$.

Beaucoup d'entre vous ont fait un calcul semi-analytique/semi-numérique. Ce genre de calcul est non homogène et sera pénalisé. De plus, cela ne permet pas certaines simplifications parfois (par exemple on ne se rendrait pas forcément compte que la masse n'intervient pas dans le cas d'une chute libre).

Q34 4. On intègre une fois de plus l'équation : $x(t) = a\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$ (la constante d'intégration vaut ici x_0, la position de départ qui n'est pas donnée par l'énoncé. On peut la prendre égale à 0 si on prend pour origine la fin de la poussée). La distance cherchée est $d = x(t_a) - x_0 = a\frac{t_a^2}{2} + v_0 t_a = g\sin\alpha\frac{(v_a - v_0)^2}{2g^2\sin^2\alpha} + v_0\frac{v_a - v_0}{g\sin\alpha} = \frac{v_a^2 - 2v_a v_0 + v_0^2 + 2v_0 v_a - 2v_0^2}{2g\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{d = \frac{v_a^2 - v_0^2}{2g\sin\alpha} = \frac{(25-5)(25+5)}{2\times 10\times 0{,}1} = 300\,\mathrm{m}}$

5. (a) On étudie un point matériel dans un référentiel, on peut donc utiliser le théorème de
Q35 l'énergie mécanique : $W_{nc,1\to 2} = E_{m,2} - E_{m,1}$

Pensez à citer les théorèmes que vous utilisez, et à vérifier les hypothèses explicitement.

Seul le poids travaille (conservative $E_p = mgz$) puisque les frottements sont négligés, en effet, la réaction normale du support est orthogonale à la trajectoire à chaque instant.
$\sin\beta = \frac{z_2 - z_1}{\mathcal{L}}$
L'énergie cinétique finale est 0. On a donc
$0 = mg\mathcal{L}\sin\alpha + 0 - \frac{1}{2}mv_b^2$ d'où $\boxed{\mathcal{L} = \frac{v_b^2}{2g\sin\alpha}}$

(b) $\boxed{\mathcal{L} = \frac{900}{2\times10\times0{,}1} = 450\,\text{m}}$: ce n'est pas raisonnable et il faut donc utiliser d'autres méthodes de freinage.

(c) Si on prend en compte les frottement, on a une force R_T en plus. Pour la trouver il faut projeter le PFD et déterminer R_N dans un premier temps, on utilise ensuite les lois de Coulomb pour trouver R_T. On trouve (schéma nécessaire) $R_N = mg\cos\alpha$ car le mouvement est parallèle à la piste.
On reprend le raisonnement précédent avec cette fois $W_{nc} = -R_T \times \mathcal{L}$ (travail d'une force constante puisque R_N est constante et que $R_T = \mu R_N$ (cas du glissement). D'où

$$-R_T \times \mathcal{L} = mg\mathcal{L}\sin\alpha + 0 - \frac{1}{2}mv_b^2$$

On remplace ensuite grâce aux lois de Coulomb.

$$-\mu mg\cos\alpha \times \mathcal{L} = mg\mathcal{L}\sin\alpha + 0 - \frac{1}{2}mv_b^2$$

On en déduit cette fois $\mathcal{L} = \frac{\frac{1}{2}v_b^2}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 230$ m. Soit une distance toujours très importante (mais presque deux fois plus courte que sans frottement alors même qu'ils sont faibles).

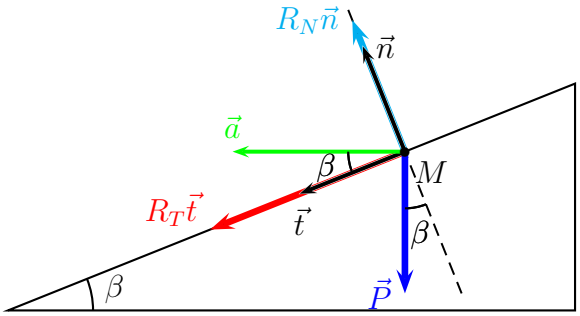
B. Virage circulaire

6. Sur le schéma, la vitesse est tangent à la trajectoire, selon $\vec{u}_\theta$ et l'accélération est selon $-\vec{u}_r$.
Q36 La vitesse en coordonnée cylindro-polaire est ici compte tenu des hypothèses $\vec{v} = \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.
L'accélération est $\vec{a} = -\rho\dot{\theta}^2\vec{u}_r$ or $\dot{\theta} = \frac{V}{\rho}$ donc $\boxed{\vec{a} = -\frac{V^2}{\rho}\vec{u}_r}$

> ***Cette expression de l'accélération en cylindro-polaire est fréquemment utilisé, il faut le savoir et savoir le redémontrer.***

Physiquement l'accélération pointe toujours vers l'intérieur des trajectoires (en tant que dérivée de la vitesse).

7. Pour appliquer la relation fondamentale il **faut** faire un **beau et grand schéma**



Il est très important de repérer où l'on retrouve l'angle β et pour ça il est préférable de faire un dessin avec $0 < \beta \ll \pi/4$. Sur le schéma ci-dessus, on repère très facilement qui est β et qui est $\frac{\pi}{2} - \beta$ ce qui n'est pas le cas de celui de l'énoncé.

Q37

La relation fondamentale de la dynamique donne $m\vec{a} = R_T\vec{t} + R_N\vec{n} + \vec{P}$. Il faut la projeter selon $\vec{t}$ et $\vec{n}$. Il faut donc ici projeter l'accélération et le poids.

$$\boxed{\begin{cases} \text{Selon } \vec{t} : & m\frac{V^2}{\rho}\cos\beta = R_T + mg\sin\beta \\ \text{Selon } \vec{n} : & m\frac{V^2}{\rho}\sin\beta = R_N - mg\cos\beta \end{cases}}$$

Q38 8. En inversant simplement les relations ci-dessus on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} R_T = m\frac{V^2}{\rho}\cos\beta - mg\sin\beta \\ R_N = m\frac{V^2}{\rho}\sin\beta + mg\cos\beta \end{cases}}$$

Q39 9. On écrit l'équation $R_T = 0 = m\frac{V_c^2}{\rho}\cos\beta - mg\sin\beta$ d'où $\boxed{V_c = \sqrt{\rho g \tan\beta}}$

On a alors $\boxed{R_T = m\frac{V^2 - V_c^2}{\rho}\cos\beta}$ en effet $mV_c^2\cos\beta/\rho = mg\sin\beta$

Q40 10. Pour éviter le dérapage, la condition donnée par l'énoncé est $|R_T| < f|R_N|$. On a $V > V_c$ donc $R_T > 0$. De même $R_N > 0$ en tant que somme de termes positifs. Cette remarque nous permet d'enlever les valeurs absolues. La condition est donc simplement $m\frac{V^2}{\rho}\cos\beta - mg\sin\beta < f\left(m\frac{V^2}{\rho}\sin\beta + mg\cos\beta\right)$ d'où en simplifiant par m, en multipliant par ρ et en regroupant les termes faisant apparaitre V :

$$\boxed{V^2(\cos\beta - f\sin\beta) < g\rho(\sin\beta + f\cos\beta)}$$

Ici, l'énoncé passait d'une inégalité stricte à une inégalité large. Cela ne se justifie pas (mais le cas limite n'est en général pas très intéressant en physique car inatteignable).

Q41 11. $V^2 > 0$ et $g\rho(\sin\beta + f\cos\beta) > 0$ donc pour que $V^2(\cos\beta - f\sin\beta) \leqslant g\rho(\sin\beta + f\cos\beta)$ il « suffit » de faire en sorte que $(\cos\beta - f\sin\beta) \leqslant 0$, on aurait ainsi forcément $V^2(\cos\beta - f\sin\beta) \leqslant 0 \leqslant g\rho(\sin\beta + f\cos\beta)$

La condition peut s'écrire plus simplement $\frac{1}{f} \leqslant \tan\beta$ d'où numériquement en utilisant la table $\tan 1{,}3 = 3{,}6 \simeq 1/0{,}3$. L'angle critique vaut donc $1{,}3$ rad soit à peu près 75°.

Q42 12. Si cette inclinaison minimale n'est pas respectée, alors $(\cos\beta - f\sin\beta) > 0$ et on peut donc diviser dans l'inégalité : $\boxed{V \leqslant \sqrt{\rho g \frac{\sin\beta + f\cos\beta}{\cos\beta - f\sin\beta}}}$ Si sa vitesse est trop grande, la luge risque de $\boxed{\text{glisser latéralement et donc de partir taper contre le mur.}}$

Q43 13. En l'absence de frottement latéral, on a forcément $R_T = 0$, d'où par définition de V_c, $\boxed{V = V_c}$. En présence de frottement on a $-f|R_N| < R_T < f|R_N|$ d'où la présence d'une certaine marge autour de V_c.

L'énoncé ne le faisait pas calculer, mais si l'on va trop lentement par rapport à l'inclinaison du virage, on peut aussi glisser vers l'intérieur.