

**Conseils :**

- Ce devoir comporte 3 problèmes indépendants. Lisez attentivement l'énoncé du début à la fin et choisissez **ensuite** par quel problème commencer (aucun ordre n'est imposé).
- Rédigez les problèmes sur **des copies** différentes.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **ré-daction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).  
**Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés.** Laissez une marge à gauche ou à droite pour le correcteur.
- L'usage des **calculatrices est autorisé.**

# I. TRAJECTOIRE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

## 1 Mouvement sans frottement

On étudie le mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$  supposé uniforme ( $g = \|\vec{g}\| = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ ).

Initialement,  $M$  se trouve au sol, en  $O$  l'origine du référentiel  $\mathcal{R}_g$  local considéré galiléen.

À  $t = 0$ , on lui communique une vitesse  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\theta_0 \neq \pm 90^\circ$  avec l'axe horizontal ( $Ox$ ).

On notera ( $Oy$ ) l'axe vertical ascendant tel que  $\vec{v}_0$  appartient au plan  $Oxy$ .

Dans cette partie, on néglige tout frottement.

- Q1 1. Énoncer la seconde loi de Newton ou loi de la quantité de mouvement.
- Q2 2. En déduire les équations horaires du mouvement  $x(t)$  et  $y(t)$  en fonction des données.
- Q3 3. Déterminer l'équation de la trajectoire  $y(x)$ . Quelle est sa nature? Tracer son allure.
- Q4 4. Déterminer la portée  $L_0$  (distance horizontale à laquelle  $M$  retombe sur le sol) en fonction de  $v_0 = \|\vec{v}_0\|$ , de  $\theta_0$ , et de l'accélération de la pesanteur  $g$ .
- Q5 5. Vérifier l'homogénéité de l'expression de  $L_0$  obtenue et vérifier-la sur des cas limites simples que vous choisirez.
- Q6 6. La vitesse initiale étant fixée, quel angle  $\theta_0$  permet d'envoyer le point  $M$  le plus loin possible?

## 2 Trajectoire d'un volant de badminton

Le badminton est un sport dans lequel les joueurs frappent un projectile, appelé volant, à l'aide d'une raquette. Le but de ce problème est de proposer une modélisation simplifiée de la trajectoire du volant sous l'effet conjugué de la pesanteur et de la résistance de l'air, et de confronter le modèle aux résultats d'une expérience. On négligera la poussée d'Archimède dans tout le problème.

On tient compte du freinage de l'air et on écrit la force de freinage sous la forme

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S C_x v \vec{v}$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse du volant et  $v$  sa norme,  $\rho$  la masse volumique de l'air,  $S$  la surface de référence du volant, et  $C_x$  le coefficient de traînée.

- Q7 1. Déterminer la dimension de  $C_x$ .
- Q8 2. Ecrire l'équation différentielle à laquelle obéit le vecteur vitesse  $\vec{v}$  du volant.
- Q9 3. Montrer qu'elle admet une solution particulière  $v_\infty$ , correspondant à un mouvement rectiligne uniforme et dont l'expression est la suivante :

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x}}$$

- Q10 4. Récrire l'équation du mouvement en faisant notamment apparaître le rapport  $\frac{\vec{v}}{v_\infty}$  et  $\vec{g}$ .
- Q11 5. Justifier l'affirmation selon laquelle tant que  $v \gg v_\infty$  on peut négliger le poids du volant devant la force de freinage.
- Q12 6. On suppose dans toute la suite du problème que cette condition est initialement vérifiée. Dans ce cas, quelle est la nature de la trajectoire?
- Q13 7. Simplifier, projeter selon l'axe du mouvement puis intégrer l'équation du mouvement pour montrer que

$$\frac{1}{v(t)} = \frac{1}{v_0} + \frac{gt}{v_\infty^2}$$

- Q14 8. En utilisant cette expression, déterminer et calculer le temps  $t_{1/2}$  pour lequel la vitesse est égale à la moitié de la vitesse initiale.  
Repérer le point correspondant sur la chronophotographie de la figure ci-dessous.

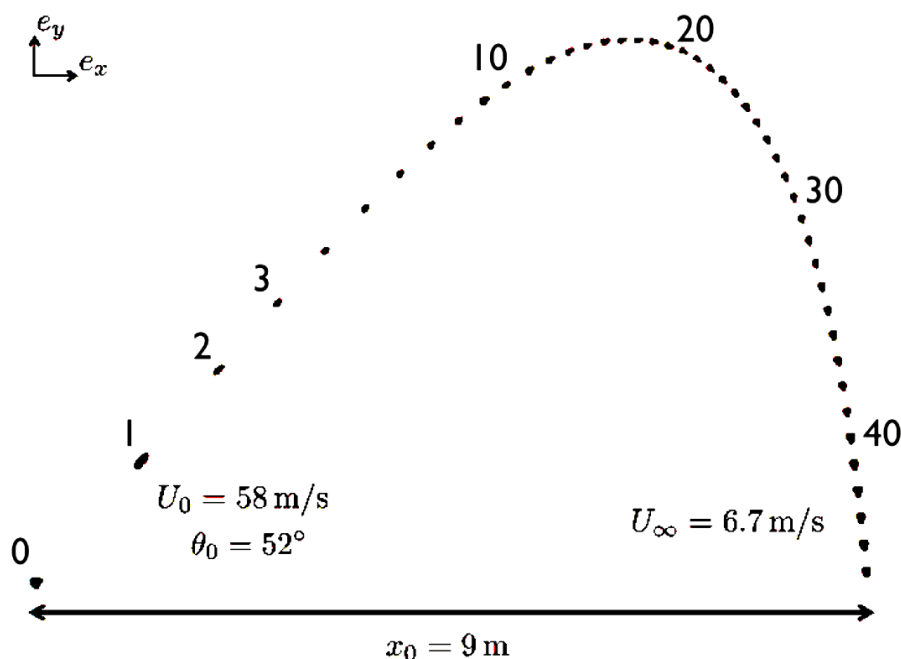
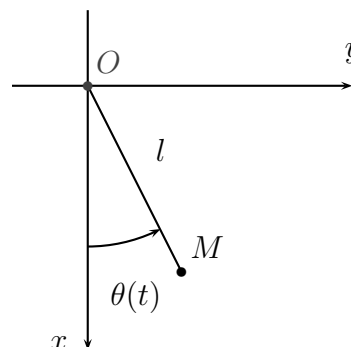


FIGURE 1 – Positions successives du volant de Badminton allant de la gauche vers la droite, enregistré toutes les 50 ms. Le premier point, repéré par le chiffre 0, correspond au lancer à  $t = 0$ . On mesure  $\theta_0 = 52^\circ$ ,  $v_0 = 58 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $v_\infty = 6,7 \text{ m.s}^{-1}$  et une portée de 9 m.

- Q15 Vérifier, par une mesure à expliquer, que la vitesse en ce point est bien approximativement la moitié de la vitesse initiale.
- Q16 9. Toujours dans le cadre de l'approximation  $v \gg v_\infty$ , déterminer l'expression donnant la distance horizontale  $x(t)$  parcourue au temps  $t$ .
- Q17 10. Obtenir  $x$  en fonction de  $v$ .
11. On suppose que l'approximation  $v \gg v_\infty$  cesse d'être valable lorsque la composante verticale de la force de freinage est égale au poids.
- Q18 Quelle est l'expression de  $v$  à cet instant? En déduire la distance horizontale parcourue  $L$ .
12. On modélise la trajectoire du volant en distinguant trois régimes successifs : (1) le régime que l'on vient d'étudier, durant lequel l'accélération de la pesanteur est négligeable ; (2) un régime intermédiaire ; (3) un régime limite durant lequel l'accélération du volant est négligeable.
- Q19 Localiser sur la chronophotographie le régime limite ainsi défini.
- Q20 13. Une approximation de la trajectoire consiste à oublier la partie correspondant au régime intermédiaire. Dessiner l'allure de la trajectoire obtenue dans cette approximation.
- Q21 14. Donner l'expression littérale de la portée du tir dans cette approximation. Comparer à la portée en l'absence de freinage.
- Q22 15. Estimer numériquement la portée du tir. Comparer le résultat avec la valeur indiquée sur la chronophotographie et commenter.

## II. LE PENDULE SIMPLE

On considère une bille (objet ponctuel)  $M$  de masse  $m$  accroché à un point fixe  $O$  par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur  $l$  et de masse négligeable. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre  $\vec{g} = g \cdot \vec{u}_x$  (avec  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ) et  $\vec{u}_x$  un vecteur unitaire de l'axe  $Ox$ . On considère que le référentiel terrestre est galiléen et on ne considère pas les mouvements en dehors du plan  $Oxy$ .



On repère  $M$  par l'angle orienté  $\theta(t)$  entre la verticale et le fil :  $\theta(t) = (\vec{u}_x, \vec{u}_\rho)$  avec  $\vec{u}_\rho$  colinéaire à  $\overrightarrow{OM}$ . On lâche la masse d'un angle  $\theta_0$  sans vitesse initiale.

### Partie A : Oscillateur non amorti

Dans cette partie, on néglige les frottements.

- Q23 1. Définir une base adaptée au problème (figure obligatoire) et donner la position  $\overrightarrow{OM}$ .
- Q24 2. Déterminer l'expression de l'accélération de  $M$  dans la base choisie.
- Q25 3. (a) Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $\theta(t)$ .  
 (b) En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0$  dont on donnera l'expression en fonction de  $l$  et  $g$ .
- Q26
- Q27 (c) En déduire  $\theta(t)$ .
4. Etude énergétique :
- À l'instant  $t = 0$ , le point matériel est lancé de  $M_0$  ( $\theta_0 = 0$ ) avec une vitesse angulaire initiale  $\dot{\theta}_0$ . On suppose que le fil reste tendu pour tout  $t$ . On pose  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .
- Q28 (a) Démontrer que la bille du pendule est un système conservatif.  
 (b) Donner l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  du pendule simple en fonction de  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  en prenant une énergie potentielle de pesanteur  $E_P(\theta)$  nulle au point  $M_0$ . Donner aussi l'expression de  $E_m$  en fonction de  $\dot{\theta}_0$  en justifiant vos réponses.
- Q29
- Q30 (c) Tracer l'allure de  $E_P(\theta)$ .  
 (d) Décrire les mouvements possibles du pendule à partir de  $M_0$  suivant les valeurs de  $\dot{\theta}_0$  en utilisant la courbe de  $E_P(\theta)$ . Pour quelles valeurs de  $\dot{\theta}_0$  a-t-on un mouvement borné?
- Q31

### Partie B : Oscillateur amorti

Lorsque l'on enregistre expérimentalement  $\theta(t)$ , on constate que l'amplitude de diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par une force  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ , où  $\vec{v}$  désigne la vitesse du point  $M$ , et  $\alpha$  est une constante positive.

1. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $\theta$ . En se limitant aux petits angles, écrire l'équation sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0$$

- Q32 Donner l'expression de  $\tau$  et son interprétation physique.
2. À quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique? Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation  $\Omega$  et la pseudo-période  $T$  et donner la forme générale de la solution sans déterminer les constantes d'intégration.
- Q33 3. On appelle décroissement logarithmique  $\delta$  la quantité :

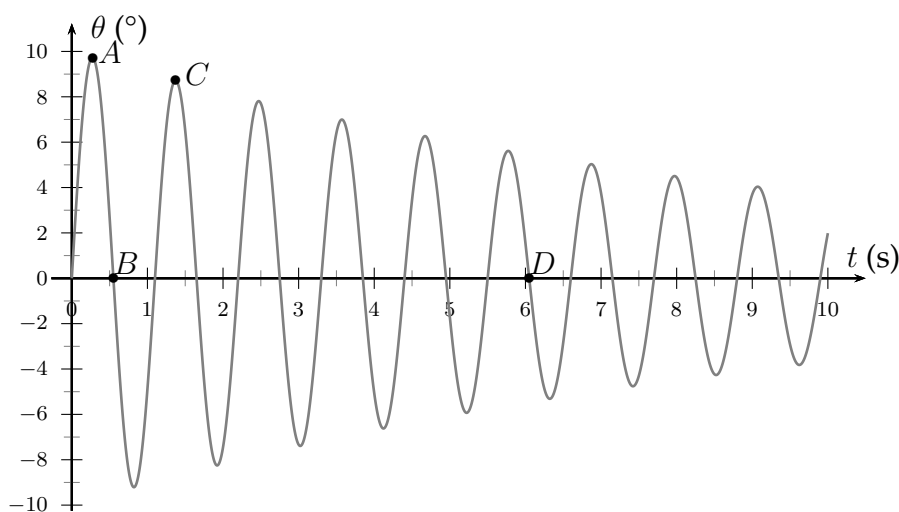
$$\delta = \ln \left( \frac{\theta(t)}{\theta(t + T)} \right)$$

- Q34 où  $T$  est la pseudo-période et  $t$  le temps. Montrez que :  $\delta = \frac{T}{\tau}$
4. La figure ci-dessous représente les variations de  $\theta$  avec le temps. On précise les coordonnées de 4 points particuliers :

Points	A	B	C	D
$t(s)$	0,28	0,55	1,38	6,05
$\theta(^{\circ})$	9,73	0	8,72	0

La masse est  $m = 470$  g. A partir des valeurs expérimentales, calculer numériquement :

- (a) la pseudo-période  $T$ ,
- (b) le décroissement logarithmique  $\delta$ ,
- (c) le temps  $\tau$ ,
- Q35 (d) la constante  $\alpha$ .



### III. CIRCUITS INDUCTIFS (SUITE)

#### C. Réponse du circuit au branchement d'un condensateur

On reprend le circuit du devoir précédent auquel on a adjoint un condensateur idéal de capacité  $C$  en série avec un interrupteur idéal  $K'$  (figure 3).

$K$  est fermé depuis assez longtemps pour que le circuit ait atteint le régime permanent.

On suppose que  $C$  est initialement déchargé. À l'instant  $t = 0$ , on ferme  $K'$ .

Applications numériques :  $L = 0,1 \text{ H}$ ;  $C = 200 \mu\text{F}$ ;  $r = 10 \Omega$ ;  $R = 50 \Omega$ ;  $E = 12 \text{ V}$ .

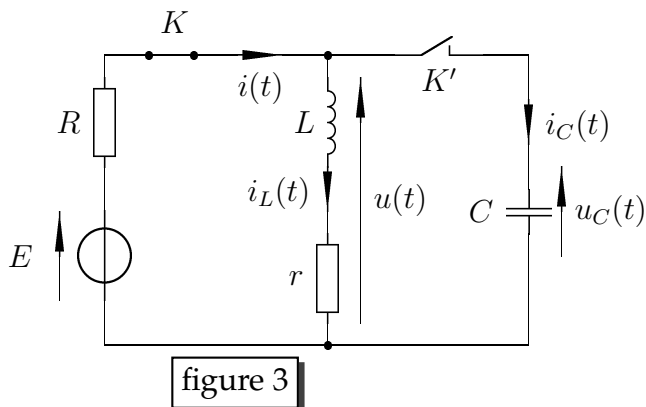


figure 3

1. Déterminer, **en justifiant** chaque réponse, les expressions de  $u$ ,  $i$ ,  $i_L$  et  $i_C$ , définies sur le schéma ci-dessus,

- Q36 (a) juste avant la fermeture de  $K'$  (à  $t = 0^-$ ),
- Q37 (b) puis juste après la fermeture de  $K'$  (à  $t = 0^+$ )
- Q38 (c) et enfin au bout d'un temps suffisamment long pour atteindre à nouveau un régime permanent.

	$u$	$i$	$i_L$	$i_C$
à $t = 0^-$				
à $t = 0^+$				
pour $t \rightarrow \infty$				

Résumer ensuite les résultats obtenus en reproduisant et en complétant (expression et valeur numérique) le tableau ci-contre.

2. On cherche à établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $i_L(t)$ .

- Q39 (a) Écrire la loi des mailles dans la maille de gauche du circuit représenté figure 3. Se ramener à une équation différentielle liant  $i_C$ ,  $i_L$  et des constantes (équation 1).
- Q40 (b) Rappeler la relation constitutive du condensateur et celle de la bobine réelle. En déduire la relation liant  $i_C$  aux dérivées temporelles de  $i_L$  (équation 2).
- Q41 (c) En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $i_L(t)$ .

3. Exprimer alors en fonction de  $r$ ,  $R$ ,  $L$  et  $C$  la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  de ce circuit.

Q42 4. Montrer que le circuit évolue en régime pseudo périodique.

Q44 5. Déterminer la valeur de  $\frac{di_L(t)}{dt}$  à  $t = 0^+$ .

Q45 6. Tracer l'allure du graphe  $i_L(t)$ .

Q46 7. On pose  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ , déterminer l'expression littérale puis numérique de  $i_L(t)$ .

# I. TRAJECTOIRE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

Adapté de X - ENS PC 2015

## 1 Mouvement sans frottement.

Q1

1. Seconde loi de Newton : “En référentiel galiléen, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d’un système est égale à la somme vectorielle des forces extérieures qui lui sont appliquées”.

*Enoncez bien la loi, sans oubliez la condition de référentiel galiléen*

Q2

2. On procède avec méthode :

① On étudie ici le système { point matériel  $M$  de masse  $m$  } dans le référentiel lié au sol et considéré comme galiléen. On munit ce référentiel de la base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , son origine est le point  $O$  où se situe  $M$  à  $t = 0$  (Cf figure ci-dessous).

Dans la base cartésienne fixe, la quantité de mouvement du système est  $m \cdot \vec{v} = m \cdot (\dot{x} \cdot \vec{e}_x + \dot{y} \cdot \vec{e}_y)$  à tout instant. Sa dérivée temporelle est donc  $m \cdot (\ddot{x} \cdot \vec{e}_x + \ddot{y} \cdot \vec{e}_y)$ .

② Dans le cadre des hypothèses proposées, il est uniquement soumis à son poids  $\vec{p} = m \cdot \vec{g} = -mg \cdot \vec{e}_y$ .

③ Par application de la seconde loi de Newton,  $\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{p}$  où  $\vec{p}$  est le poids.

④ Par projection dans la base cartésienne,

$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = -mg \cdot \vec{e}_z \Rightarrow \ddot{x} \cdot \vec{e}_x + \ddot{y} \cdot \vec{e}_y = -g \cdot \vec{e}_y \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = C_1 \\ \dot{y}(t) = -gt + C_2 \end{cases}$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d’intégration qu’on détermine en utilisant l’expression initiale de la vitesse :  $\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta_0 \cdot \vec{e}_x + v_0 \sin \theta_0 \cdot \vec{e}_y = \dot{x}(0) \cdot \vec{e}_x + \dot{y}(0) \cdot \vec{e}_y = C_1 \cdot \vec{e}_x + (0 + C_2) \cdot \vec{e}_y$  soit  $C_1 = v_0 \cos \theta_0$  et  $C_2 = v_0 \sin \theta_0$ . On intègre à nouveau par rapport au temps

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos \theta_0 \\ \dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin \theta_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \theta_0 + C_3 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta_0 + C_4 \end{cases}$$

On utilise cette fois les conditions initiales sur la position pour déterminer les constantes d’intégration  $C_3$  et  $C_4$ . En effet,  $x(0) = 0 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0$  et  $y(0) = 0 + 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$ .

On a donc finalement  $x(t) = v_0 t \cos \theta_0$  et  $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta_0$ .

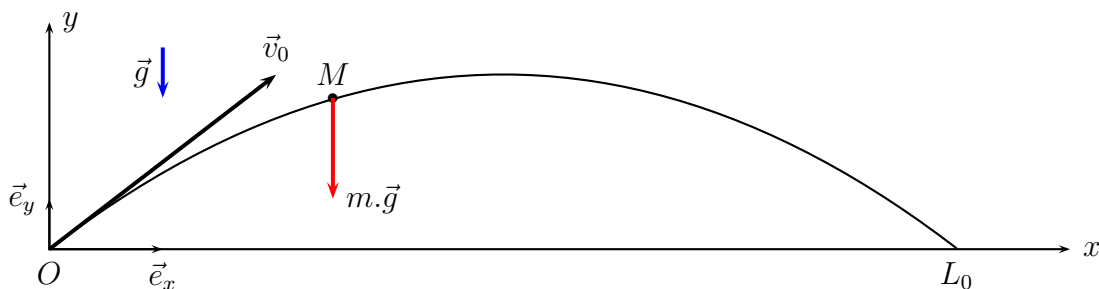
*Inadmissible de perdre des points sur cette partie*

3. Comme  $\theta_0 \neq \pm \frac{\pi}{2}$ , on peut isoler  $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0}$  à partir de la première équation horaire et en reportant dans la seconde équation horaire on obtient

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} + \frac{v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta_0} x \Rightarrow y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} + x \tan \theta_0$$

Q3

Il s’agit d’une parabole dont on trace l’allure ci-dessous.



4. La portée  $L_0$  est la valeur non nulle de  $x$  pour laquelle  $y = 0$  soit

Q4 
$$0 = -\frac{gL_0}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} + \tan \theta_0 \Rightarrow L_0 = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g} \Rightarrow \boxed{L_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0}$$

Remarque : Simplifiez le résultat, ne laissez pas du  $2 \cos^2 \tan$ . Cela facilitera les calculs suivants.

Remarque2 : A-t-on réellement besoin de calculer le discriminant pour résoudre  $x(x-1) = 0$  ... ?

Q5 5. On vérifie que  $\boxed{[L_0] = \frac{[v_0]^2}{[g]} = \frac{L^2 \cdot T^{-2}}{L \cdot T^{-2}} = L}$ , c'est bien homogène. De plus, on obtient bien une portée nulle si  $\theta$  tend vers 0 ou  $90^\circ$ , c'est bien cohérent.

*Vérifiez l'homogénéité et la cohérence ne doit vous poser aucun problème.*

On pouvait de plus observer que si on lance l'objet plus vite ou dans une gravité moindre, il tombe plus loin.

Q6 6.  $L_0$  est maximale lorsque  $\sin 2\theta_0 = 1$  donc pour  $\boxed{\theta_0 = 45^\circ}$ .

*Justifiez vos réponses*

Remarque : Beaucoup ont dit "sin x cos est maximal lorsque sin = cos"! Quel théorème est-ce? il est facile de trouver de très nombreux contre-exemples.

## 2 Trajectoire d'un volant de badminton

1. Pour déterminer la dimension de  $C_x$ , on part de l'expression donnée

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S C_x v \vec{v} \Rightarrow [C_x] = \frac{[F]}{[\rho] \cdot [S] \cdot [v]^2} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{M \cdot L^{-3} \cdot L^2 \cdot L^2 \cdot T^{-2}} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{M \cdot L \cdot T^{-2}} = 1$$

Q7 On en déduit que  $\boxed{C_x \text{ est sans dimension}}$ .

*Revoir l'analyse dimensionnelle si nécessaire.*

2. À nouveau, soyons méthodiques :

- ① On travaille sur le système { Volant  $M$  de masse  $m$  }
- ② On garde le référentiel lié au sol considéré comme galiléen.



- ③ Le système est soumis à son poids  $m\vec{g}$  et à la force de frottement  $\vec{F}$ .
- ④ Par application de la seconde loi de Newton,

Q8

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{g} + \vec{F} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{\rho S C_x v \vec{v}}{2m}}$$

*Lisez bien l'énoncé, on demandait une équation vectorielle, il ne faut donc PAS projeter*

3. L'équation précédente est une équation différentielle dont la solution particulière est constante. On détermine cette constante  $\vec{v}_\infty$  en reportant dans l'équation précédente,

Q9

$$\vec{0} = \vec{g} - \frac{\rho S C_x v_\infty \vec{v}_\infty}{2m} \Rightarrow v_\infty \vec{v}_\infty = \frac{2m\vec{g}}{\rho S C_x} \quad \text{d'où en norme} \quad \boxed{v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{v}_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_x}} \frac{\vec{g}}{\|\vec{g}\|}}$$

*Attention aux expressions de  $v_\infty$  où il reste du  $v$  !*

C'est un peu comme avoir une équation du type  $x^2 = 2$  et de dire "donc la solution est  $2/x$ ".

4. De l'expression précédente on tire  $\rho S C_x = \frac{2mg}{v_\infty^2}$  et en reportant dans l'équation différentielle on obtient directement

Q10

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{g \cdot v \vec{v}}{v_\infty^2}}$$

5. Tant que  $v \gg v_\infty$  on peut négliger  $g$  devant  $\frac{g \cdot v \vec{v}}{v_\infty^2}$  dans l'équation du mouvement, comme si on n'avait pas tenu compte du poids.

Q11

Donc, en effet on peut alors négliger le poids devant la force de freinage.

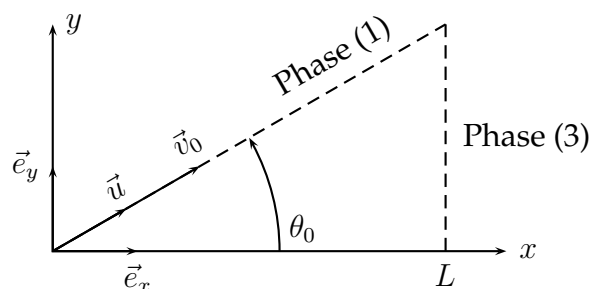
6. Si on néglige le poids, la seule force appliquée est la force de freinage qui s'oppose à tout instant à  $\vec{v}$ , on aura alors affaire à un mouvement rectiligne décéléré.

Q12

7. On écrit donc l'équation précédente simplifiée, c'est à dire en négligeant le terme  $\vec{g}$  devant les autres.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{g \cdot v \vec{v}}{v_\infty^2}$$

Le mouvement est rectiligne (Cf figure ci-dessous, Phase (1))



On pose le vecteur unitaire  $\vec{u}$  défini par que  $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{u}$  on a  $\vec{v} = v(t) \cdot \vec{u}$  à tout instant.  
L'équation se projète alors simplement selon  $\vec{u}$  :

$$\Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} \cdot \vec{u} = -\frac{g \cdot v^2}{v_\infty^2} \cdot \vec{u} \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{g \cdot v^2}{v_\infty^2} \Rightarrow \frac{dv(t)}{v^2} = -\frac{g}{v_\infty^2} dt \Rightarrow \frac{1}{v(t)} = \frac{g}{v_\infty^2} t + Cte$$

Q13

Comme à  $t = 0$  on  $v(t) = v_0$ , on en déduit  $Cte = \frac{1}{v_0}$  et on retrouve bien  $\boxed{\frac{1}{v(t)} = \frac{1}{v_0} + \frac{gt}{v_\infty^2}}$

Autre manière légèrement différente de résoudre la même équation :

$$\frac{-v_\infty^2}{v^2(t)} \frac{dv}{dt} = g \Rightarrow \int_{t=0}^t \frac{-v_\infty^2}{v^2(t')} \frac{dv}{dt} dt' = \int_{t=0}^t g dt' \Rightarrow \left[ \frac{v_\infty^2}{v(t)} \right]_{t=0}^t = gt \Rightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v(t=0)} = \frac{gt}{v_\infty^2}$$

8. On a  $v = \frac{v_0}{2}$  pour  $t = t_{1/2}$  tel que  $\frac{2}{v_0} = \frac{1}{v_0} + \frac{gt_{1/2}}{v_\infty^2} \Rightarrow \boxed{t_{1/2} = \frac{v_\infty^2}{gv_0}}$

Avec les valeurs indiquées sur la chronophotographie :  $v_\infty = 6,7 \text{ m.s}^{-1}$  et  $v_0 = 58 \text{ m.s}^{-1}$  on calcule  $t_{1/2} \simeq 8 \cdot 10^{-2} \text{ s} = 80 \text{ ms}$  c'est à dire  $\boxed{\text{entre les points 1 et 2}}$  puisque les positions sont repérées tous les 50 ms.

Q14

**Utilisez les résultats intermédiaires fournis par l'énoncé**

Si la vitesse a diminué d'un facteur 2, les points sont deux fois moins éloignés qu'initialement. On retrouve ce rapport  $\boxed{\text{entre les points 2 et 3}}$  séparés approximativement d'une distance deux fois moins grande qu'entre les deux premiers points, 0 et 1.

Q15

L'ordre de grandeur est donc bon mais on manque de précision.

**Il y des points à prendre sur ce type de question**

9. Le mouvement se fait selon l'axe de vecteur directeur  $\vec{u}$  qui fait un angle  $\theta_0$  avec l'axe horizontal ( $Ox$ ) (Cf figure ci-dessus) et on a donc à tout instant

$$\dot{x}(t) = v(t) \cdot \cos \theta_0 \text{ avec } \frac{1}{v(t)} = \frac{1}{v_0} + \frac{gt_{1/2}}{v_\infty^2} \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\cos \theta_0}{\frac{1}{v_0} + \frac{gt}{v_\infty^2}} = \frac{v_0 \cos \theta_0}{1 + \frac{v_0 gt}{v_\infty^2}}$$

et par intégration,

$$x(t) = \frac{v_\infty^2 \cos \theta_0}{g} \ln \left( 1 + \frac{v_0 gt}{v_\infty^2} \right) + Cte$$

La constante d'intégration est nulle puisque à  $t = 0$  on a  $x(0) = 0$  et

Q16

$$\boxed{x(t) = \frac{v_\infty^2 \cos \theta_0}{g} \ln \left( 1 + \frac{v_0 gt}{v_\infty^2} \right)}$$

**Il ne fallait pas oublier le  $\cos \theta_0$  qui apparaissait lors de la projection.**

10. Il faut maintenant éliminer  $t$  entre  $x(t)$  et  $v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 gt}{v_\infty^2}} \Rightarrow 1 + \frac{v_0 gt}{v_\infty^2} = \frac{v_0}{v(t)}$  et en reportant dans  $x(t)$  on obtient directement

Q17

$$\boxed{x = \frac{v_\infty^2 \cos \theta_0}{g} \ln \frac{v_0}{v}}$$

11. La composante verticale de la force de freinage est  $\|F\| \cdot \sin \theta_0$ . Elle est égale au poids lorsque

$$\frac{1}{2} \rho S C_x v^2 \sin \theta_0 = mg \Rightarrow v = \frac{v_\infty}{\sqrt{\sin \theta_0}}$$

Q18

et en reportant dans  $x(v)$ , on en déduit  $L = \frac{v_\infty^2 \cos \theta_0}{g} \ln \left[ \frac{v_0 \sqrt{\sin \theta_0}}{v_\infty} \right]$ .

12. Lorsque l'accélération est négligeable, le vecteur vitesse est constant ce qui correspond à un mouvement rectiligne uniforme. Les points doivent donc être alignés et régulièrement séparés. Normalement cette partie de la trajectoire doit être verticale. Sur la figure cela se produit à peine pour les tous derniers points, c'est à dire pour  $t > 40 \times 50$  ms soit  $t > 2$  s.

Q19

13. Si on oublie la partie correspondant au régime intermédiaire (2), le mouvement se réduit à un deux mouvement rectilignes : le premier selon  $\vec{v}_0$  et le second vertical, selon  $\vec{g}$ . On obtient donc l'allure représentée sur la figure ci-dessus (Phases (1) et (3)).

Q20

14. Dans cette approximation, la portée du tir est égale à  $L = \frac{v_\infty^2 \cos \theta_0}{g} \ln \left[ \frac{v_0 \sqrt{\sin \theta_0}}{v_\infty} \right]$  calculée précédemment. Elle est inférieure à la portée réelle car on occulte ici la phase (2) pendant laquelle le volant continue à avancer.

Q21

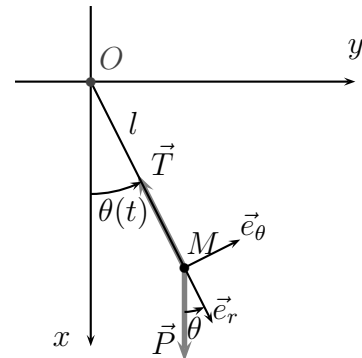
15. L'application numérique avec  $v_0 = 58 \text{ m.s}^{-1}$ ;  $v_\infty = 6,7 \text{ m.s}^{-1}$ ;  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  et  $\theta_0 = 52^\circ$  donne  $L \simeq 5,8$  m (5,7508 arrondi au supérieur). Cette valeur est bien entendu inférieure à celle indiquée sur la chronophotographie puisqu'on a négligé la phase 2 lors de laquelle le volant continue d'avancer.

Q22

## II. LE PENDULE SIMPLE

### Partie A : Oscillateur non amorti

Il est indispensable de faire un schéma pour définir la base polaire. De plus, ce schéma vous aidera pour les projections des forces. Il faut donc le réaliser avec soin. Évitez les angles de  $45^\circ$  pour ne pas confondre  $\theta$  et  $\frac{\pi}{2} - \theta$ .



Q23

1. La base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est adaptée à ce problème (voir schéma ci-contre). On a :  $\overrightarrow{OM} = l\vec{e}_r$ .

Q24

2. Système : bille  $M$  de masse  $m$ . Référentiel :  $\mathcal{R}_T$ , référentiel terrestre local galiléen. On a  $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  et donc  $\vec{a} = -l\dot{\theta}^2\vec{e}_r + l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

Q25

3. (a) Bilan des forces :

— le poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$

— la tension du fil  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$

Appliquons la deuxième loi de Newton à la bille dans  $\mathcal{R}_T$  :  $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$ . Soit en projection

selon  $\vec{e}_\theta$  :  $ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + 0$  d'où  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ . (Remarque, une méthode énergétique fonctionne aussi).

Q26 (b) Pour des angles faibles, c'est-à-dire  $\theta(t) \ll 1$ , on fait l'approximation :  $\sin \theta \simeq \theta$  d'où  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ , soit  $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$  avec  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

Q27 (c) Le mouvement est celui d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0$ , la solution est de la forme  $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . Or  $\theta(t=0) = \theta_0 = A$  et  $\dot{\theta}(t=0) = 0 = B\omega_0$ . D'où  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$

4. Portrait de phase :

Q28 (a) La bille est soumise à son poids qui est une force conservative et à la tension du fil, orthogonale à la trajectoire à tout instant et donc qui ne travaille pas. D'après le théorème de la puissance mécanique (applicable car l'étude est faite dans un référentiel galiléen et que le système étudié est un point),  $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc} = \vec{T} \cdot \vec{v} = 0$ . L'énergie mécanique se conserve, le système est donc conservatif.

(b)  $E_m(\theta) = E_p + E_c$ .  $E_p = -mgx + cte$  d'après le cours (on a  $x$  vertical descendant). D'où  $E_p = -mgl \cos \theta + cte$ . Or  $E_p(\theta = 0) = 0$  d'où  $0 = -mgl + cte$  et finalement  $E_p = mgl(1 - \cos \theta)$ .  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ , or  $\vec{v} = l\dot{\theta}$  d'où  $E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ .

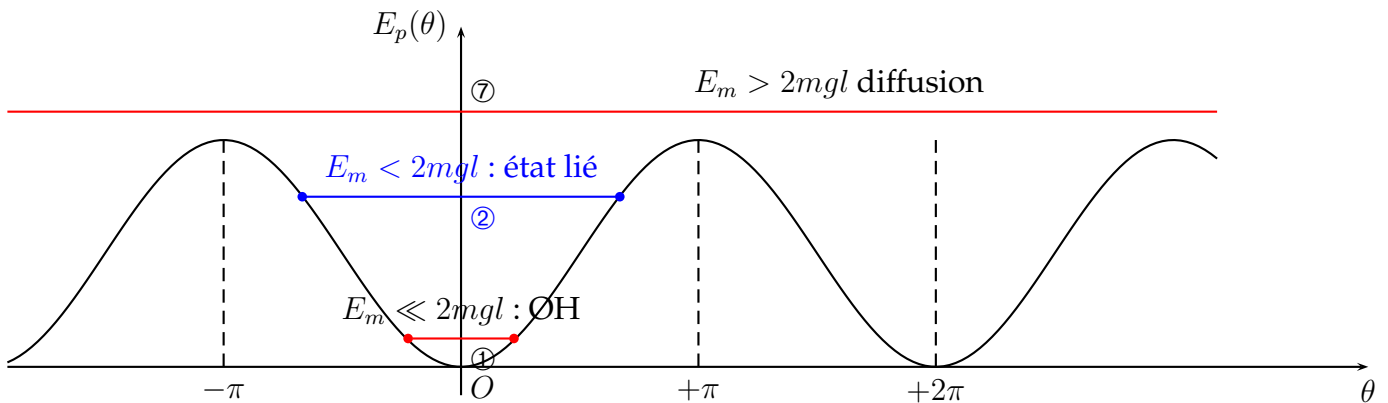
Finalement  $E_m(\theta) = mgl(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ . Or  $E_m(\theta) = cte = E_m(\theta = \theta_0)$  avec

Q29  $E_p(\theta_0) = 0$  d'où  $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2$

Remarque : Attention à l'expression de la vitesse dans l'énergie cinétique, ce n'est pas  $\dot{\theta}$  qui est la vitesse angulaire.

Remarque 2 : Attention à justifier (et à faire proprement) l'énergie potentielle de pesanteur. Ce n'est pas dur à condition d'être méthodique.

(c)  $E_p = mgl(1 - \cos \theta)$



Différents cas en fonction de  $E_m$  :

— Cas 1 :  $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2 < E_{p,MAX}=2mgl$ , c'est-à-dire  $\|\dot{\theta}_0\| < 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ . Dans ce cas, le mouvement est borné (état lié), oscillations.

— Cas 2 :  $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2 > E_{p,MAX}=2mgl$ , c'est-à-dire  $\|\dot{\theta}_0\| > 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ . Dans ce cas, le mouvement est non borné, rotation du pendule.

Q30

(d)  $C_1$  : mouvement périodique sinusoïdal (oscillateur harmonique).  $C_2$  : mouvement périodique non harmonique. Pour ces deux trajectoires, on est dans le cadre du cas 1 ci-dessus.  $C_3$ , il s'agit ici du cas 2 et on a un mouvement de rotation (on tourne toujours dans le même sens).

Q31

**Partie B : Oscillateur amorti**

1. On ajoute la force de frottements dans le bilan des forces. Appliquons la deuxième loi de Newton à la bille dans le référentiel d'étude :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$ , soit en projection selon  $\vec{e}_\theta$  :  $ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - \alpha l \dot{\theta}$ , d'où pour  $\theta \ll 1, \sin \theta \simeq \theta$  :  $ml\ddot{\theta} + mg\theta + \alpha l \dot{\theta} = 0$ . Soit :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

ou encore  $\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$  avec  $2/\tau = \alpha/m$  soit  $\tau = \frac{2m}{\alpha}$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

Q32 Le temps  $\tau$  et la temps caractéristique d'amortissement du mouvement.

2. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est :  $r^2 + \frac{2}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$ . Le régime est pseudo-périodique si le discriminant est négatif :  $\Delta < 0$ . C'est-à-dire  $\Delta = \frac{4}{\tau^2} - 4\omega_0^2 < 0$ , ie  $\omega_0\tau > 1$  (car les deux grandeurs sont positives). Dans ce cas, on peut écrire  $\Delta = (2j\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}})^2 = (2j\Omega)^2$  d'où  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$ , la pseudo pulsation. On en déduit  $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}$  la pseudo-période.

Q33 La forme générale de la solution est :  $\theta(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\Omega t + \varphi)$  ou encore  $\theta(t) = e^{-t/\tau} (B \cos(\Omega t) + C \sin(\Omega t))$ .

3.  $\delta = \ln \left( \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} \right) = \ln \left( \frac{Ae^{-t/\tau} \cos(\Omega t + \varphi)}{Ae^{-(t+T)/\tau} \cos(\Omega(t+T) + \varphi)} \right)$ . Par définition de la pseudo-période  $\Omega T = 2\pi$ , on a donc :  $\cos(\Omega(t+T) + \varphi) = \cos(\Omega t + \varphi)$ . D'où  $\delta = \ln \left( \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} \right) = \ln e^{T/\tau} = \frac{T}{\tau}$

Q34 Remarque : Le résultat étant donné, il faut détailler les justifications

4. (a) la pseudo-période  $T = \frac{t_D - t_B}{5} = \frac{6,05 - 0,55}{5} = 1,1$  s ; utilisez le tableau et plusieurs périodes  
 (b) le décrément logarithmique  $\delta = \ln \frac{\theta_A}{\theta_C} = \ln \frac{9,73}{8,72} = 0,11$  ;  
 (c) le temps  $\tau = T/\delta = \frac{1,1}{0,11} = 10$  s ;  
 (d) la constante  $\alpha = \frac{2m}{\tau} = \frac{2 \times 0,470}{10} = 94 \cdot 10^{-3}$  kg/s.

Q35

**III. CIRCUITS INDUCTIFS**

**C. Réponse du circuit au branchement d'un condensateur**

1. Détermination de  $u, i, i_L$  et  $i_C$  : on représente le circuit équivalent à différents instants :

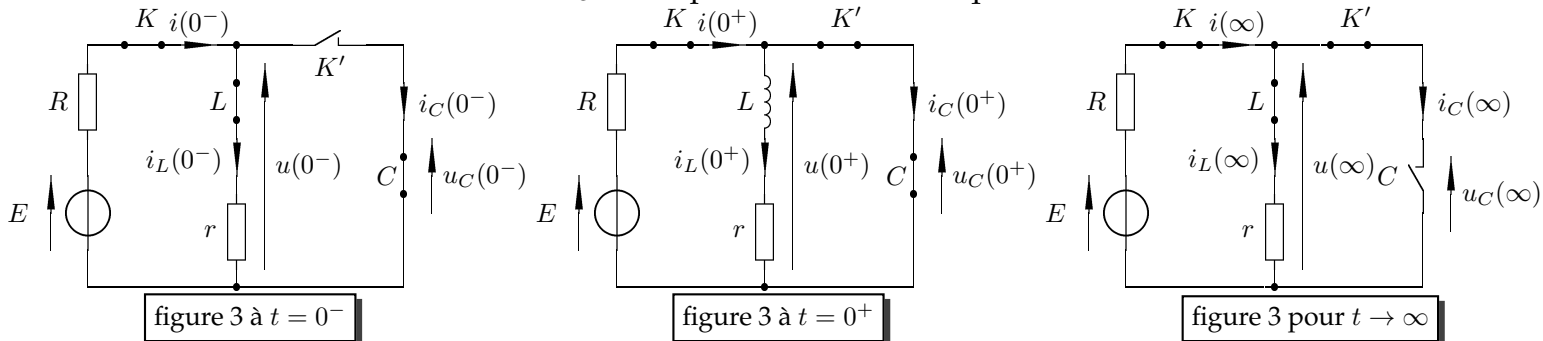


figure 3 à  $t = 0^-$

figure 3 à  $t = 0^+$

figure 3 pour  $t \rightarrow \infty$

(a) à  $t = 0^-$ , c'est-à-dire en régime permanent avec  $K'$  ouvert,  $L$  est équivalent à un interrupteur fermé,  $C$  est déchargé  $u_C = 0$ , il est équivalent à un interrupteur fermé : figure ci-dessus à gauche. On relève directement  $i_C(0^-) = 0$  (car  $K'$  ouvert).

Q36

On se trouve avec un circuit équivalent à une seule maille, la loi de Pouillet implique  $i(0^-) = i_L(0^-) = \frac{E}{R+r}$ . Et enfin  $u(0^-) = r \cdot i_L(0^-) = \frac{rE}{R+r}$  ce qui pouvait être aussi trouvé à l'aide des ponts diviseurs de tensions.

**Remarque :** Attention, certains ont dit que  $u = u_c$  d'après une loi des mailles, mais la tension aux bornes de l'interrupteur est inconnue.

- Q37 (b) À  $t = 0^+$ , on a fermé  $K'$  d'où le circuit représenté ci-dessus au centre. La continuité de  $i_L(t)$  et de  $u_C(t)$  impose déjà  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ ,  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{E}{R+r}$ . On a ensuite  $u(0^+) = u_C(0^+) = 0$  (branches en parallèle maintenant que  $K'$  est fermé). Une loi des mailles sur la maille périphérique implique  $E - R.i(0^+) - u_C(0^+) = 0 \Rightarrow i(0^+) = \frac{E}{R}$  et enfin  $i_C(0^+) = i(0^+) - i_L(0^+) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R+r} = \frac{rE}{R(R+r)}$ .
- (c) Enfin, un régime permanent, comme le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un interrupteur fermé, on aboutit au circuit équivalent représenté ci-dessus à droite. Ce circuit est exactement le même qu'à  $t = 0^-$ , on a donc les mêmes résultats.
- Q38

Les résultats et applications numériques sont reportées dans le tableau ci-dessous.

	$u$	$i$	$i_L$	$i_C$
à $t = 0^-$	$\frac{rE}{r+R} = 2,0 \text{ V}$	$\frac{E}{R+r} = 0,20 \text{ A}$	$\frac{E}{R+r} = 0,20 \text{ A}$	0
à $t = 0^+$	0	$\frac{E}{R} = 0,24 \text{ A}$	$\frac{E}{R+r} = 0,20 \text{ A}$	$\frac{rE}{R(R+r)} = 0,04 \text{ A}$
pour $t \rightarrow \infty$	$\frac{rE}{R+r} = 2,0 \text{ V}$	$\frac{E}{R+r} = 0,20 \text{ A}$	$\frac{E}{R+r} = 0,20 \text{ A}$	0

**Remarque :** Des réponses telle que  $i_L = i$  ou  $u = ri_L$  ne peuvent pas convenir! Cela revient à dire «je ne sais pas» car vous répondez en fonction de quelque chose qui n'est pas connu! Ici on pouvait s'en rendre compte lorsque l'on n'était pas capable de faire les applications numériques.

2. Équation différentielle du second ordre vérifiée par  $i_L(t)$ .

(a) Loi des mailles dans la maille de gauche du circuit figure 5 :

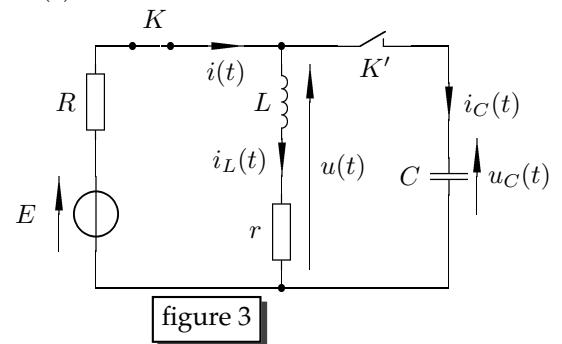
$$E - Ri(t) - L \frac{di_L(t)}{dt} - ri_L(t) = 0 \text{ avec } i(t) = i_L(t) + i_C(t) \text{ d'où l'équation 1 :}$$

Q39 
$$Ri_C(t) + Ri_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} + ri_L(t) = E$$

(b) Relations constitutives :

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt} \text{ et}$$

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} + ri_L(t)$$



Q40 On en déduit l'équation 2 : 
$$i_C(t) = LC \frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + rC \frac{di_L(t)}{dt}$$

(c) En reportant l'équation 2. dans 1., on obtient :  $RLC \frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + RrC \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} + ri_L(t) = E$

Q41 et en regroupant les termes en  $i_L(t)$ , 
$$\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + \left[ \frac{r}{L} + \frac{1}{RC} \right] \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{r+R}{RLC} i_L(t) = \frac{E}{RLC}$$

3. Par identification entre l'équation précédente et la forme canonique  $\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) =$

Q42  $\frac{E}{RLC}$ , on obtient 
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{r+R}{RLC}} \text{ et } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{r}{L} + \frac{1}{RC} = \frac{RC+L}{RLC} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{(r+R)RLC}}{L+rRC}$$

4. L'application numérique donne  $Q \simeq 1,2$ . Comme cette valeur est supérieure à la valeur critique  $\frac{1}{2}$  on a bien affaire à un régime pseudo périodique.

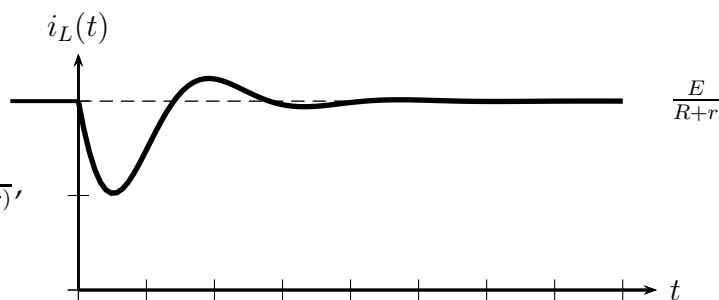
Q43

5. À tout instant,  $u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} + ri_L(t)$  et en particulier à  $t = 0^+$ , en se servant des résultats

Q44 du C.1 (b), on a  $0 = L \left[ \frac{di_L(t)}{dt} \right]_{0^+} + r \frac{E}{R+r} \Rightarrow \left[ \frac{di_L(t)}{dt} \right]_{0^+} = -\frac{rE}{L(R+r)} = -20 \text{ A} < 0$

Q45

6. On a tout ce dont on a besoin pour tracer l'allure du graphe  $i_L(t)$  :  
 la valeur initiale,  $i_L(0^+) = \frac{E}{R+r}$ ,  
 la tangente à l'origine  $[\frac{di_L(t)}{dt}]_{0^+} = -\frac{rE}{L(R+r)}$ ,  
 la valeur en régime perm.  $i_L(\infty) = \frac{E}{R+r}$ ,  
 le type de régime (pseudo périodique avec  $Q \simeq 1,2$ , c'est-à-dire 1 ou 2 oscillations visibles).



7. La solution de l'équation différentielle est de la forme  $sol = sol_H + sol_P$  avec ici  
 —  $sol_H$  solution de l'équation homogène de forme  $(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \exp(-\frac{\omega_0 t}{2Q})$  et  
 —  $sol_P$  une solution particulière (constante ici) :  $\frac{E}{R+r} = i_L(\infty)$ .

$$\Rightarrow i_L(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} + \frac{E}{R+r}$$

$A$  et  $B$  étant 2 constantes déterminées par les conditions initiales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} i_L(0^+) = \frac{E}{r+R} \Rightarrow A = 0 \\ \frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{-rE}{L(r+R)} \Rightarrow B = \frac{-rE}{L\omega(r+R)} \end{array} \right. \Rightarrow i_L(t) = \frac{E}{r+R} \left( 1 - \frac{r}{L\omega} e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \sin \omega t \right)$$

Q46

L'application numérique donne :  $i_L(t) \simeq 0,2 [1 - 0,447 \sin(224t) e^{-100t}]$ .

*Une formule telle que celle-ci « numérique » n'a de sens que si on donne les unités des différentes grandeurs présentes. Ici,  $i(t)$  sera exprimé en A et il est nécessaire que  $t$  soit en s.*