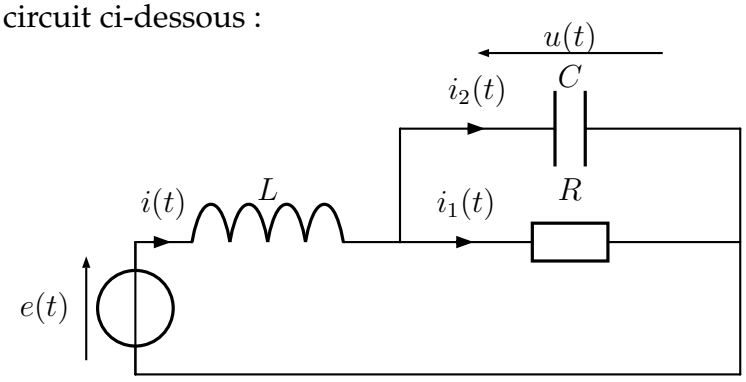
Conseils :

- Ce devoir comporte quatre exercices indépendants.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).

  Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- Changer de page pour un nouvel excercice.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

I. Circuit en régime sinusoïdal forcé

On considère le circuit ci-dessous :



1. (a) En appliquant la loi des nœuds et la loi des mailles, déterminer l'équation différentielle
Q1 vérifiée par la tension u(t). Montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\ddot{u}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 e(t)$$

Q2 (b) Déterminer les expressions de ω_0 et Q.

Q3 2. On se place en régime sinusoïdal forcé, avec $e(t) = E\cos(\omega t)$.
On pose alors $u(t) = U_0\cos(\omega t + \varphi)$.
En utilisant la méthode de la notation complexe, déduire à partir de l'équation de la question 1, l'expression de $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$, ω, ω_0 et Q.

Q4 3. En déduire U_0 et φ en fonction de E, ω, ω_0 et Q.

Q5 4. On propose d'utiliser une autre méthode pour obtenir l'équation différentielle de la question 1). En utilisant le diviseur de tension, déterminer l'expression de $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$, R, L et C.

Q6 5. En déduire l'expression de u en fonction de e, ω, ω_0 et Q et vérifier que l'on retrouve l'équation obtenue à la question 1.

II. GASTON AUX SPORTS D'HIVER

Pour profiter des chutes de neige récentes, Gaston décide de s'offrir une séance de luge à réaction. Gaston est installé sur une luge disposant de deux petites fusées. La masse totale de l'ensemble (supposé ponctuel) est de $m = 120\,\text{kg}$ et les fusées délivrent une puissance totale $\mathcal{P}_{fus} = 1000\,\text{W}$. La phase de poussée où les fusées sont allumées se déroule sur une partie horizontale et sera étudiée dans la première partie. Les phases suivantes (montée d'une côté puis descente) seront étudiées dans les parties suivantes.

On note $g = 9{,}8\,\text{m.s}^{-2}$ l'intensité de pesanteur et on néglige les frottements sur la neige fraîche bien damée.

A. Lancement

Q7 1. Rappeler le lien entre travail et puissance $\mathcal{P}$.

Q8 2. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

Q9 3. Combien de temps sera nécessaire pour que Gaston atteigne une vitesse de $v_A = 20\,\text{m/s}$? Un résultat analytique en fonction des données du problème puis une application numérique sont attendus.

À partir de maintenant, les fusées sont éteintes.

B. Glisse

Dans cette partie on étudie le mouvement de Gaston sur la piste composée d'une portion rectiligne AB et inclinée d'un angle $\alpha = 30\,°$ par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, de rayon $R = 2$ m et d'angle $(BO, OC) = \frac{\pi}{2} + \alpha$ (cf FIGURE 1. ci-dessous). L'orientation positive des angles sera prise dans le sens horaire.

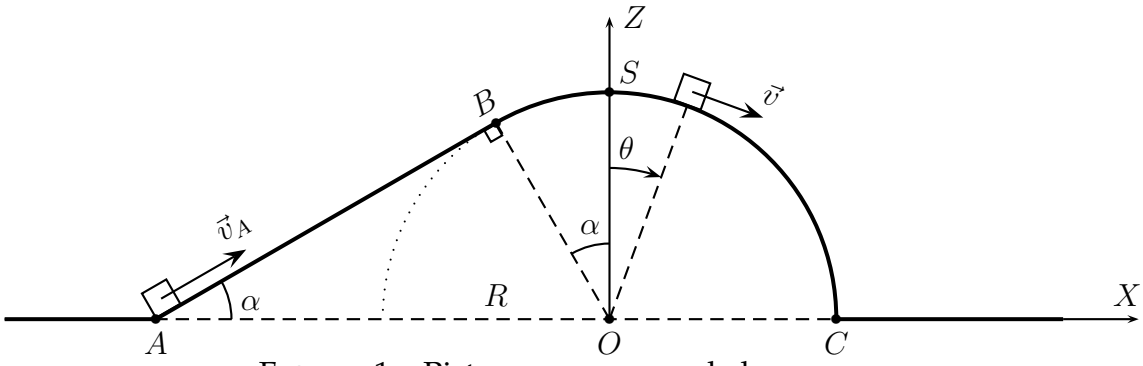


FIGURE 1 – Piste parcourue par la luge.

Gaston part initialement depuis A avec la vitesse $\vec{v}_A$.

1. Portion rectiligne AB.

Q10 (a) Enoncer le théorème de l'énergie mécanique.

(b) En déduire l'expression littérale de la vitesse v_B au point B en supposant que ce point
Q11 est bien atteint.

(c) Afin que B soit effectivement atteint par la luge, il est nécessaire que $v_A > v_{A,l}$.
Q12 Déterminer l'expression littérale puis numérique de $v_{A,l}$.

Pour les questions suivantes, on suppose la condition précédente vérifiée.

2. Portion circulaire BC.

Q13 (a) Enoncer le principe fondamental de la dynamique.

(b) En déduire l'expression en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et des constantes m, g et R de la réaction
Q14 normale $\vec{R}_N$ du support sur M lors de la phase du mouvement sur l'arc BC.

(c) Déterminer la relation liant v, θ, v_B et les constantes du problème. On pourra utiliser une
Q15 méthode énergétique.

Q16 (d) En déduire $\vec{R}_N$ en fonction des constantes, θ et v_A.

(e) À quelle condition sur v_A (expression littérale puis numérique) n'y aura-t-il pas de dé-
Q17 collage de M avant le sommet S ?

(f) La condition précédente étant vérifiée, déterminer l'expression θ_d de θ pour laquelle la
Q18 luge M quitte la piste ?

Q19 (g) La condition précédente étant toujours vérifiée, déterminer l'expression v_d de la vitesse au décollage (c'est-à-dire en θ_d).

III. Mouvement d'une particule chargée

On suppose dans ce problème, que la vitesse des particules chargées est très inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide, ce qui revient à négliger toute correction relativiste. Les effets de la gravitation seront également négligés.

Données :

- charge électrique élémentaire : $e = 1{,}6.10^{-19}$ C.
- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0.10^{8}$ m.s^{-1}.
- perméabilité et permittivité du vide : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H.m^{-1} et $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^{9}}$ F.m^{-1}.

A. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

1. On considère un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Une particule chargée de charge q positive et de masse m pénètre avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ au point O de coordonnées $(0, 0, 0)$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$ perpendiculaire à $\vec{v}_0$ (Figure 1).

Q20 (a) Montrer que la norme de la vitesse de la particule est constante.

Q21 (b) Montrer que la trajectoire est plane.

(c) En se plaçant dans la base de Frenet, donner les expressions de la vitesse et l'accélération
Q22 puis montrer que la trajectoire est circulaire. Montrer que le rayon est égal à :

$$R = \frac{mv_0}{qB}$$

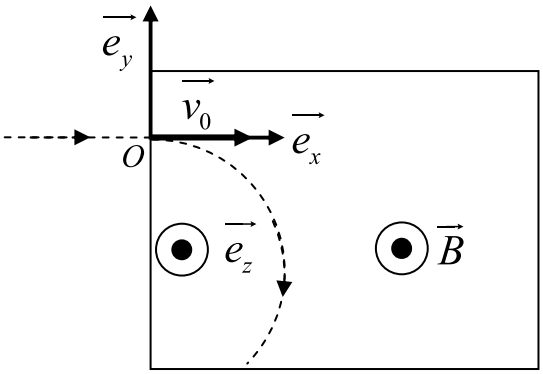


FIGURE 1 – Trajectoire d'une particule de charge q positive dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme.

2. Pour séparer les deux isotopes naturels de l'Uranium (l'uranium 238 et l'uranium 235), il avait été envisagé d'utiliser un spectrographe de masse. Cet appareil comporte trois parties, représentées en Figure 2, où règne un vide poussé.
   Les atomes d'uranium sont ionisés dans une chambre d'ionisation en U^+ (de charge électrique $q_{U^+} = e$) d'où ils sortent par la fente F_1 avec une vitesse négligeable.
   Ces ions sont accélérés par un champ électrostatique uniforme imposé par une tension $W = V_{P_2} - V_{P_1}$ entre les plaques P_1 et P_2.
   Enfin, les ions pénètrent dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ ($B = 0{,}1$ T) perpendiculaire au plan de la figure. Ils décrivent alors deux trajectoires circulaires de rayons R_1 et R_2 et parviennent dans deux collecteurs C_1 et C_2.

Les masses de l'uranium 235 et de l'uranium 238 sont : $m_{U5} = 235$ u.m.a. et $m_{U8} = 238$ u.m.a.. Une unité de masse atomique (u.m.a.) vaut : 1 u.m.a $\simeq 1{,}66.10^{-27}$ kg.

Q23 (a) Quel est le signe de la tension W ? Justifier. On refera le schéma de cette partie spécifique.

(b) Donner l'expression littérale de la vitesse v_{U8} de l'isotope $^{238}U^+$ en F_2, en fonction de e,
Q24 W et m_{U8}. Justifier votre réponse.

(c) Calculer la valeur de la tension W pour que la distance entre les collecteurs C_1 et C_2 soit
Q25 égale à $d = 2$ cm.

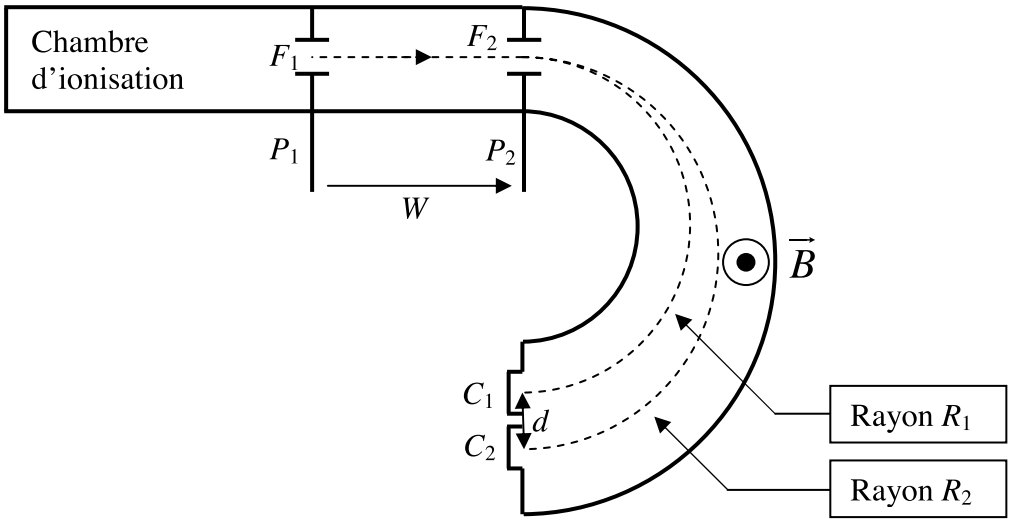


FIGURE 2 – Schéma de principe du spectrographe de masse.

B. Le cyclotron

Le cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 et D_2 dénommés $dees$ et séparés par un intervalle étroit (Figure 3). Un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ ($B = 0{,}1$ T) règne à l'intérieur des $dees$, sa direction est parallèle à l'axe des demi-cylindres.

Un champ électrostatique variable $\vec{E}$ peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les $dees$ en appliquant une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ qui atteint sa valeur maximale $U_m = 10^5$ V lorsque le proton traverse cet espace.

Les protons, de masse $m_P = 1{,}67.10^{-27}$ kg et de charge électrique $q_P = e$, sont injectés au centre du cyclotron avec une énergie cinétique négligeable. Dans chaque dee, ils décrivent des trajectoires demi-circulaires de rayon croissant. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est $R_S = 50$ cm.

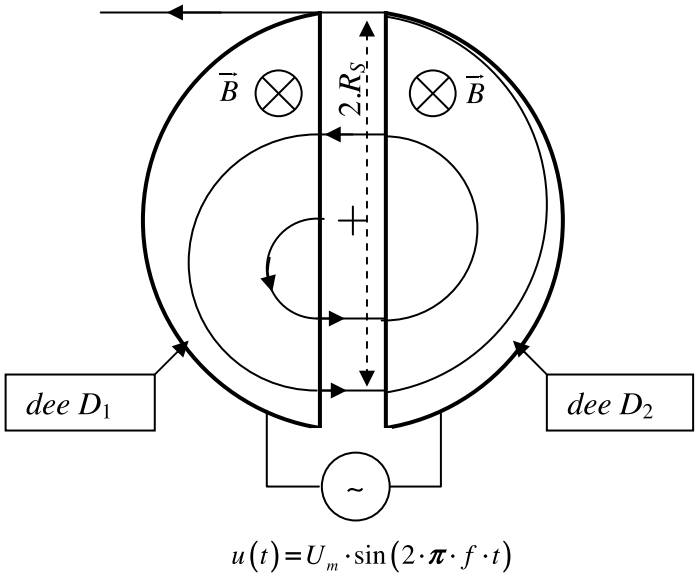


FIGURE 3 – Schéma de principe du cyclotron.

Q26 1. Donner l'expression littérale de la durée $T_{1/2}$ mise par un proton pour effectuer un demi-tour en fonction de m_P, e et B (On pourra se servir d'un résultat de la partie A). Qu'en déduisez-vous ?

Q27 2. Justifier le choix d'une tension $u(t)$ alternative.

Q28 3. En déduire l'expression, puis la valeur de la fréquence f de la tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi f t)$ pour que les protons subissent une accélération maximale à chaque traversée. On négligera le temps de parcours d'un dee à l'autre.

Q29 4. Déterminer l'expression, puis la valeur de l'énergie cinétique E_{CS} des protons à la sortie du cyclotron.

Q30 5. Déterminer l'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de e, R_s, B, m_P et U_m. Effectuer l'application numérique.

6. Puissance rayonnée : pour une particule non relativiste, toute particule chargée de charge q et d'accélération a rayonne une puissance P_r, donnée par la formule de Larmor :

$$P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$$

On rappelle que c est la vitesse de la lumière dans le vide.

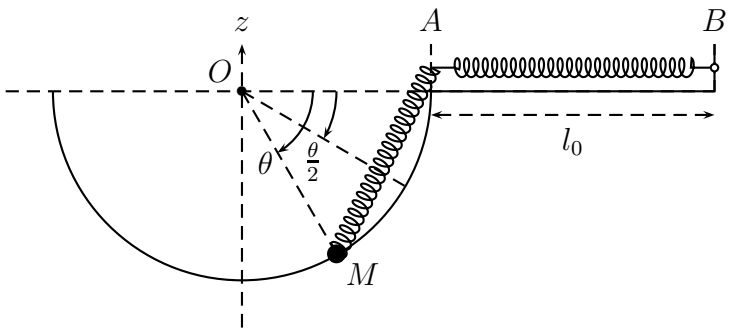
Q31 (a) Montrer qu'une particule chargée de charge q, de vitesse v, qui décrit une trajectoire circulaire uniforme de rayon R, rayonne une puissance P_r de la forme : $P_r = \alpha v^4$. Exprimer le coefficient α en fonction de q, c, μ_0 et R.

Q32 (b) Calculer l'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon $R_S = 50$ cm.

Q33 (c) Conclure.

IV. Mouvement d'une bille dans une rigole

Un point matériel M de masse m dans le référentiel du laboratoire est solidaire d'une rigole circulaire (de centre O et de rayon R) sur laquelle il peut glisser sans frottement. Il est fixé en un point B du plan horizontal par l'intermédiaire d'un élastique modélisé par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Le bord de la rigole est à la distance l_0 du point B.



1. Application de la relation fondamentale de la dynamique :

   (a) Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point matériel. On remarquera que la force exercée par le ressort peut s'exprimer ici simplement $-k\overrightarrow{AM}$ puisque $AB = l_0$. On fera un schéma très clair. Q34

   (b) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique. On attend un raisonnement rigoureux. Q35

   (c) Montrer que θ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\sin\theta - \frac{g}{R}\cos\theta = 0$$

Q36

Q37 (d) Exprimer la réaction normale N en fonction de $\theta(t)$ et de ses dérivées temporelles.

2. Analyse énergétique :

   (a) En introduisant H le projeté du point O sur la droite (AM), donner une expression de l'allongement $X = l - l_0$ du ressort en fonction de R et de $\theta/2$. Q38

   (b) Donner l'expression des différentes énergies potentielles intervenant dans le problème, en fonction de $\theta(t)$. Q39

Q40 (c) Déterminer à partir des énergies potentielles la position d'équilibre θ_0.

   (d) Retrouver l'équation différentielle donnant l'évolution de θ au cours du temps à l'aide d'un raisonnement énergétique. Q41

3. Mouvement autour de la position d'équilibre :

Q42 (a) Dans le cadre des petites oscillations, on pose $\theta(t) = \theta_0 + \epsilon(t)$ avec $\epsilon(t) \ll \theta_0$.

      i. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\epsilon(t)$. On utilisera les approximations suivantes : pour $x \ll 1$, on a $\cos x \simeq 1$ et $\sin x \simeq x$. Q43

Q44 ii. Quelle est la période de ces petites oscillations ?

   (b) On ne suppose plus les oscillations petites.

      i. Tracer $E_{ptot}(\theta)$ en prenant pour échelle 5 cm pour $0{,}125$ J en ordonnée et 4 cm pour 30° en abscisse pour les valeurs numériques suivantes : $m = 50$ g, $g = 10$ m.s^{-2}, $k = 2$ N.m^{-1} et $R = 25$ cm. Q45

      ii. En lâchant la bille sans vitesse initiale depuis le point A, déterminer graphiquement les positions extrêmes atteintes lors du mouvement. On explicitera le raisonnement. Q46

I. CIRCUIT EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

Q1 1. Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$. Loi des mailles : $e = L\frac{di}{dt} + u$.
De plus, $u = Ri_1$ et $i_2 = C\frac{du}{dt}$. D'où :
$e = L\left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right) + u = L\left(\frac{1}{R}\frac{du}{dt} + C\frac{d^2u}{dt^2}\right) + u$ soit $\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{1}{LC}e}$

Q2 Par identification avec la forme canonique donnée, on obtient : $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$ soit $\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$.

Si vous définissez une variable « personnelle », non définie par l'énoncé (par exemple u_L), il vous faut la définir, et la représenter sur un schéma.

Q3 2. Transcrivons l'ED précédente en notation complexe : $(-\omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2)\underline{u} = \omega_0^2\underline{e}$ soit $\boxed{\underline{u} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}\underline{e}}$

Q4 3. Soit en prenant le module : $\boxed{U_0 = \frac{\omega_0^2 E}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\frac{\omega\omega_0}{Q})^2}}}$ puis l'argument $\varphi = -\arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\right)$
$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{(\omega_0^2-\omega^2)Q}{\omega\omega_0}\right)}$

Q5 4. En utilisant le diviseur de tension, $\underline{u} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{jL\omega + \underline{Z}_{eq}}\underline{e} = \frac{1}{1 + jl\omega\underline{Y}_{eq}}\underline{e}$ avec $Y_{eq} = 1/R + jC\omega$
$\boxed{\underline{u} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}\underline{e}}$.

Q6 5. Soit en faisant apparaître les grandeurs demandées : $\underline{u} = \frac{1}{LC}\frac{1}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\frac{1}{RC}\omega}\underline{e} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}\underline{e}$

On a donc : $-\omega^2\underline{u} + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{u} + \omega_0^2\underline{u} = \omega_0^2\underline{e} \Rightarrow \ddot{\underline{u}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{u}} + \omega_0^2\underline{u} = \omega_0^2\underline{e}$ et cette équation, transcrite en notation réelle, redonne bien l'équation différentielle de la question 1.

II. GASTON AUX SPORTS D'HIVER

d'après ENAC Pilotes – 2011

A. Lancement

1. La puissance est liée au travail élémentaire δW par la relation : $\boxed{\mathcal{P} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}}$ où $\mathrm{d}t$ est le temps
Q7 pendant lequel le travail δW s'est exercé.

   On peut ré-écrire cette relation sous la forme $\boxed{W_{A\to B} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t}$ (ou $\delta W = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t$, tout cela est équivalent).

2. Théorème de l'énergie cinétique : en référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail, pendant la même durée, de la
Q8 résultante des forces appliquées à ce point matériel : $\boxed{\Delta E_c(M) = E_{c2} - E_{c1} = W_{1\to 2}(\vec{F})}$
   Remarque : N'oubliez pas "en référentiel galiléen" ni "point matériel"

3. Le système est "Gaston+luge", le référentiel est le référentiel terrestre, le bilan des forces est : poids $\vec{P}$, réaction normale $\vec{R}_N$ du support et force exercée par les fusées $\vec{F}$ (pas de frottement). En utilisant le théorème précédent (le référentiel est galiléen, Gaston + luge n'est pas tout à fait un point, mais comme nous le verrons en mécanique ce théorème est utilisable pour un solide car le travail des forces intérieurs est nul en l'absence de déformation) : $E_{c2} - E_{c1} = W_{1\to 2}(\vec{F}) + W_{1\to 2}(\vec{R}_N) + W_{1\to 2}(\vec{P}) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - 0 = \int_0^{t_A} \mathcal{P}_{fus}(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{P}_{fus}t_A$ car $\mathcal{P}_{fus}$ est constante, le poids et la réaction normale ne travaillent pas car elles sont orthogonales
Q9 au déplacement. On en déduit $\boxed{t_A = \frac{mv_A^2}{2\mathcal{P}_{fus}} = 24\,\mathrm{s}}$

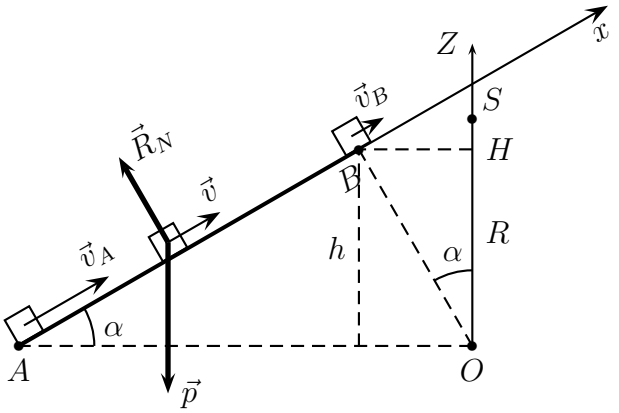
Calculez bien les travaux de toutes les forces explicitement, ne prenez pas simplement la première puissance qui vous tombe sous la main sans vous poser la question de "à quoi elle correspond, est-ce toutes les forces ou une seule ?".

B. Glisse

1. Portion rectiligne AB.

   (a) Théorème de l'énergie cinétique : en référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail, pendant la même durée, des forces non conservatives appliquées à ce point matériel :
Q10 $\boxed{\Delta E_m(M) = E_{m2} - E_{m1} = W_{1\to 2}(\vec{F}_{nc})}$
   Remarque : N'oubliez pas "en référentiel galiléen" ni "point matériel"

   (b) Appliquons le théorème précédent au système { point M } entre les points A et B.



Système : { point M }
Référentiel d'étude : le référentiel terrestre, galiléen (avec une bonne approximation pour ce type de mouvement)
Bilan des forces :

- poids $\vec{p} = m\vec{g}$ (travaille, conservative)
- réaction du support $\vec{R} = \vec{R}_N$ car il n'y a pas de frottement.

Remarque : Tracez la figure (ou la partie utile de celle-ci) et placez-y les forces et les données (R, α ...)

Seul le poids travaille entre A et B car $\vec{R}_N$ est perpendiculaire au mouvement. L'énergie potentielle de pesanteur est $E_p = +mgZ$ car l'axe est orienté vers le haut.

Remarque : Justifiez rapidement $W(\vec{R}_N) = 0$

On a ainsi pour le point M,

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{R}_N) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 + mgZ_B - \frac{1}{2}mv_A^2 - mgZ_A = 0$$

avec $Z_B = R\cos\alpha$ et $Z_A = 0$. $\Rightarrow v_B^2 = v_A^2 - 2gR\cos\alpha$ et $\boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gR\cos\alpha}}$ si le terme sous la racine est positif.

Q11

Remarque : on obtient bien $v_B < v_A$ comme le suggère l'intuition.

(c) Dans le cas limite où $v_A = v_{A,l}$ le palet arrive en B avec une vitesse quasiment nulle.

Q12 On en déduit $v_{A,l}^2 - 2gR\cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{v_{A,l} = \sqrt{2gR\cos\alpha} \simeq 5{,}8\text{m.s}^{-1}}$

Autre manière de voir les choses : il faut que v_B soit défini, or il y a une racine dans l'expression de v_B et il est donc nécessaire que le terme sous la racine soit positif ce qui donne le même résultat.

Il s'agit d'une question où les justifications ont été souvent très critiquables : « il faut que $v_B > 0$ » pourquoi pas $v_B = 0$? « il faut que $v_B \geqslant 0$ » c'est forcément le cas puisque $v_B = \|\vec{v}_B\|$ et qu'une norme est toujours positive.

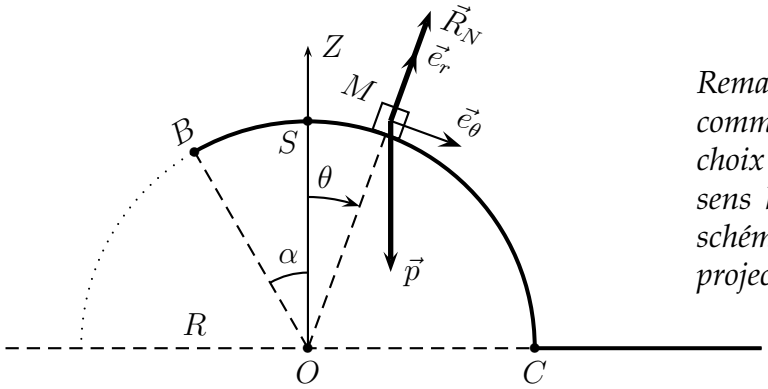
2. Portion circulaire BC.

(a) Principe fondamental de la dynamique : en référentiel galiléen, la dérivé temporelle de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la résultante des forces appliquées à ce point matériel : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m.\vec{v}) = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{F}}$

Q13

Remarque : Il s'agit ici du PFD, sur un point. Dans le cas d'un système, on utilise le théorème de la résultat cinétique. On aurait toujours besoin d'un référentiel galiléen, mais il faut maintenant rajouter les différences suivantes : le système doit être fermé, les forces sont uniquement les forces extérieures et l'accélération à prendre en compte est celle du centre de masse (ou la dérivée de la quantité de mouvement du système, celle-ci étant la somme des quantités de mouvement de chaque point).

(b) Sur la portion circulaire la base polaire est mieux adaptée.



Remarque : Le vecteur $\vec{e}_\theta$ "est orienté" par comme l'orientation positive des angles. Ici le choix a été fait d'orienter les angles dans le sens horaire de façon à ce que $\theta > 0$ sur le schéma ci-contre, ce qui facilite grandement les projections (signes en particuliers).

Le palet M est à nouveau soumis à

- son poids $\vec{p} = m\vec{g} = -mg\cos\theta.\vec{e}_r + mg\sin\theta\vec{e}_\theta$ et à
- la réaction du support $\vec{R} = R_N.\vec{e}_r$

Remarque : Une figure avec les forces est ***obligatoire***.

Par ailleurs, dans la base polaire $\overrightarrow{OM} = R.\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = R\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2.\vec{e}_r$.
Le principe fondamental s'écrit donc ici,

$$m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R}_N \Rightarrow m(R\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2.\vec{e}_r) = -mg\cos\theta.\vec{e}_r + mg\sin\theta\vec{e}_\theta + R_N.\vec{e}_r$$

Q14 soit après projection selon $\vec{e}_r$, $R_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2$ et $\boxed{\vec{R}_N = m[g\cos\theta - R\dot{\theta}^2]\vec{e}_r}$ (Remarque, c'était $\vec{R}_N$ qui était demandé et non R_N).

(c) Pour déterminer l'expression de v cherchée, on peut utiliser le théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E_m = W_{nc}$ où $E_m = E_c + E_p$ est l'énergie mécanique de M et W_{nc} le travail des forces non conservatives.

Remarque : il est souvent plus pertinent d'utiliser le théorème de l'énergie mécanique que celui de l'énergie cinétique lorsque l'on connait les énergies potentielles, ce qui est le cas ici. Cela évite le calcul du travail et facilite généralement les choses.

R_N est la seule force non conservative mais elle ne travaille pas d'où $W_{nc} = 0$.
Quant à $\vec{p}$, elle dérive de l'énergie potentielle $E_p = mgZ + Cte = mgR\cos\theta + Cte$ ici.
Remarque : On peut poser $Cte = 0$ si on veut prendre $E_p = 0$ pour $Z = 0$
Par application du théorème entre $B : (\theta = -\alpha; v = v_B)$ et $M : (\theta; v)$, on peut écrire :

$$E_m(B) - E_m(A) = W_{nc} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR\cos(-\alpha) + Cte - \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos(\theta) - Cte = 0$$

Q15

$$\Rightarrow v^2 = v_B^2 + 2gR(\cos\alpha - \cos\theta) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{v_B^2 + 2gR(\cos\alpha - \cos\theta)}}$$ si le terme sous la racine est défini, c'est à dire si le palet peut atteindre la valeur de θ considérée.

Attention, « il n'y a pas de frottement donc l'énergie mécanique se conserve » est une phrase a priori fausse. En effet, il peut y avoir d'autres forces qui font varier l'énergie mécanique (pensez à un avion où à une voiture, leur énergie mécanique augmente grâce aux moteurs). De même, il peut arriver (et cela dépend du référentiel) que les frottements soient moteurs (pensez à une feuille qui s'envole à cause du vent).

(d) En reportant la relation $v^2 = R^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R^2}$ dans l'expression de $\vec{R}_N$, on obtient

$$R_N = m\left[g\cos\theta - \frac{v^2}{R}\right] = m\left[g\cos\theta - \frac{v_B^2}{R} - 2g\cos\alpha + 2g\cos\theta\right] = m\left[3g\cos\theta - \frac{v_B^2}{R} - 2g\cos\alpha\right]$$

Q16 et comme $v_B^2 = v_A^2 - 2mgR\cos\alpha$, il vient $\boxed{\vec{R}_N = m\left[3g\cos\theta - \frac{v_A^2}{R}\right]\cdot\vec{e}_r}$

On aurait pu en fait calculer directement v en fonction de v_A en appliquant directement le théorème de l'énergie mécanique entre A et M. Pensez à préciser les points entre lesquels vous utilisez le théorème.

(e) Le décollage se produira lorsque R_N s'annule.

D'après le résultat de la question 2.(c), R_N diminue lorsque $\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R^2}$ augmente or sur la portion circulaire BS, v est maximale en B puis diminue.

Ainsi, si le palet doit décoller, entre B et S, ce sera donc en B, c'est à dire en $\theta = -\alpha$.

Remarque : une analyse physique avant le calcul est nécessaire. Ou alors il faut faire des maths proprement.

On cherche donc la valeur limite $v'_{A,l}$ pour laquelle R_N s'annule en $\theta = -\alpha$

$$\Rightarrow 3g\cos(-\alpha) - \frac{{v'_{A,l}}^2}{R} = 0 \Rightarrow v'_{A,l} = \sqrt{3Rg\cos\alpha}$$

Q17 La condition sur v_A est donc $\boxed{v_A < \sqrt{3Rg\cos\alpha} \simeq 7{,}1 \text{ m.s}^{-1}}$

Autre manière de voir la même chose : on veut $\forall\theta \in [-\alpha;0]$; $3g\cos\theta - \frac{v_A^2}{R} > 0 \Rightarrow \forall\theta \in [-\alpha;0]; \sqrt{3Rg\cos\theta} > v_A$

or sur $[-\alpha;0]$ la grandeur $\sqrt{3Rg\cos\theta}$ varie entre $\sqrt{3Rg\cos\alpha}$ et $\sqrt{3Rg}$ donc pour que v_A vérifie l'inégalité $\forall\theta \in [-\alpha;0]$, il faut et il suffit que $\sqrt{3Rg\cos\alpha} = v'_{A,l} > v_A$. (même résultat)

Q18 (f) Le palet quittera la piste en θ_d tel que $R_N = 0 \Rightarrow 3g\cos\theta_d - \frac{v_A^2}{R} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_d = \arccos\left[\frac{v_A^2}{3gR}\right]}$

Remarque : Grâce à la question précédente, on sait que l'argument d'arc-cosinus est bien inférieur à 1, sinon on aurait déjà décollé en S.

(g) Puisque $v = \sqrt{v_A^2 - 2gR\cos\theta}$ (TEM depuis le point A ou question $1b$ et $2c$) et puisque

Q19 $3g\cos\theta_d = \frac{v_A^2}{R} = 0$ (question $2f$) on en déduit que $2gR\cos\theta_d = \frac{2}{3}v_A^2$ et donc que $\boxed{v_d = \frac{v_A}{\sqrt{3}}}$.

III. Mouvement d'une particule chargée

D'après CCP PC 2014

A. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

1. (a) Appliquons le théorème de la puissance cinétique à la particule dans $\mathcal{R}$ galiléen (hypothèses vérifiées : référentiel galiléen et point) :
$\frac{dE_c}{dt} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$. L'énergie cinétique est donc constante. Comme la masse est
Q20 supposée constante, on peut en déduire que $\boxed{\text{la vitesse est constante.}}$

Q21 (b) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la particule dans $\mathcal{R}$ galiléen :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \iff m \begin{vmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 = \\ B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{vmatrix}$$

Soit en projection sur Oz : $m\ddot{z} = 0$. Soit $\dot{z} = cste = 0$ car $v_{0,z} = 0$ puis $z = cste = 0$ car $z_0 = 0$. $\boxed{\text{La trajectoire est donc plane.}}$

Q22 (c) Le mouvement est plan. On peut donc utiliser la base de Frenet comme suggéré :
$\vec{a} = \frac{v_0^2}{\rho}\vec{e}_N + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_T = \frac{v_0^2}{\rho}\vec{e}_N$ d'après la question (a). D'où : $\vec{a} = \frac{v_0^2}{\rho}\vec{e}_N + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_T = \frac{v_0^2}{\rho}\vec{e}_N$ d'après la question (a). D'où :

$$m\frac{v_0^2}{\rho}\vec{e}_N = q\vec{v} \wedge B\vec{e}_z \Rightarrow \|m\vec{a}\| = \|q\vec{v} \wedge \vec{B}\| \Rightarrow m\frac{v_0^2}{\rho} = qvB \quad \text{(norme)}$$

On a $\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\| = qvB$ car $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux (et $q > 0$). On obtient le rayon de courbure : $\boxed{\rho = \frac{mv_0}{qB}}$. Le rayon de courbure étant constant (toutes les grandeurs sont indépendantes du temps), la trajectoire est $\boxed{\text{un cercle}}$ et donc $R = \rho$.

N'oubliez pas de répondre à la question en entier (montrer que la trajectoire est circulaire).

2. (a) Les ions doivent être accélérés entre P_1 et P_2. Ils sont soumis à la seule force électrique entre P_1 et P_2. Les particules ont tendance à descendre les énergies potentielles (pensez à une bille dans un jouet), puisque $E_p = qV$ et que $q > 0$, les particules de charge positive ont tendance à descendre les potentiels électriques (cohérent avec "les charges positives vont du + vers le -"). Puisque l'on va de P_1 vers P_2, c'est que $V(P_2) < V(P_1)$,
Q23 d'où $\boxed{W = V_{P_2} - V_{P_1} < 0}$.

Q24 (b) Si la particule de F_1 avec une vitesse nulle, elle arrive en F_2 avec la vitesse v_{U8} telle que, d'après le théorème de l'énergie mécanique, $E_{m,2} - E_{m,1} = \mathcal{W}_{nc} = 0$ car seule la force électrostatique s'applique et elle est conservative. D'où $E_{m,2} = E_{m,1} \Leftrightarrow E_{c,2} + qV(P_2) = E_{c,1} + qV(P_1) \simeq qV(P_1)$ d'où $\frac{1}{2}m_{U8}v_{U8}^2 = q(V_{P_1} - V_{P_2}) = -qW \Rightarrow \boxed{v_{U8} = \sqrt{\frac{-2eW}{m_{U8}}}}$

Lorsque vous avez des énergies potentielles, le TEM est généralement beaucoup plus «confortable» que le TEC.

(c) Les deux isotopes partent du même point, la distance entre les collecteurs d est donc égale à la différence entre les deux diamètres des trajectoires :

$$d = D_{U8} - D_{U5} = 2(R_{U8} - R_{U5})$$

Attention au facteur 2 ! Faites un schéma et représentez les rayons et d.

En utilisant le lien entre la tension W et la valeur de vitesse en F_2, on obtient :

$$R_{U8} = \frac{mv_{U8}}{eB} = \sqrt{\frac{-2Wm_{U8}}{eB^2}} \quad \text{d'où}$$

$$d = 2(R_{U8} - R_{U5}) = 2\sqrt{\frac{-2mW}{qB^2}}(\sqrt{m_{U8}} - \sqrt{m_{U5}}) \quad \text{d'où} \quad W = -\frac{qd^2B^2}{8(\sqrt{m_{U8}} - \sqrt{m_{U5}})^2}$$

Q25

A.N : $W = -\frac{1{,}6.10^{-19}\times(0{,}02)^2\times 0{,}1^2}{8\times 1{,}66.10^{-27}(\sqrt{238}-\sqrt{235})^2}$ $\boxed{W = -5{,}1 \text{ kV}}$

B. Le cyclotron

Q26 1. La trajectoire circulaire de longueur $L = \pi R$ (un demi-tour) est parcourue à la vitesse constante $v = \frac{eBR}{m_P}$ (calculée ci-dessus) en un temps :

$$T_{1/2} = \frac{L}{v} = \frac{\pi R}{v} \qquad \boxed{T_{1/2} = \frac{\pi m_P}{qB}}$$

Ce temps est indépendant du rayon. On peut donc en déduire que le temps pour effectuer un demi-tour est toujours le même.

Q27 2. On utilise une tension $u(t)$ alternative sinusoïdale pour que le proton soit accéléré de manière optimale. En effet, il faut à chaque demi-tour changer le sens dans lequel on accélère la particule, d'où le fait de changer la tension de signe. De plus, on peut prendre un signal périodique car $T_{1/2}$ est une constante (indépendante de la vitesse ou du rayon).

Q28 3. On a ainsi

$$\frac{T}{2} = T_{1/2} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2T_{1/2}} = \frac{eB}{2\pi m_P}$$

A.N. $f = \frac{1{,}6.10^{-19}\times 0{,}1}{2\pi\times 1{,}67.10^{-27}}$ $\boxed{f = 1{,}5 \text{ MHz}}$

Q29 4. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est R_S. Or on avait $v_S = \frac{eR_SB}{m_P}$ d'où $\boxed{E_{CS} = \frac{1}{2}m_Pv_S^2 = \frac{e^2R_S^2B^2}{2m_P}}$

A.N. : $E_{CS} = \frac{(1{,}6.10^{-19}\times 0{,}5\times 0{,}1)^2}{2\times 1{,}67.10^{-27}}$ $\boxed{E_{CS} = 1{,}91.10^{-14} \text{ J} = 0{,}12 \text{ MeV}}$

Q30 5. Notons $2N$ le nombre de demi-tours effectués (et donc le nombre d'accélérations subies). À chaque accélération, le proton gagne : $\Delta E_C = qU_m$ d'où $\Delta E_{C,2N} = 2NqU_m = E_{CS}$ or $E_{CS} = \frac{e^2R_S^2B^2}{2m_P}$

$$\boxed{N = \frac{eB^2R_S^2}{4m_PU_m}}$$

A.N. : $N = \frac{1{,}6.10^{-19}\times 0{,}1^2\times 0{,}5^2}{4\times 1{,}67.10^{-27}\times 10^5} = 0{,}6$ tour. Puisque l'on ne peut faire qu'un nombre entier ou demi-entier de tour et qu'au bout d'un tour la particule n'est pas encore sortie, alors on fait 1 tour avant de sortir.

Q31

6. (a) Pour une trajectoire circulaire uniforme $a = \frac{v^2}{R}$ d'où

$$\boxed{P_r = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c}\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 = \alpha v^4 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c R^2}}$$

Q32 (b) L'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon est

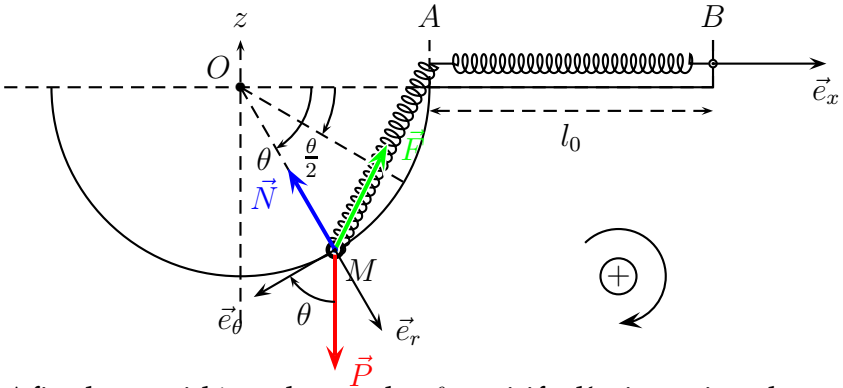
$$E = P_r T_{1/2} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c R^2}\left(\frac{eBR_S}{m_P}\right)^4 \frac{\pi m_P}{eB} = \frac{\mu_0 e^5 B^3 R_S^2}{6c m_P^3}$$

A.N. : Calculons E en eV : $E = \frac{4\pi 10^{-7}(1{,}6.10^{-19})^4 \times 0{,}1^3 \times 0{,}5^2}{6\times 3.10^8 \times (1{,}67.10^{-27})^3} = 3{,}9.10^{-33}$ J $= 2{,}5.10^{-14}$ eV.

(c) Cette énergie rayonnée est négligeable devant l'énergie cinétique de la particule et il est donc raisonnable d'estimer que la perte par rayonnement est nulle, c'est à dire que
Q33 l'énergie de la particule est constante à l'intérieur d'un "dee".

Toujours comparer avec une autre grandeur avant de dire «négligeable». On est négligeable par rapport à un autre terme de même dimension (dans une somme ou une différence, jamais dans un produit).

IV. Mouvement d'une bille dans une rigole



Afin de considérer des angles θ positifs, l'orientation des angles est faite selon le sens horaire. Cette hypothèse était faite implicitement par l'énoncé.

1. Application de la relation fondamentale de la dynamique :

Q34 (a) Puisque $AB = l_0$, alors $AM = l - l_0$ et donc la force exercée par le ressort est $-k\overrightarrow{AM}$ comme indiqué par l'énoncé. La masse m est soumise à :
- ➢ son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$;
- ➢ la réaction de la rigole, normale à la rigole puisque l'on ne prend pas en compte les frottements $\vec{N} = -N\vec{e}_r$;
- ➢ la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\overrightarrow{AM}$.

Voir schéma.

(b)
- ➢ Système : le point matériel M de masse m
- ➢ Référentiel : le référentiel lié à la rigole, qui sera considéré comme galiléen.
- ➢ Bilan des forces et schéma : ci-dessus

Q35 Puisque le référentiel est galiléen,on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique au système, ce qui donne $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{N}$

(c) Il faut projeter le PFD de façon à faire disparaitre $\vec{N}$, c'est-à-dire selon $\vec{e}_\theta$. L'accélération vaut $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$. D'après le schéma $\vec{P}\cdot\vec{e}_\theta = +P\cos\theta$ (pensez à vérifier en $\theta = 0$). $\vec{N}\cdot\vec{e}_\theta = 0$. La projection de $\vec{F}$ est un peu plus délicate. Une bonne solution est de décomposer $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = -R\vec{e}_x + R\vec{e}_r$ et donc $\vec{F} = -k(-R\vec{e}_x + R\vec{e}_r)$ d'où $\vec{F}\cdot\vec{e}_\theta = kR\vec{e}_x\cdot\vec{e}_\theta = -kR\sin\theta$.

Q36 La projection du PFD selon $\vec{e}_\theta$ donne donc

$$mR\ddot{\theta} = -kR\sin\theta + mg\cos\theta + 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\sin\theta - \frac{g}{R}\cos\theta = 0}$$

Q37 (d) Il faut cette fois projeter le PFD selon $\vec{e}_r$: $\vec{P}\cdot\vec{e}_r = P\sin\theta$; $\vec{N}\cdot\vec{e}_r = -N$ et $\vec{F}\cdot\vec{e}_r = kR\vec{e}_x\cdot\vec{e}_r - kR = kR(\cos\theta - 1)$ La projection du PFD donne donc cette fois $-mR\dot{\theta}^2 = kR(\cos\theta - 1) + mg\sin\theta - N \Rightarrow \boxed{N = kR(\cos\theta - 1) + mg\sin\theta + mR\dot{\theta}^2}$

2. Analyse énergétique :

Q38 (a) Dans le triangle AOH rectangle en H $AH = R\sin\frac{\theta}{2}$ donc $\boxed{AM = 2R\sin\frac{\theta}{2}}$ (on utilise le fait que le triangle AOM est isocèle donc OH est à la fois la hauteur, la médiatrice et la bissectrice).

Q39 (b) $\vec{N}$ est orthogonal au déplacement à chaque instant et ne travaille donc pas. $\vec{P}$ dérive de l'énergie potentielle $E_{p,pes} = mgz \Rightarrow \boxed{E_{p,pes} = -mgR\sin\theta}$.

D'après le cours $\vec{F}$ dérive de l'énergie potentielle $E_{p,el} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 \Rightarrow \boxed{E_{p,el} = 2kR^2\sin^2\frac{\theta}{2}}$.

On peut éventuellement linéariser ce dernier résultat en utilisant la forme $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ d'où $\boxed{E_{p,el} = kR^2(1-\cos\theta)}$ (cela facilitera la dérivée dans la question suivante).

Q40 (c) D'après le cours on a une position d'équilibre si l'on a un minimum d'énergie potentielle. Ici $E_p = E_{p,pes} + E_{p,el} = -mgR\sin\theta + kR^2(1-\cos\theta)$. On cherche à résoudre l'équation $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$ soit $-mgR\cos\theta_0 + kR^2\sin\theta_0 = 0$ d'où $\tan\theta_0 = \frac{mgR}{kR^2}$ soit $\boxed{\theta_0 = \arctan\frac{mg}{kR}}$.

La condition d'équilibre est généralement mal connue, il faut la revoir. Si E_p dépend d'un paramètre d'espace x, alors la condition d'équilibre est « $E_p(x)$ admet un minimum (eq. stable)ou un maximum (eq. instable) » . On cherche donc généralement les positions d'équilibre en résolvant l'équation $\frac{dE_p}{dx} = 0$. Le temps ne doit pas intervenir. Une condition telle que $E_p(x) = 0$ est absurde puisque les énergies potentielles sont définies à une constante près.

Q41 (d) On est en référentiel galiléen, le système est un point matériel : on peut appliquer le théorème de la puissance mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc} = 0$ puisqu'ici aucune force non conservative ne travaille. Or $E_m = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 - mgR\sin\theta + kR^2(1-\cos\theta)$ d'où $0 = \frac{dE_m}{dt} = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}(-mgR\cos\theta + kR^2\sin\theta)$ soit en divisant par $\dot{\theta} \neq 0$ (solution où la particule est immobile)

$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\cos\theta + \frac{k}{m}\sin\theta = 0}$ ce qui correspond à l'équation différentielle précédemment obtenue.

3. Mouvement autour de la position d'équilibre :

Q42 (a) (Numérotation de question inutile).

Q43 i. $\ddot{\epsilon} = \ddot{\theta}$ donc $0 = \ddot{\epsilon} + \frac{k}{m}\sin(\theta_0+\epsilon) - \frac{g}{R}\cos(\theta_0+\epsilon) = \ddot{\epsilon} + \frac{k}{m}(\sin\theta_0\cos\epsilon + \cos\theta_0\sin\epsilon) - \frac{g}{R}(\cos\theta_0\cos\epsilon + \sin\theta_0\sin\epsilon) = \ddot{\epsilon} + \frac{k}{m}\cos\theta_0\epsilon + \frac{k}{m}\sin\theta_0 - \frac{g}{R}\cos\theta_0 - \frac{g}{R}\sin\theta_0\epsilon)$. Or d'après l'équation à laquelle obéit θ_0, $-mgR\cos\theta_0 + kR^2\sin\theta_0 = 0$ d'où la simplification

$$0 = \ddot{\epsilon} + \frac{k}{m}\cos\theta_0\epsilon + \frac{g}{R}\sin\theta_0\epsilon \Rightarrow \boxed{0 = \ddot{\epsilon} + \left(\frac{k}{m}\cos\theta_0 + \frac{g}{R}\sin\theta_0\right)\epsilon} = \ddot{\epsilon} + \frac{k}{m}\cos\theta_0(1 + \frac{mg}{kR}\tan\theta_0)\epsilon$$

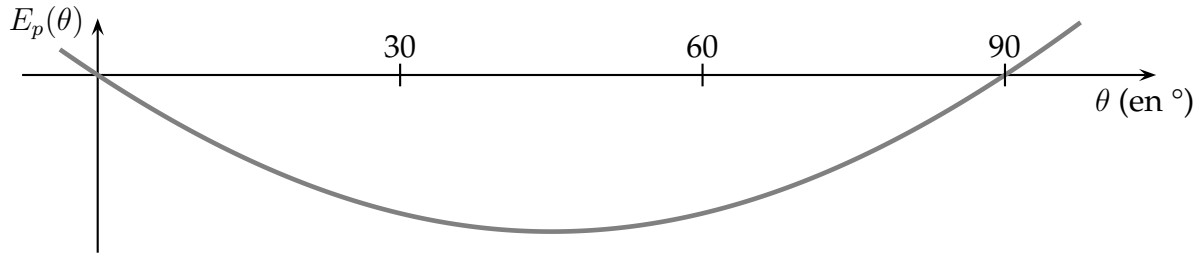
On peut éventuellement le ré-écrire :

$$\boxed{0 = \ddot{\epsilon} + \frac{k}{m}\cos\theta_0(1+\tan^2\theta_0)\epsilon = \ddot{\epsilon} + \frac{g}{R}\sin\theta_0(\frac{1}{\tan^2\theta_0} + 1)\epsilon}$$

Q44 ii. L'équation est de la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\cos\theta_0(1+\tan^2\theta_0)}$ et la période est donc $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k\cos\theta_0(1+\tan^2\theta_0)}}}$

(b) On ne suppose plus les oscillations petites.

Q45 i. D'après les questions précédentes $E_p = E_{p,pes} + E_{p,el} = -mgR\sin\theta + kR^2(1-\cos\theta)$.



Q46 ii. En lâchant la bille sans vitesse initiale depuis le point A (c'est-à-dire $\theta = 0$), l'énergie mécanique initiale est 0. Quelque soit t, $E_c \geqslant 0$, on a donc à chaque instant $E_m = E_c + E_p > E_p$. Par conservation de l'énergie mécanique, celle ci reste égale à 0 au cours du mouvement dans ce problème. La particule sera donc piégée dans le puit de potentiel entre 0 et $90°$ et les positions extrèmes atteintes sont celle pour lesquelles l'énergie cinétique est nulle, soit $E_p = E_m$: 0 et $90°$.