#### **Conseils:**

- Ce devoir comporte 4 exercices indépendants et 2 parties séparées. Les deux parties se feront sur des copies différentes et seront rendues sur deux paquets différents. La **Partie 1** doit être rédigée en premier et sera ramassée au bout de 2 heures. La **Partie 2** sera ramassée au bout de 4 heures.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).

Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.

- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- Changer de page pour un nouvel exercice.
- L'usage des calculatrices est autorisé.

## Partie 1

# I. Aspects de l'étude du Soleil et des étoiles

### 1. La Troisième Loi de Képler

Q1

Q3

Q8

Q9

On considère un satellite assimilé à un point matériel P de masse m en orbite autour d'un astre fixe, au point O et de masse M. On notera  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  et G la constante universelle de gravitation.

- 1. Exprimer la force exercée par l'astre fixe sur le satellite en fonction de G, M, m,  $\vec{r}$  et de la distance r = OP.
- Q2 2. Que vaut le moment en O de la force précédente?
  - 3. Exprimer le moment cinétique en O du satellite en fonction de m, de son vecteur vitesse  $\vec{v}$  et du vecteur  $\vec{r}$ .
- Q4 4. Montrer que la trajectoire du satellite est plane.
  - 5. On se place dorénavant dans le plan de la trajectoire. On repère un point P par ses coordonnées polaires r et  $\theta$ . La base polaire sera notée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .
- Q5 Déterminer l'expression du vecteur vitesse  $\vec{v}$  du satellite en coordonnées polaires. Pour cette question et jusqu'à la partie 2. (b), on suppose que la trajectoire du satellite est un cercle de rayon r. Comment se simplifie l'expression de  $\vec{v}$ ?
- Q7 6. Déterminer en coordonnées polaires l'expression du vecteur accélération du satellite.
  - 7. À partir de la relation fondamentale de la dynamique appliquée au satellite, montrer que la vitesse angulaire du satellite  $\omega = \dot{\theta}$  est constante.
  - 8. Déduire aussi de la relation fondamentale de la dynamique appliquée au satellite que  $r^3\dot{\theta}^2=K$  où K est une constante qu'on exprimera en fonction des données.
- 9. On appelle T la période du mouvement. Démontrer (toujours dans le cas d'un mouvement circulaire) la relation suivante, appelée 3ème loi de Képler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Cette dernière relation est généralisable aux mouvements elliptiques de demi grand axe a en remplaçant r par a.

### 2. Le Satellite Hipparcos

Le satellite Hipparcos fut lancé le 8 août 1989 par une fusée Ariane IV. Ce projet de l'Agence spatiale européenne (ESA) avait notamment pour but de mesurer avec précision la distance de plus de 2,5 millions d'étoiles.

#### a. Orbite géostationnaire

Il était prévu à l'origine de placer Hipparcos sur une orbite géostationnaire. Cette partie se propose d'étudier les caractéristiques principales d'une telle orbite.

On se placera dans cette partie dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. On rappelle que le référentiel géocentrique a pour origine le centre T de la Terre et que ses axes pointent dans

trois directions fixes. Un satellite, assimilé à un point matériel M de masse m, est en orbite autour de la Terre, de masse  $M_T$ . On négligera l'influence sur le mouvement du satellite des astres autres que la Terre. Le satellite est géostationnaire c'est-à-dire qu'il reste en permanence à la verticale d'un même point de la Terre situé à l'équateur.

- 1. La période de l'orbite du satellite géostationnaire est égale à un jour sidéral dont la durée  $T_{\rm sid}$  est de 23 h 56 min 4 s. Expliquer pourquoi cette valeur est légèrement inférieure (d'environ 4 minutes) à la durée du jour solaire  $T_{\rm sol}$  de 24 heures.
  - 2. En notant H l'altitude et  $R_T = 6378$  km le rayon de la Terre, déterminer l'expression littérale et calculer numériquement l'altitude du satellite géostationnaire. On donne l'accélération de la pesanteur terrestre : g = 9.8 m.s<sup>-2</sup>.

#### b. Orbite elliptique

Q11

Q12

Un problème de mise à feu du moteur d'apogée a laissé Hipparcos sur son orbite de transfert variant de h à H calculée précédemment. Après utilisation des moteurs de positionnement, l'altitude minimale a été portée à  $h=500~\rm km$  si bien que le satellite parcourt une trajectoire elliptique d'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

Au cours d'une révolution, il passe dans la ceinture de Van Hallen. On supposera que cette ceinture est comprise entre deux sphères de rayon  $r_1=8400~\rm km$  et  $r_2=28000~\rm km$  et de centre celui de la Terre. La ceinture de Van Hallen est constituée de particules chargées piégées dans le champ magnétique terrestre. Ces particules aveuglent les détecteurs d'Hipparcos interrompant les mesures des positions des étoiles. Il est cependant utilisable à 65 %.

- Q13 1. Exprimer et calculer e et p en fonction de h, H et  $R_T$ .
- Q14 2. Exprimer et calculer le demi grand axe *a* de la trajectoire.
- 3. Par application de la troisième loi de Kepler, exprimer la période  $T_h$  de révolution d'Hipparcos en fonction de  $T_{sid}$ ,  $R_T$ , H et h. Calculer  $T_h$  en heure.
- 4. Déterminer les valeurs numériques des angles  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  d'entrée et de sortie de la ceinture de Van Hallen du satellite. On donnera les valeurs comprises entre 0 et 180°.
- 5. Représenter sur un schéma clair la trajectoire du satellite et l'aire  $\mathcal{A}$  balayée par  $\overrightarrow{TM}$  lors d'un passage dans la ceinture de Van Hallen.

  Pour la question suivante, on prendra une valeur approchée de  $\mathcal{A}=200.10^6~\mathrm{km}^2$ .
- 6. Déterminer le rapport  $\rho=\frac{t_0}{T_h}$  en fonction de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_e$  (aire de l'ellipse) où  $t_0$  est la durée totale d'inactivité d'Hipparcos sur une période. Commenter.

  On donne l'aire de l'ellipse

$$\mathcal{A}_e = \frac{\pi p^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

# II. FIBRE OPTIQUE À SAUT D'INDICE

On s'intéresse à la propagation de la lumière dans une fibre optique dans le cadre de l'optique géométrique.

Une fibre optique à saut d'indice, représentée sur la figure 1 est formée d'un coeur cylindrique en verre d'axe (Ox), de diamètre 2a et d'indice n entouré d'une gaine optique d'indice  $n_1$  légèrement inférieur à n. Les deux milieux sont supposés homogènes, isotropes et transparents.

Un rayon situé dans le plan (Oxy) entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence  $\theta$ . Les rayons lumineux sont supposés issus d'une radiation monochromatique de fréquence f.

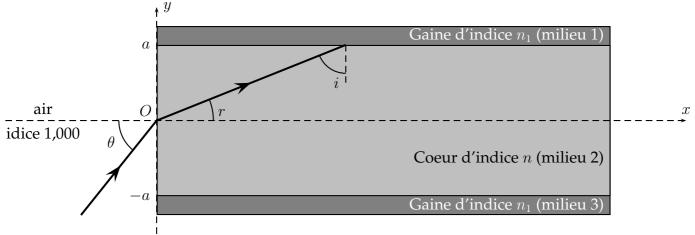


FIGURE 1 – Fibre optique en coupe

- Q19 1. Définir les termes homogène, transparent et isotrope.
- 2. Les différents angles utiles sont représentés sur la figure 1. À quelle condition sur i, angle d'incidence à l'interface coeur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du coeur? On note  $i_l$  l'angle d'incidence limite.
  - 3. Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence  $\theta$  est inférieur à un angle limite  $\theta_l$  dont on exprimera le sinus en fonction de n et  $i_l$ . En déduire l'expression de l'ouverture numérique  $ON = \sin \theta_l$  de la fibre en fonction de n et  $n_1$  uniquement.
- Q23 4. Donner la valeur numérique de ON pour n=1,50 et  $n_1=1,47$ .

On considère une fibre optique de longueur L. Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence  $\theta$  variable compris entre 0 et  $\theta_l$ . On note c la vitesse de la lumière dans le vide.

- 5. Pour quelle valeur de l'angle  $\theta$ , le temps de parcours de la lumière dans la fibre est-il minimal? maximal? Exprimer alors l'intervalle de temps  $\delta t$  entre le temps de parcours minimal et maximal en fonction de L, c, n et  $n_1$ .
- 6. On pose  $2\Delta = \frac{n^2}{n_1^2} 1$ . On admet que pour les fibres optiques  $\Delta \ll 1$  d'où  $\Delta \simeq \frac{n}{n_1} 1$ . Montrer dans ce cas que l'expression de  $\delta t$  peut se mettre sous la forme approchée  $\delta t \simeq \frac{nL\Delta}{c}$ .

On conservera cette expression de  $\delta t$  pour la suite du problème.

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse d'une durée caractéristique  $t_0=t_2-t_1$  formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et  $\theta_l$ . La figure 2 ci-dessous représente l'allure de l'amplitude A du signal lumineux en fonction du temps t.

Q21

Q22

Q24

Q25

Q29



FIGURE 2 – Impulsion lumineuse

7. Reproduire la figure 2 en ajoutant à la suite l'allure du signal lumineux à la sortie de la fibre.

Q28 Quelle est la durée caractéristique  $t'_0$  de l'impulsion lumineuse en sortie de fibre? Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (appelées "bits") périodiquement avec une fréquence d'émission F.

8. En supposant  $t_0$  négligeable devant  $\delta t$ , quelle condition portant sur la fréquence d'émission F exprime le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique?

Pour une fréquence F donnée, on définit la longueur maximale  $L_{\max}$  de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions. On appelle bande passante de la fibre le produit  $B=L_{\max}.F$ .

- Q30 9. Exprimer la bande passante B en fonction de c, n et  $\Delta$ .
- 10. Calculer la valeur numérique de  $\Delta$  et de la bande passante B (exprimée en MHz.km) avec les valeurs de n et  $n_1$  données dans la question 3.
- Pour un débit d'information de  $F=100~{\rm Mbits.s^{-1}}=100~{\rm MHz}$ , quelle longueur maximale de fibre optique peut-on utiliser pour transmettre le signal? Commenter la valeur de  $L_{\rm max}$  obtenue.

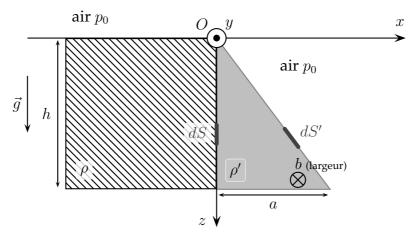
Lycée Poincaré – Nancy

## Partie 2

## III. FORCES PRESSANTES SUR UN BARRAGE POIDS

Un mur de barrage a le profil indiqué : hauteur h, largeur b, épaisseur de la base a. La masse volumique du béton est  $\rho'$ , celle de l'eau est  $\rho$ . On se propose de déterminer séparément la force pressante exercée par l'eau  $\vec{F}_{eau}$  et celle exercée par l'air  $\vec{F}_{air}$ .

Données : b=100 m; h=50 m; k=0.5;  $\rho=10^3$  kg.m $^{-3}$ ;  $\rho'=2.10^3$  kg.m $^{-3}$ ,  $p_0=10^5$  Pa; g=9.8 m.s $^{-2}$ .



- 1. Rappeler la relation fondamentale de la statique des fluides (vectorielle) dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$  dans le référentiel terrestre galiléen. En déduire de façon générale la loi fondamentale de la statique des fluides incompressibles ( $\rho$  constant) ou loi de Pascal donnant p en fonction de z.
  - 2. Exprimer la pression p de l'eau en un point de la paroi verticale du barrage, en fonction de  $p_0$ ,  $\rho$ , g et z.
    - 3. Calcul de  $\vec{F}_{eau}$ :
      - (a) Exprimer la force pressante  $d\vec{F}_{eau}$  exercée par l'eau sur l'élément de surface dS=dydz situé à la profondeur z.
      - (b) Exprimer la force pressante  $\vec{F}_{eau}$  en fonction de  $p_0$ ,  $\rho$ , g, h, b et d'un vecteur unitaire.
    - 4. Calcul de  $\vec{F}_{air}$ :
      - (a) Exprimer la force pressante  $d\vec{F}_{air}$  exercée par l'air sur l'élément de surface dS' quelconque (voir schéma) en fonction de  $p_0$ , dS' et à un vecteur unitaire  $\vec{u}$  que vous représenterez sur un schéma.
      - (b) En déduire  $\vec{F}_{air}$  en fonction de  $p_0$ , b, a, h et  $\vec{u}$ .
      - (c) Projeter le vecteur  $\vec{u}$  sur  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$ . Exprimer les composantes  $F_{air,x}$  en fonction de  $p_0$ , h et b et  $F_{air,z}$  en fonction de  $p_0$ , a et b.
      - (d) Montrer la composante  $F_x$  de la résultante des forces de pression exercées par l'eau et l'air s'écrit :

$$F_x = \frac{1}{2}\rho gbh^2$$

Q40

Q34

Q35

Q36

Q37

Q38

(e) Montrer que la composante  $F_z$  de la résultante des forces de pression exercées par l'eau et l'air s'écrit :

$$F_z = p_0 a b$$

Q41

Q42

Q43

- 5. Exprimer le poids P du barrage en fonction de  $\rho'$ , a, b, b et g (on supposera les matériaux de construction homogènes).
- 6. En supposant que la maçonnerie, non ancrée, repose directement sur le sol avec un coefficient de frottement k, quelle valeur minimale  $a_{min}$  faut-il donner à a pour que le barrage ne glisse pas? On donnera l'expression littérale de  $a_{min}$ , puis on fera l'application numérique. On représentera soigneusement les forces exercées sur le barrage.

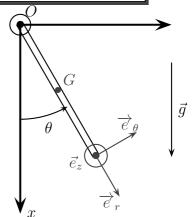
On rappelle la loi du frottement de Coulomb : soit  $\vec{R}$  la réaction du sol sur le barrage ,  $R_T$  sa composante horizontale,  $R_N$  sa composante verticale. Le barrage ne glisse pas tant que  $|R_T| < k|R_N|$  ( k est le coefficient de frottement ).

# IV. Loi de Murphy et tartine à la confiture

Les deux parties sont indépendantes.

## A. Approche énergétique du pendule pesant

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène de masse m et de longueur l en pivot parfait autour de l'axe Oz. Sa position est repérée par l'angle  $\theta$ . Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Oz est  $J_{Oz}=\frac{1}{3}ml^2$ . On notera g l'accélération de la pesanteur.



- Q44 1. Faire un schéma. Donner l'énergie cinétique de la tige à un instant quelconque.
  - 2. Faire de même avec son énergie potentielle de pesanteur en fonction de  $\theta$  et des données du problème.
- 3. Outre celle du poids, quelles sont les actions extérieures subies par la tige? Calculer leur puissance.
- Q47 4. En déduire les positions d'équilibre et leur stabilité.
- 5. Trouver une intégrale première du mouvement. En déduire l'équation du mouvement de la tige.
- Q49 6. La résoudre dans le cadre de petites oscillations sachant qu'initialement la tige est dans la position verticale  $\theta=0$  avec une vitesse angulaire  $\dot{\theta}_0>0$ . Donner une condition sur  $\dot{\theta}_0$  pour être effectivement dans cette approximation.
- Q50 7. On ne se place plus forcément dans le cadre des petites oscillations. En faisant une étude énergétique, montrer que suivant les valeurs de  $\dot{\theta}_0$  deux types de mouvements sont possibles. Les décrire. Quelle valeur de  $\dot{\theta}_0$ , notée  $\dot{\theta}_c$  est à la limite des deux situations?

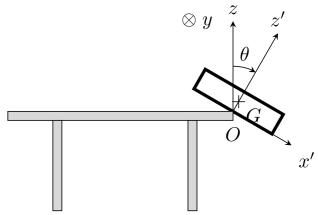
## B. Loi de Murphy

Q45

La loi de Murphy, autrement nommée théorème de la tartine à la confiture, est une loi empirique bien connue <sup>1</sup> qu'on pourrait énoncer sous la forme « Tout ce qui est susceptible de mal se passer se passera mal ». L'objectif de cet exercice est de montrer que , malheureusement, la loi de Murphy a de bonnes raisons d'être vérifiée … au moins en ce qui concerne les tartines à la confiture.

On modélise la tartine à la confiture par un parallélépipède de masse m, de longueur 2a dans la direction x', de largeur 2b dans la direction y et d'épaisseur 2e dans la direction z'. Cette tartine est initialement posée sur une table de hauteur h.

On pourra remarquer que la base  $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{z'})$  correspond à une base polaire, telle que  $\vec{e}_r = \vec{e}_{z'}$  et  $\vec{e}_{\theta} = \vec{e}_{x'}$ .



<sup>1.</sup> La page Wikipédia mi-sérieuse mi-trollesque est assez distrayante.

Sans faire, attention, un maladroit (sans doute Gaston ...) la pousse très lentement vers le bord de la table. Quand le milieu de la tartine atteint le bord, elle entame une rotation autour de l'axe Oy. Dans un premier temps, la tartine ne glisse pas sur la table pendant la rotation.

L'action mécanique de la table sur la tartine est modélisée par une force de réaction

$$\vec{R} = R_T \vec{u}_{x'} + R_N \vec{u}_{z'}$$

dont O est le point d'application. L'inclinaison de la tartine est repérée par l'angle  $\theta$ . Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe Oy vaut

$$J_y = \frac{1}{3}m(a^2 + 4e^2) \ .$$

Dans tout cet exercice de « vraie » mécanique du solide, vous serez particulièrement vigilant au point d'application des différentes forces et au point auquel vous écrivez les différentes lois.

Q51 1. Montrer que la puissance de la force de réaction  $\vec{R}$  est nulle. En déduire que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6ge(1 - \cos \theta)}{a^2 + 4e^2} \ .$$

Q52 2. En déduire une relation entre  $\ddot{\theta}$  et  $\sin \theta$ .

Q53 3. Retrouver l'expression de  $\ddot{\theta}$  en appliquant le théorème du moment cinétique.

Q54 4. Par application de la loi de la quantité de mouvement à la tartine, montrer que

$$R_T = mg\left(\frac{3e^2}{a^2 + 4e^2} - 1\right)\sin\theta$$
 et  $R_N = mg\left(\cos\theta - \frac{6e^2(1 - \cos\theta)}{a^2 + 4e^2}\right)$ .

Simplifier ces expressions en tenant compte des dimensions réelles d'une tartine à la confiture :  $a\simeq 5\,\mathrm{cm}$  et  $e\simeq 5\,\mathrm{mm}$ .

La loi de Coulomb du frottement solide indique que la tartine ne glisse pas tant que  $|R_T| \le \mu |R_N|$  où  $\mu \simeq 1$  est le coefficient de frottement solide.

5. Montrer que l'angle  $\theta_0$  à partir duquel la tartine commence à glisser est égal à  $\pi/4$ . En déduire la vitesse angulaire  $\dot{\theta}_0$  de la tartine à cet instant.

À partir de cet instant pris comme origine des temps t=0, la tartine quitte la table en un temps très bref en conservant quasiment la même orientation  $\theta_0$  et la même vitesse angulaire  $\dot{\theta}_0$ . On suppose que la tartine ne retouche plus la table et on néglige les frottements de l'air (ainsi que les tentatives désespérées de Gaston pour la rattraper).

6. Déterminer la loi horaire  $z_G(t)$ , où G est le centre d'inertie de la tartine, une fois qu'elle a quitté la table. En déduire que la tartine touche le sol à l'instant  $\tau$  tel que

$$\tau \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}} \ .$$

7. Supposons que pendant la phase de vol, la vitesse angulaire de la tartine reste constamment égale à  $\dot{\theta}_0$ . Déterminer la loi horaire  $\theta(t)$ .

Q58 8. À l'aide des deux questions précédentes, conclure quant au côté sur lequel va tomber la tartine. On prendra  $h=75\,\mathrm{cm}$  et  $g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$ .

9. Deux martiens prennent leur petit-déjeuner. Sont-ils eux aussi soumis à la loi de Murphy? L'accélération de la pesanteur sur Mars vaut  $3.7 \,\text{m/s}^2$ .

Q55

Q56

Q57

# I. ASPECTS DE L'ÉTUDE DU SOLEIL ET DES ÉTOILES

Extrait du concours ATS 2009

### 1. La Troisième Loi de Képler

Q1

O<sub>2</sub>

O3

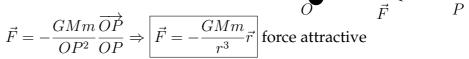
O4

Q5

Q6

Q7

1. Le satellite P de masse m subit de l'astre fixe au point O et de masse M la force de gravitation dont l'expression est



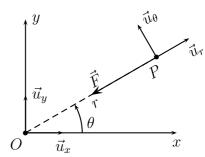
Attention, vecteur unitaire  $ec{u}_r = rac{ec{r}}{r}$  d'où une puissance 3 au dénominateur!

- 2. Par définition du moment de  $\vec{F}$ ,  $\boxed{\vec{M}_O(P) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \vec{0}}$  quelque soit la position de P: force centrale.
  - 3. Par définition du moment cinétique de P,  $\vec{L}_O(P) = \overrightarrow{OP} \wedge (m.\vec{v}) = m\vec{r} \wedge \vec{v}$ .
  - 4. Le référentiel d'origine O étant galiléen, on peut y appliquer le théorème du moment cinétique, à savoir  $\frac{d\vec{L}_O(P)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$ .

### Rappeler qu'on est dans le cadre d'utilisation du TMC + hypothèses

Le moment cinétique de P par rapport à O est constant dans ce référentiel. Comme  $\vec{L}_O$  est par définition normal à  $\vec{r}$ ,  $\overrightarrow{OP}$  est perpendiculaire à une constante qui définit la normale au plan du mouvement.

5. On retrouve l'expression de la vitesse et de l'accélération de P par dérivations successives de  $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r.\vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$  et dans le cas d'un mouvement circulaire, r est une constante du temps d'où  $\dot{r} = 0$  et l'expression précédente prend la forme  $\vec{v} = r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$ 



- 6. En dérivant à nouveau par rapport au temps et pour r=Cte, on obtient  $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=r\ddot{\theta}.\vec{u}_{\theta}-r\dot{\theta}^2.\vec{u}_r$
- 7. Application de la relation fondamentale de la dynamique appliquée au satellite,

$$m\vec{a}(P) = \vec{F} \Rightarrow -mr\dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_r + mr\ddot{\theta} = -\frac{GMm}{r^3}r \cdot \vec{u}_r$$

et par projection selon le vecteur  $\vec{u}_{\theta}$ , on obtient  $mr\ddot{\theta} = 0$ .

- Q8 Si on se place dans le cas d'un mouvement circulaire, r=Cte d'où  $\ddot{\theta}=0$  et  $\dot{\theta}$  est constante.
  - 8. Par projection de la relation vectorielle précédente mais cette fois selon  $\vec{u}_r$ , on obtient ensuite

Q9 
$$-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{GMm}{r^3}r \Rightarrow \boxed{r^3\dot{\theta}^2 = GM = K \text{ constante}}$$

9. La vitesse angulaire étant constante, à tout instant

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow r^3 \frac{4\pi^2}{T^2} = GM \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

Note: on ne vient pas de "démontrer la troisième loi de Kepler" qui ne concerne que les plèbes du système solaire et ne donne pas non plus l'expression de la constante.

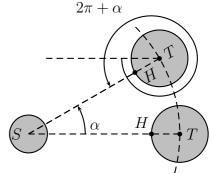
### 2. Le Satellite Hipparcos

#### a. Orbite géostationnaire

#### Figure indispensable pour la question 1.

Q11

1. La Terre tourne sur elle-même en  $T_{\rm sid}=23~{\rm h}~56~{\rm min}$  (angle  $2\pi$ ) mais pendant ce temps, elle tourne également autour du soleil (angle  $\alpha$ ) et il faut attendre encore 4 min pour qu'un point (H sur la figure ci-contre, pas à l'échelle) voit le soleil à son zénith d'où  $T_{\rm sol}=T_{\rm sid}+4$  min =  $24~{\rm h}$  (angle  $2\pi+\alpha$ ).



2. Un satellite M est géostationnaire s'il reste à la verticale du même point de la surface de la Terre. Sa période de révolution est donc égale à la période de rotation de la la Terre  $T_{\rm sid}$  et par application de la troisième loi de Kepler, on en déduit

$$r^{3} = TM^{3} = (R_{T} + H)^{3} = \frac{GM_{T}T_{\text{sid}}^{2}}{4\pi^{2}} \Rightarrow H = \left[\frac{GM_{T}T_{\text{sid}}^{2}}{4\pi^{2}}\right]^{\frac{1}{3}} - R_{T} \quad \text{or} \quad g = \frac{GM_{T}}{R_{T}^{2}}$$

d'où 
$$H = \left[\frac{T_{\rm sid}^2 R_T^2 g}{4\pi^2}\right]^{\frac{1}{3}} - R_T$$

A.N. 
$$H = \left(\frac{86164^2 \times 9.8 \times (6378.10^3)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - 6378.10^3 = 35788 \boxed{H \simeq 36 \times 10^3 \text{ km}}$$

Q12

Deux chiffres significatifs pour être cohérent avec la donnée de g.

### b. Orbite elliptique

1. h est la valeur minimale de l'altitude z avec  $r = R_T + z$  soit

$$r_{\min} = R_T + h = \frac{p}{1+e} \text{ et } r_{\max} = R_T + H = \frac{p}{1-e}$$

$$\Rightarrow e = \frac{H - h}{h + H + 2R_T} \simeq 0.72$$
 et  $p = \frac{2(R_T + H)(R_T + h)}{h + H + 2R_T} \simeq 12 \times 10^3 \text{ km}$ 

Q16

Q17

#### N'oubliez pas l'unité de p. On trouve bien e < 1: ellipse

- 2. Le demi grand axe a est tel que :  $2a = r_m + r_M = 2R_T + h + H \Rightarrow \boxed{a = \frac{2R_T + h + H}{2} \simeq 25 \times 10^3 \text{ km}.}$
- 3. D'après la  $3^e$  loi de Kepler, le rapport  $\frac{T^2}{a^3}$  est le même pour tous les satellites en orbite autour de la Terre, ce qui donne, en utilisant les données relatives au satellite géostationnaire : période T et trajectoire circulaire de rayon  $R_T + H$  et celles d'Hipparcos,

Q15 
$$\frac{T_h^2}{a^3} = \frac{T^2}{(R_T + H)^3} \Rightarrow \boxed{T_h = T \frac{a^{3/2}}{(R_T + H)^{3/2}} \simeq 0.44T \simeq 10.6 \text{ h soit } 10 \text{ h et } 36 \text{ min}}$$

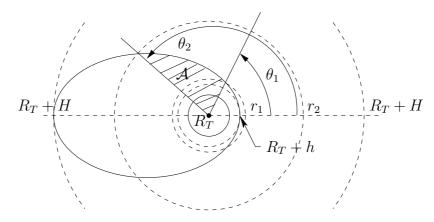
#### Justifiez bien en invoquant l'équivalent de la troisième loi de Kepler.

4. Le satellite entre dans la ceinture de Van Hallen quand  $r=r_1$  et en sort quand  $r=r_2$ , on calcule ainsi  $\theta_1$  et  $\theta_2$  tels que

$$r = r_1 \iff r_1 = \frac{p}{1 + e \cos \theta_1} \Rightarrow \boxed{\cos \theta_1 = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_1} - 1\right)} \text{ et de même } \boxed{\cos \theta_2 = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_2} - 1\right)}$$

Les applications numériques donnent  $\theta_1 \simeq 55^{\circ}$  et  $\theta_2 \simeq 143^{\circ}$ .

5. Voir figure ci-dessous : attention à bien hachurer l'aire jusqu'au centre de la terre.



6. On peut utiliser la loi des aires : le rapport aire balayée par la rayon vecteur sur durée est une constante. Par exemple, sur une période  $T_h$ , le rayon vecteur balaye  $A_e$  alors que pendant  $t_0$ , il balaye 2A (il passe deux fois dans la ceinture en une période), soit :

Q18 
$$\frac{\mathcal{A}_e}{T_h} = \frac{\mathcal{A}}{t_0/2} \iff t_0 = T_h \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_e} = \frac{(1 - e^2)^{3/2} T_h \mathcal{A}}{\pi^2} \simeq 0.3 T_h \Rightarrow \boxed{\rho = 0.30}$$

On trouve ainsi que le satellite n'est utilisable que pendant 70 % du temps, c'est bien le même ordre de grandeur que celui annoncé par l'énoncé.

### Attention au facteur 2. D'où l'intérêt de comparer aux 65 % de l'énoncé.

La mission Hipparcos n'a finalement pas été un échec.

La différence peut venir de la précision des données : en effet, on ne connait pas bien le nombre de chiffre significatifs et  $\mathcal{A}$  (et la limite de la ceinture n'est pas forcément nette).

# II. FIBRE OPTIQUE À SAUT D'INDICE

Physique II – PC – Mines Ponts – 2011

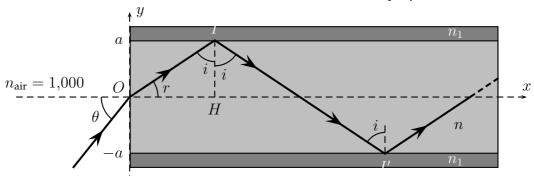


FIGURE 1 – Fibre optique en coupe

- 1. > Homogène : même propriété en tout point
  - > Transparent : laisse passer l'onde sans l'atténuer par absorption
  - ➤ Isotrope : les propriétés physiques ne dépendent pas de la direction de propagation de l'onde
- 2. Comme  $n > n_1$ , pour qu'il y ait réflexion totale en I puis I' ... il faut et il suffit que  $i > i_l$  l'angle limite de réfraction. Pour  $i = i_l$  il y aurait réfraction rasante dans le milieu d'indice  $n_1$  soit d'après la loi de Snell Descartes,  $n \sin i_l = n_1 \sin \frac{\pi}{2}$
- Q20 La condition cherchée est donc  $i > i_l = \arcsin \frac{n_1}{n}$

#### Questions vues en TD, vous devez prendre ces points

- 3. Dans le triangle (OIH) rectangle en H, on peut écrire  $r+i+\frac{\pi}{2}=\pi$  soit  $r=\frac{\pi}{2}-i$ . D'après la loi de Snell Descartes en O,  $\sin\theta=n\sin r=n\sin(\frac{\pi}{2}-i)=n\cos i$ . La fonction  $\cos$  est décroissante pour des angles compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  d'où  $i>i_l\Rightarrow\cos i<\cos i_l$  et  $\sin\theta=n\cos i\Rightarrow \boxed{\sin\theta<\sin\theta_l=n\cos i_l}$ 
  - On a vu que  $\sin i_l = \frac{n_1}{n}$  or  $\cos^2 i_l = 1 \sin^2 i_l$  d'où une ouverture numérique

$$ON = \sin \theta_l = n.\sqrt{1 - \frac{n^2_1}{n^2}} \Rightarrow \boxed{ON = \sqrt{n^2 - n^2_1}}$$

Cherchez systématiquement à simplifier les expressions obtenues, les AN seront plus simples

- 5. La lumière reste dans le coeur de la fibre, milieu homogène et transparent d'indice n. Sa vitesse  $v=\frac{c}{n}=\frac{d}{t}$  est donc partout la même d'où un temps de parcours t proportionnel à la distance d parcourue dans la fibre.
  - Le temps de parcours est minimal pour le trajet le plus court c'est à dire selon l'axe Ox, autrement dit pour  $\theta = 0$ .
  - Au contraire, le temps de parcours sera maximal si la distance  $OI + II' + ... = \frac{OH}{\sin i} + \frac{2OH}{\sin i}$  est maximale tout en gardant une réflexion totale sur les dioptres  $n \to n_1$  c'est à dire pour  $r = r_l \Rightarrow \theta = \theta_l$ .

Q24

Q19

#### Prenez le temps de justifier, même rapidement, vos réponses

Le temps minimum de parcours (pour  $\theta = 0$ ) est  $t_{\min} = \frac{d_{\min}}{v} = \frac{L}{c/n} = \frac{nL}{c}$ Le temps maximum (pour  $\theta = \theta_l$ ) est quant à lui

$$t_{\max} = \frac{d_{\max}}{v} = \frac{nd_{\max}}{c} \text{ avec } d_{\max} = OI + II' + \ldots = \frac{OH}{\sin i_l} + 2.\frac{OH}{\sin i_l} + \ldots = \frac{N.OH}{\sin i_l}$$

si le rayon coupe N fois l'axe Ox lors du parcours. On a par ailleurs

$$L = N.OH \Rightarrow N = \frac{L}{OH} \Rightarrow d_{\max} = \frac{L}{\sin i_l} = \frac{nL}{n_1} \Rightarrow t_{\max} = \frac{nd_{\max}}{c} = \frac{n^2L}{n_1c}$$

et finalement

Q25

Q27

$$\delta t = t_{\text{max}} - t_{\text{min}} = \frac{n^2 L}{n_1 c} - \frac{nL}{c} \Rightarrow \boxed{\delta t = \frac{nL}{c} \left[ \frac{n}{n_1} - 1 \right]}$$

Q26 6. En remplaçant  $\Delta \simeq \frac{n}{n_1} - 1$  dans l'équation précédente, on obtient  $\delta t \simeq \frac{nL\Delta}{c}$ 

La suite des questions fait plus appel au bon sens qu'à des éléments du cours, tentez votre chance

7. L'impulsion lumineuse étant injectée avec un angle  $0 < \theta < \theta_l$ , certains rayons parviendront plus rapidement à l'autre extrémité de la fibre.

Cela se traduira par un étalement temporel plus important en sortie.

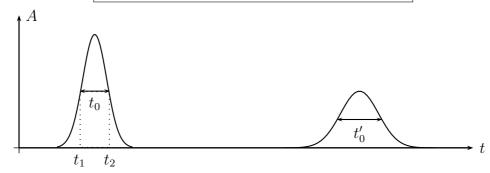


FIGURE 2 – Impulsion lumineuse

- Q28 Les rayons sont décalés dans le temps de  $\delta t$  au maximum et on peut donc estimer  $t_0' = t_0 + \delta t$ .
  - 8. En supposant  $t_0 \ll \delta t$  on a  $t_0' = t_0 + \delta t \simeq \delta t$ . Lors de l'émission, deux impulsions sont séparées d'une durée  $T = \frac{1}{F}$  et à la sortie de la fibre on n'aura pas de recouvrement si l'étalement des impulsions est supérieur à T soit

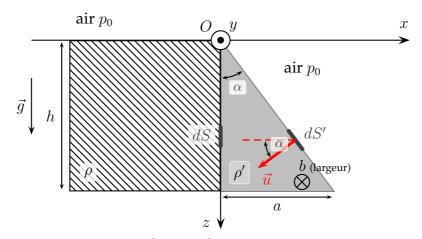
Q29 
$$t'_0 \simeq \delta t > T \Rightarrow \frac{1}{F} > \delta t \Rightarrow \boxed{F < \frac{1}{\delta t} = \frac{c}{Ln\Delta}}$$

## Homogène et cohérent

- 9. On peut interpréter la relation précédente en considérant qu'à F donnée, on n'a pas de recouvrement temps que  $L < \frac{c}{Fn\Delta} = L_{\max} \text{ d'où } \boxed{B = F.L_{\max} = \frac{c}{n\Delta}}$ .

  10. Applications numériques :  $\boxed{\Delta = \frac{1}{2} \left[ \frac{n^2}{n_1^2} - 1 \right] \simeq 1{,}98.10^{-2}} \text{ et } \boxed{B = \frac{c}{n\Delta} \simeq 1{,}01.10^{10} \text{ m.s}^{-1}}$ Q30
- Q31
- Pour  $F=100.10^6$  Hz, on calcule ensuite  $L_{\rm max}=\frac{c}{Fn\Delta}\simeq 101$  m. Q32 Cet ordre de grandeur montre que ce type de fibre peut être utilisée lorsque l'émetteur et le récepteur sont est assez proches (entre deux bâtiments par exemple) mais pas au delà.

# III. FORCES PRESSANTES SUR UN BARRAGE POIDS



- 1. Relation fondamentale :  $dp = \rho \vec{g} \cdot \overrightarrow{dr}$  ou  $\overrightarrow{\text{grad}} p = \rho \vec{g}$ . Or on a  $\vec{g} = +g\vec{e}_z$  d'où  $dp = \rho g \, dz$ . D'où en intégrant :  $p = \rho gz + cste$  (car  $\rho = cte$ !)
- Q34 2. La condition aux limites est  $p=p_0$  en z=0. En intégrant la relation précédente entre z=0 et z, on trouve  $p-p_0=\rho g(z-0)$  d'où  $p=p_0+\rho gz$

**Remarque :** Citez et utilisez explicitement les <u>conditions aux limites</u>. C'est souvent facile, mais il vaut mieux le faire avec prudence malgré tout.

- 3. Calcul de  $\vec{F}_{eau}$ :
  - (a) La force a pour norme  $p\,dS=p\,dz\,dy$  et est orienté selon la normale sortante au fluide :  $\vec{e}_x$ . Son expression est donc  $d\vec{F}_{eau}=(p_0+\rho gz)\,dy\,dz\,\vec{e}_x$
  - (b) La force pressante totale s'obtient en sommant (intégrant) la force pressante élémentaire de la question précédente.

$$\vec{F}_{eau} = \int_{z=0}^{h} \int_{y=-b}^{0} d\vec{F}_{eau} = b\vec{e}_x \int_{z=0}^{h} (p_0 + \rho gz) dz = b \left[ b \left( p_0 h + \frac{1}{2} \rho g h^2 \right) \vec{e}_x \right]$$

L'intégrale sur y revient à une multiplication par b puisque rien ne dépend de y. On peut encore factoriser h dans le résultat.

- 4. Calcul de  $\vec{F}_{air}$ :
  - (a) La force est  $d\vec{F}_{air} = p_0 dS'\vec{u}$  avec  $\vec{u}$  un vecteur unitaire orienté depuis l'air vers le béton, orthogonal à la surface.
  - (b) Puisque la force est <u>uniforme</u>, il suffit de faire la pression fois la surface. La largeur est b et d'après Pythagore l'autre dimension est  $\sqrt{a^2+h^2}$  d'où  $\vec{F}_{air}=p_0b\sqrt{a^2+h^2}\vec{u}$
  - (c)  $F_{air,x} = -F_{air} \times \cos \alpha$  avec  $\alpha$  l'angle entre  $\vec{u}$  et  $-\vec{e}_x$  qui est le même que l'angle du triangle rectangle (béton) en O. Soit  $\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$  d'où  $F_{air,x} = -p_0bh$ . Pour  $F_{air,z}$  de même, on utilise  $\sin \alpha$  d'où  $F_{air,z} = p_0ba$
  - (d) En utilisant les résultats des questions précédentes, la résultante selon x est  $b\left(p_0h+\frac{1}{2}\rho gh^2\right)\vec{e}_x-p_0bh\vec{e}_x$  d'où :

$$F_x = \frac{1}{2}\rho gbh^2$$

Q40

Q33

Q35

Q36

Q37

Q38

(e)  $F_z = F_{z,air}p_0ab$  (car la force due à l'eau n'a pas de composante selon z)

Q42

5. Le volume est  $\frac{1}{2}abh$  donc le poids est  $\vec{P} = \frac{1}{2}\rho'abh\vec{g}$ .

6. La

6. La condition sur les forces est  $|R_T| < k|R_N|$  or d'après le principe d'inertie, si le barrage ne glisse pas, alors  $R_T + F_{air,x} + F_{eau,x} = 0$  et  $R_N + F_{air,z} + P = 0$  d'où  $R_N = -p_0ab - \frac{1}{2}\rho'abhg$  et  $R_T = -\frac{1}{2}\rho gbh^2$  La condition de non glissement s'écrit donc

$$\frac{1}{2}\rho gbh^2 < k \times \left(p_0ab + \frac{1}{2}\rho'abhg\right) \Leftrightarrow a > \frac{\frac{1}{2}\rho gbh^2}{k \times \left(p_0b + \frac{1}{2}\rho'bhg\right)} = a_{min}$$

Q43

On obtient  $a_{min} = 41.7 \text{ m}$ 

Le barrage peut GLISSER selon  $\vec{e}_x$  ou BASCULER autour de son arrête en bas à droite. Les forces qui s'opposent au basculement sont le poids et la force de poussée de l'air dont les moments s'opposent à ceux de la force de poussée de l'eau et de la réaction normale du support.

En 1884 il y a eu un glissement de 34 cm sur une longueur de 135 m.

En 1895 il y a un basculement autour d'un axe parallèle au sol situé à  $10\,\mathrm{m}$  de hauteur par rapport au sol. Basculement du haut du barrage sur une longueur de  $170\,\mathrm{m}$ .

## IV. Loi de Murphy et tartine à la confiture

## A. Approche énergétique du pendule pesant

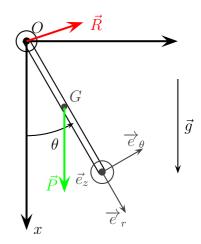
Attention, dans la puissance des forces, c'est la vitesse du point d'application qui compte! De même pour le calcul du moment d'une force.

1.

Pour le schéma, pensez à représentez les forces exercées sur le pendule. Pour le poids, n'oubliez pas que le point d'application est G. Pour la réaction de la liaison pivot, on ne connait pas la direction, ni la norme.

Q44

L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe peut s'exprimer  $E_c = \frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2$ . Rem : Penser à justifier rapidement en précisant le type de mouvement.



Attention, si vous avez en tête «l'énergie cinétique c'est  $\frac{1}{2}mv^2$ , c'est <u>FAUX</u>. Il ne faut jamais oublier les conditions. Cette formule est vraie pour un point ou un système en translation. En général il faut sommer :  $E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ ; de même pour le moment cinétique d'un objet non ponctuel

- Q45 2. L'axe x est orienté vers le bas, on a donc  $E_p = -mgx_G = -mg\frac{1}{2}\cos\theta$ . Rem : Attention à bien prendre le centre de masse qui est le point d'application du poids et à ne plus se tromper sur le signe.
- Q46 3. La tige est soumise aussi à la réaction de la liaison pivot, qui est de puissance nulle (car la liaison pivot est parfaite, ce qui indique que le couple de la liaison pivot est nul, et donc sa puissance aussi).
  - 4. Les positions d'équilibre correspondent aux points où  $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}=0$ , soit  $\theta=0$  ou  $\pi$ . Rem : Attention à bien dériver par rapport à  $\theta$  et non par rapport à t.
- Les positions d'équilibre stables correspondent aux minimums (locaux) de la fonction  $E_p(\theta)$ , puisque l'on a une fonction  $-\cos$ , 0 est la position d'un minimum et est donc une position stable,  $\pi$  est un maximum et donc instable.
- 5. D'après le théorème de la puissance mécanique, appliqué au système {la tige} dans le référentiel terrestre, galiléen, on sait que  $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc,int} + \mathcal{P}_{nc,ext}$ . Puisque le système est un solide, alors  $\mathcal{P}_{int} = 0$  et on a déjà vu que  $\mathcal{P}_{nc,ext} = 0$ . On en déduit que  $E_m(t)$  est une intégrale première du mouvement :  $E_m(t) = \frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2 mg\frac{l}{2}\cos\theta = cste$

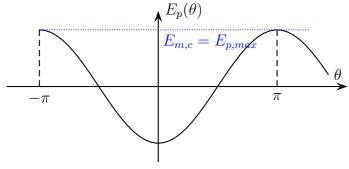
Attention à ne pas oublier la puissance intérieure dans le cas d'un système non ponctuel!

Pour obtenir l'équation du mouvement, on peut dériver l'intégrale première du mouvement. On a alors  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-mg\frac{l}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}^2\right)=0 \Rightarrow mg\frac{l}{2}\sin\theta+J_{Oz}\ddot{\theta}=0$  (après simplification par  $\dot{\theta}$ ). En présentant correctement le résultat avec l'expression de  $J_{Oz}$ :  $\ddot{\theta}+\frac{3g}{2l}\sin\theta=0$ 

6. On pose  $\Omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ , les solutions aux petits angles  $(\sin\theta \simeq \theta)$  sont  $\theta(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$ . Compte tenu des C.I.  $\theta(0) = 0$  et  $\theta(0) = \dot{\theta}_0$ , on trouve  $\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\Omega}\sin(\Omega t)$ .

Pour rester dans les petits angles, il faut que l'amplitude des oscillations reste faible (devant 1 rad), soit  $\frac{\dot{\theta}_0}{\Omega} \ll 1$ . La vitesse angulaire initiale doit être faible devant la pulsation propre du système.

7. Si on étudie la courbe  $E_p(\theta) = -mg^{\frac{1}{2}}\cos\theta$ :



On trouve les domaines accessibles en écrivant  $E_m = E_c + E_p$ . Comme l'énergie cinétique est toujours positive, ces derniers sont définis par  $E_p \leq E_m$ .

On peut voir que l'on reste dans un état lié ( $\theta$  est borné) tant que  $E_m \leqslant E_{p,max}$ , soit dans notre cas :  $\frac{1}{2}J_{Oz}\dot{\theta}_0^2 - mg\frac{l}{2} \leqslant mg\frac{l}{2}$ .

La limite est donc atteinte pour  $\dot{\theta_c} = \sqrt{\frac{2mgl}{J_{Oz}}} = \sqrt{\frac{6g}{l}}$ 

Si  $\dot{\theta}_0 > \dot{\theta}_c$ , on aura un mouvement révolutif (la tige tourne toujours dans le même sens sans s'arrêter), sinon, on aura un mouvement oscillant autour de la position stable.

Lycée Poincaré – Nancy

Q49

## B. Loi de Murphy

1. Le point d'application de  $\vec{R}$  est immobile. Comme dans la formule pour la puissance  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$  c'est la vitesse du point d'application qui compte, on en déduit que la puissance de la force de réaction  $\vec{R}$  est nulle.

On peut comme dans la partie précédente appliquer le théorème de la puissance mécanique pour en déduire que l'énergie mécanique se conserve.

- Q51 Or  $E_m = \frac{1}{2}J_y\dot{\theta}^2 + mge\cos\theta = cte = E_m(t=0) = mge$ . D'où  $\dot{\theta}^2 = \frac{2mge(1-\cos\theta)}{J_y} = \frac{6ge(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2}$ . Rem: Attention  $E_m = cte$  ne veut pas dire  $E_m = 0$ !
- Q52 2. Il suffit de dériver l'expression précédente par rapport au temps et de simplifier par  $2\dot{\theta}$  et l'on trouve :  $\left|\ddot{\theta} = \frac{3ge(\sin\theta)}{a^2 + 4e^2}\right|$ .
- 3. On peut appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à Oy qui est bien un axe fixe. Le moment du poids est  $+mge\sin\theta$  (bras de levier), le moment de  $\vec{R}$  est nul, d'où  $J_y\ddot{\theta} = mge\sin\theta$ , ce qui donne bien la même relation en remplaçant  $J_y$  par son expression.
  - 4. En prenant toujours comme système la tartine, soumise uniquement à son poids et à  $\vec{R}$ , on applique le principe fondamental de la dynamique au mouvement de rotation :

 $m\vec{a}(G)=\sum \vec{F}_{ext}$  (attention, ce n'est pas " $\vec{a}$ " du système, ce qui n'aurait pas de sens, c'est bien l'accélération du centre de masse!)

$$m(-r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta) = m\vec{g} + \vec{R} = -mg\cos\theta\vec{e}_r + mg\sin\theta\vec{e}_\theta + R_N\vec{e}_r + R_T\vec{e}_\theta$$

On projette selon les deux vecteurs de bases et on obtient le système suivant :

$$-mr\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + R_N$$
 et  $mr\ddot{\theta} = mg\sin\theta + R_T$ 

Q54 Ici r = OG = e, et on peut utiliser les expressions précédentes pour remplacer  $\dot{\theta}^2$  et  $\ddot{\theta}$ .

$$-me\underbrace{\left(\frac{6ge(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2}\right)}_{\dot{\theta}^2} = -mg\cos\theta + R_N \qquad \text{et} \qquad me\underbrace{\frac{3ge(\sin\theta)}{a^2+4e^2}}_{\ddot{\theta}} = mg\sin\theta + R_T$$

En isolant  $\mathbb{R}_T$  et  $\mathbb{R}_N$ , on obtient les expressions proposées par l'énoncé :

$$R_T = mg \left( \frac{3e^2}{a^2 + 4e^2} - 1 \right) \sin \theta$$
 et  $R_N = mg \left( \cos \theta - \frac{6e^2(1 - \cos \theta)}{a^2 + 4e^2} \right)$ .

Puisque l'énoncé nous donne des valeurs avec  $e^2 \ll a^2$  (d'un facteur 100), on peut fortement simplifier ces expressions en première approximation :

$$R_T = -mg\sin\theta$$
 et  $R_N = mg\cos\theta$ .

5. D'après la loi de Coulomb, puisque la tartine ne glisse pas tant que  $|R_T| \leqslant \mu |R_N|$ , alors elle glisse à partir de  $|R_T| = \mu |R_N|$ . En remplaçant par les valeurs trouvées à la question précédente, cela donne  $\tan \theta_0 = \mu$ , et puisque l'énoncé propose de prendre  $\mu = 1$ , on obtient  $\boxed{\theta_0 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}}$ .

On peut en déduire  $\dot{\theta}(t=0)$  simplement en utilisant la réponse aux questions précédentes : on a montré au début du problème que  $\dot{\theta}=\sqrt{\frac{6ge(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2}}$  d'où  $\dot{\theta}_0=\sqrt{\frac{6ge(1-1/\sqrt{2})}{a^2+4e^2}}$ .

**Q59** 

- 6. Puisque la tartine est en chute libre, elle n'est soumise qu'à son poids. Le PFD donne donc  $\ddot{z}_G(t) = -g \Rightarrow z_G(t) = -\frac{1}{2}gt^2$  (vitesse initiale nulle, altitude initiale quasi-nulle, on pourrait ajouter  $e/\sqrt{2}$ , mais cela ne change presque rien par rapport à la hauteur de chute h). La tartine atteint le sol lorsque  $z_G(\tau) \simeq -h$  (ceci est aussi une approximation vu que cela dépend de comment est tournée la tartine, mais encore une fois, cela change peu le résultat). On en déduit  $\tau \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .
- 7. Puisque pendant la phase de vol, la vitesse angulaire de la tartine reste constamment égale à  $\dot{\theta}_0$  par hypothèse, alors la loi horaire est simplement  $\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 \times t$ .
- Q58 8. À l'aide des deux questions précédentes, lorsque la tartine va atteindre le sol, elle aura tourné de  $\theta(\tau) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 \times \tau = \theta_0 + \sqrt{\frac{6ge(1-1/\sqrt{2})}{a^2+4e^2}} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \theta_0 + \sqrt{\frac{12he(1-1/\sqrt{2})}{a^2+4e^2}}$ .

Pour conclure quant au côté sur lequel va tomber la tartine, il faut faire l'application numérique : entre  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ , la tartine tombera du côté sans confiture, alors que ce sera l'inverse entre  $\pi/2$  et  $3\pi/2$ . Numériquement, on trouve que  $\theta(\tau) = 1.7 \times 10^{2}$  : la tartine tombe donc du mauvais coté comme le suggérait l'énoncé.

- 9. On peut voir que le résultat ne dépend pas de g, donc même si la gravité change sur Mars, des créatures de tailles humaines sur Mars aurait donc la même loi de Murphy. Toutefois :
  - ➤ elles auraient un peu plus de temps pour rattraper la tartine avant qu'elle touche le sol, mais peu (un facteur 1,7 environ, la chute reste très rapide);
  - ➤ elles seraient potentiellement de plus grande taille compte tenu de la gravité plus faible (le sujet original demandait d'explorer cette piste en suggérant que d'évaluer la taille pour que la boite crânienne subisse un choc comparable en cas de chute...).

**Remarque :** Certain ont refait l'application numérique en reprennant l'ancienne valeur de  $\dot{\theta}_0$ , mais  $\dot{\theta}_0$  dépend de g lui aussi! D'où l'importance des résultats analytiques que réclament vos enseignants de physique! On "voit" sur le résutlat analytique que g n'intervient pas.