Conseils :

- Ce devoir comporte **3** parties.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).

  Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- L'usage des **calculatrices est** $\boxed{\textbf{interdit}}$. Les applications numériques seront effectuées avec un seul chiffre significatif.

I. De la Terre à la Lune...

Ce problème aborde quelques aspects du Programme Apollo, qui permit à l'Homme de faire son premier pas sur la Lune le 21 juillet 1969. La première partie étudie le départ de la Terre, la seconde l'arrivée sur la Lune.

1 De la Terre ...

La fusée lancée de Cap Canaveral en Floride, se met tout d'abord en orbite circulaire basse autour de la Terre. Elle est ensuite placée sur une orbite elliptique de transfert pour rejoindre finalement une orbite circulaire autour de la Lune. La durée d'une mission est typiquement d'une semaine.

A. Orbite circulaire

Q1 1. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}_G$ exercée par une masse ponctuelle m_1 située en O sur une masse ponctuelle m_2 située en M en fonction de m_1, m_2, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $r = \|\vec{r}\|$ et la constante de gravitation $\mathcal{G}$.

Un satellite de masse m_F est en orbite autour de la Terre à la distance r de son centre.

Q2 2. Donner l'expression de l'énergie potentielle E_{p0} associée, en la choisissant nulle pour $r \to \infty$. Justifier.

La trajectoire est maintenant considérée **circulaire**, de rayon r.

Q3 3. Exprimer la vitesse v_0 de la fusée, ainsi que son énergie cinétique E_{c0}, en fonction de $\mathcal{G}$, m_F, m_T et r.

Q4 4. Exprimer le rapport $\dfrac{T_0^2}{r^3}$, où T_0 représente la période de révolution du satellite, en fonction de $\mathcal{G}$ et m_T.

Quel est le nom de cette loi ? Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a, demi-grand axe de l'ellipse.

Q5 5. Application numérique : calculer v_0 et T_0 pour une orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$) .
On donne $\mathcal{G} \times m_T = 4 \times 10^{14}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-2}}$.

Q6 6. Donner enfin l'expression de l'énergie mécanique de la fusée sous la forme $E_{m0} = -\dfrac{K}{2r}$, en précisant la valeur de K. Justifier.

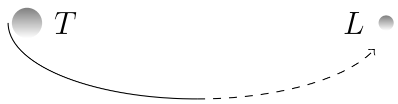
Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a, demi-grand axe de l'ellipse.

2 ... à la Lune.

A. Objectif Lune

A.1. Orbite de transfert

La fusée Saturn V est d'abord placée en orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$) autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune. Les moteurs du troisième étage sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse v_0 à la vitesse v_1, de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de grand axe $2a \simeq d_{TL}$, où d_{TL} représente la distance Terre-Lune.



Q7 7. Exprimer l'énergie mécanique E_{m1} de la fusée lorsqu'elle suit cette nouvelle trajectoire.

Q8 8. En déduire l'expression de la vitesse v_1. Application numérique.

Q9 9. Où est placée la Terre par rapport à cette ellipse ? À quel instant doit-on allumer les moteurs ? Faire un schéma.

Q10 10. Évaluer numériquement la durée t_1 du transfert Terre-Lune (parcours de la moitié de l'ellipse). On donne $d_{TL} = 3{,}8 \times 10^8$ m.

A.2. Orbite lunaire

Au voisinage de la Lune, de rayon R_L et de masse m_L, l'attraction de la Lune devient prépondérante et l'attraction de la Terre devient négligeable.

L'étude se fait désormais dans le référentiel lunocentrique, supposé galiléen.

Les paramètres du vol sont calculés pour qu'en cas de panne des moteurs, la fusée contourne la Lune pour revenir sur la Terre (ce fut le cas lors de la mission Apollo XIII). À l'approche de la Lune, les moteurs de la fusée sont rallumés, de façon à placer la fusée sur une orbite circulaire basse ($r \simeq R_L$) autour de la Lune.

Q11 11. Faut-il freiner ou accélérer ? Justifier qualitativement.

Q12 12. Déterminer numériquement v_2, vitesse associée à une orbite circulaire basse autour de la Lune, avec $\mathcal{G} \times m_L = 4{,}9 \times 10^{12}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-2}}$ et $R_L = 1{,}74 \times 10^3$ km.

B. Atmosphère lunaire

Un gaz parfait, possédant par unité de volume n^* molécules de masse m, exerce sur une surface une pression P. Les molécules de ce gaz sont homocinétiques, c'est-à-dire de vecteur vitesse $\vec{v}$ de norme v constante, mais d'orientation aléatoire. Les molécules de gaz subissent des chocs élastiques sur la surface. Il s'en déduit l'expression $P = \frac{1}{3} n^* \, m \, v^2$

Q13 13. L'atmosphère lunaire est majoritairement composée d'atomes d'argon, libéré lors des réactions nucléaires au sein des roches lunaires. En utilisant l'équation des gaz parfaits, exprimer v en fonction de R, M et T. Calculer v pour $T = 300$ K.
On donne $M = 40$ g.mol^{-1} et $R \simeq 8$ J.mol^{-1}.K^{-1}.

Q14 14. On note v_{lib} la vitesse de libération lunaire ; c'est la vitesse minimale d'un objet pouvant échapper à l'attraction gravitationnelle lunaire. Exprimer la vitesse de libération lunaire en fonction de $\mathcal{G}$, R_L et m_L.

L'application numérique donne $v_{\text{lib}} \simeq 2{,}4.10^3$ m.s^{-1}. Les deux valeurs de vitesses, vitesse quadratique moyenne et vitesse de libération sont proches. Même si $v_{\text{lib}} \geqslant v$, les particules ont la possibilité de s'échapper petit à petit. L'atmosphère lunaire ne saurait subsister. C'est la raison pour laquelle la température lunaire atteint des valeurs extrêmes.

C. Déplacements sur la Lune

C.1. Caractéristiques du sol lunaire

Q15 15. Exprimer le module du champ gravitationnel lunaire g_L à la surface de la Lune, en fonction de g_T, m_T, R_T, m_L et R_L. Faire l'application numérique.

Q16 16. Un bon athlète possède sur Terre une détente verticale de $1\ \mathrm{m}$. Quelle serait cette détente sur la Lune ?

Le sol lunaire est accidenté et modélisé par une surface ondulée de période spatiale λ, d'équation $z(x) = A\cos(2\pi x/\lambda)$.

Un véhicule assimilé à un point matériel M se déplace sur cette surface suivant la loi $x_M(t) = v \times t$, où v est une constante.

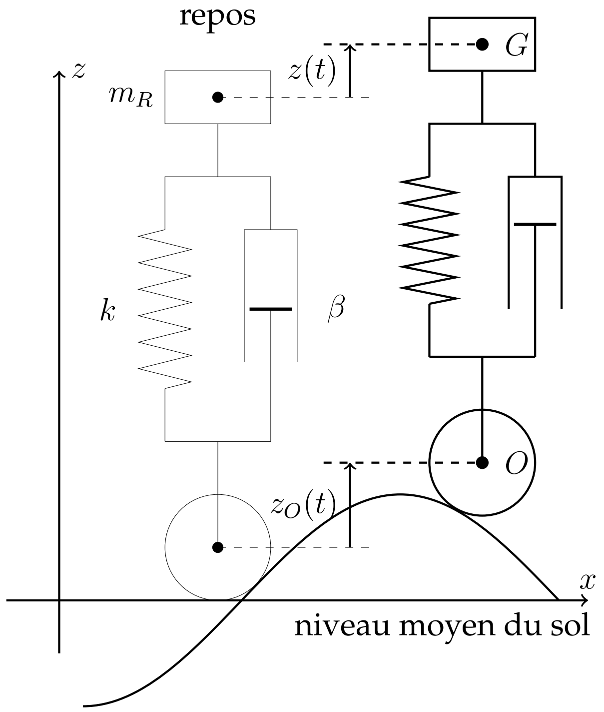
Q17 17. Montrer que $z_M(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω. Relier ω, λ et v.

Q18 18. Déterminer la valeur maximale de A qui assure le maintien du véhicule au sol.

Q19 19. Application numérique : Calculer A_{max} pour $v = 14\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ et $\lambda = 1\ \mathrm{m}$. Conclure.

C.2. Rover lunaire

Les astronautes des missions Apollo XV et suivantes ont utilisé pour leurs déplacements un véhicule spécialement adapté : le rover lunaire. Ce véhicule est sommairement modélisé par un parallélépipède de masse m_R, de centre de gravité G, reposant sur une roue de centre O de masse négligeable. Le vecteur $\overrightarrow{OG}$ reste toujours vertical.



Les positions du centre de gravité et du centre de la roue par rapport à la position de repos sont notées respectivement $z(t) = z_G(t)$ et $z_O(t)$. Le véhicule est relié à la roue par une suspension modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 et un amortisseur fluide de constante d'amortissement β. La force exercée sur la masse m_R est donnée par

$$\vec{F}_f = -\beta\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z_O}{\mathrm{d}t}\right)\vec{u}_z$$

Q20 20. Préciser l'allongement Δl du ressort au repos.

La roue restant en contact avec le sol, $z_O(t) = A\cos(\omega t)$.

Q21 21. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m_R, montrer que $z(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{z} + \omega_1\dot{z} + \omega_0^2 z = f(t)$$

en précisant les valeurs de ω_0, ω_1 et de la fonction $f(t)$ en fonction des données.

Q22 22. Montrer que l'amplitude complexe du mouvement du point G est donnée en régime sinusoïdal forcé par :

$$\underline{H} = \frac{\underline{z}}{\underline{z}_O} = \frac{1 + j\frac{\omega\omega_1}{\omega_0^2}}{1 + j\frac{\omega\omega_1}{\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Q23 23. Montrer que pour k suffisamment faible, $\underline{H}$ se réduit à la fonction de transfert d'un filtre passe bas du premier ordre, dont on exprimera la pulsation de coupure ω_c en fonction de β et m_R.

L'amplitude du mouvement vertical de G doit être limitée à environ le dixième de celle de O, pour $v = 14\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$, $\lambda = 1$ m et $m_R = 700$ kg.

Q24 24. Proposer une valeur pour β.

Q25 25. Proposer une valeur pour k. À quoi sert le ressort ?

Q26 26. Quel serait le comportement de ce véhicule sur un terrain de même nature, à la surface de la Terre ?

II. ÉTUDE DU DISPOSITIF OPTIQUE DE PHOTOGRAPHIE

Dans cette partie, nous étudions la prise de photographies numériques terrestres sur un capteur électronique photosensible depuis la fusée.

Les formules suivantes sont rappelées :

Lentilles : Pour un objet AB orthogonal à l'axe optique avec A sur l'axe optique, on note $A'B'$ l'image par une lentille mince de centre O, de foyer objet F et image F' et de distance focale $f' = \overline{OF'}$. Les relations suivantes sont alors vérifiées :

- relations de conjugaison et formule du grandissement de Descartes (avec origine au sommet)

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

- relations de conjugaison et formule du grandissement de Newton (avec origines aux foyers)

$$\overline{FA}.\overline{F'A'} = \overline{FO}.\overline{F'O} = -f'^2 \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

A. Construction de l'image obtenue

Afin d'étudier les images de la surface de la Terre par un dispositif optique, nous nous plaçons dans le cadre de l'optique géométrique et de l'approximation de Gauss. L'espace entre l'objet photographié et la fusée sera considéré comme du vide pour le tracé des rayons lumineux.

Q27 1. Comment qualifie-t-on les rayons lumineux utilisés dans l'approximation de Gauss ? Quelles sont leurs deux propriétés ?

Le dispositif optique permettant la photographie est modélisé simplement par une lentille sphérique mince convergente $\mathscr{L}$ de distance focale image f' et un capteur.

Q28 2. Sur votre copie, reproduire le schéma de la figure 1 en précisant les foyers objet F et image F'. Tracer avec soin la construction de l'image d'un objet réel PM situé sur l'axe optique. Caractériser l'image obtenue (réelle ou virtuelle, agrandie ou rétrécie, de même sens ou inversée). Justifier par un calcul le grandissement et le sens.

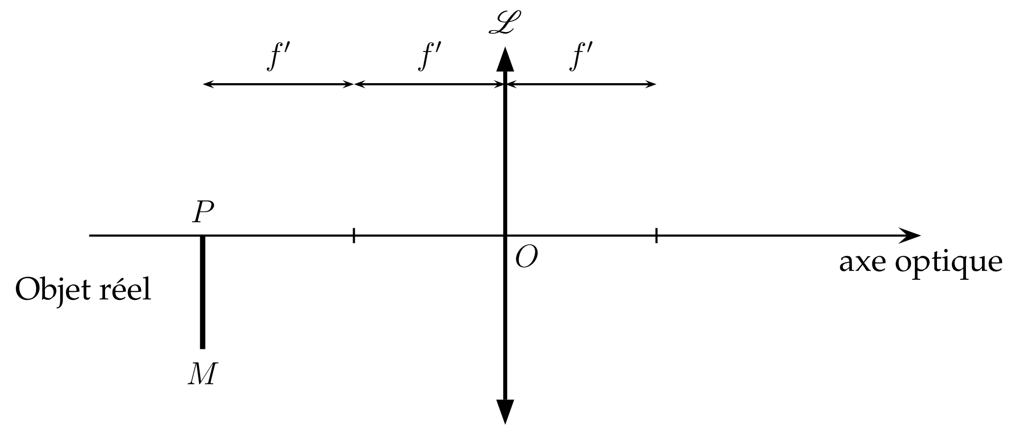


FIGURE 1 – À reproduire sur votre copie.

Q29 3. L'objet PM se situe sur Terre à une distance de 35×10^3 km de la fusée. La distance focale image de la lentille $\mathscr{L}$ est de $f' = 5$ m. À partir de la relation de conjugaison de Descartes, déterminer où se situe l'image de l'objet PM ? Justifier.

Q30 4. La taille des pixels du capteur est de 1 μm. Quelle est la dimension du plus petit objet détectable ?
L'emprise sur le sol de l'image réalisée est de 70 km. En déduire le nombre nécessaire de pixels sur la largeur du capteur.

Q31 5. Sur votre copie, reproduire le schéma de la figure 2 et compléter avec soin le tracé des rayons lumineux provenant d'un objet réel situé à l'infini dont les rayons sont inclinés d'un angle α par rapport à l'axe optique.

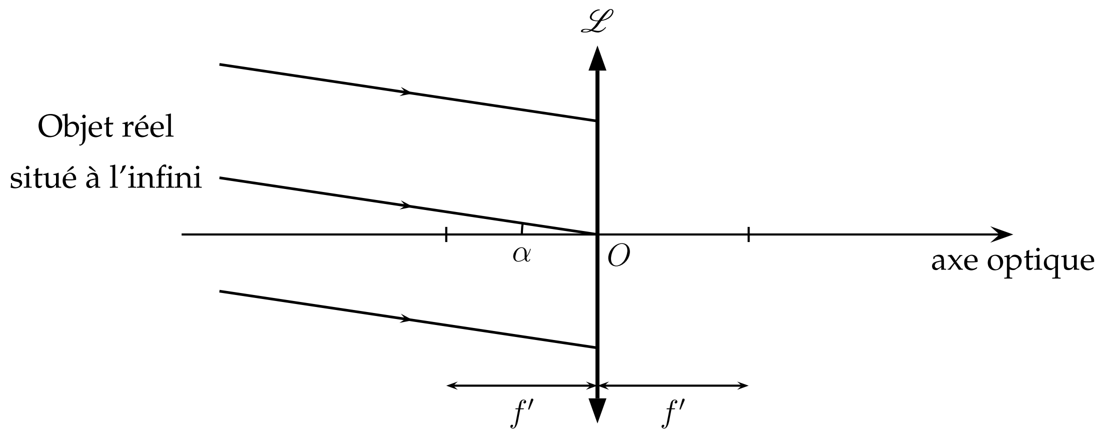


FIGURE 2 – À reproduire sur votre copie.

B. Influence de la longueur d'onde

Pour un milieu transparent comme le verre de la lentille mince utilisée, dans le domaine du visible, son indice de réfraction n varie avec la longueur d'onde λ suivant la loi empirique de Cauchy

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad , \quad \text{avec } A = 1{,}5 \text{ et } B = 3{,}8 \times 10^2 \text{ nm}^2$$

La distance focale image f' de la lentille $\mathscr{L}$ est donnée en fonction de son indice n par la relation

$$f'(\lambda) = \frac{C}{n(\lambda) - 1} \quad , \quad C \text{ étant une constante positive.}$$

Dans la suite, les notations adoptées sont synthétisées dans le tableau 1.

Couleur du rayonnement	Longueur d'onde	Pour la lentille		
		Indice	Distance focale image	Foyer image
bleu	$\lambda_B = 486$ nm	n_B	f'_B	F'_B
jaune	$\lambda_J = 589$ nm	n_J	f'_J	F'_J
rouge	$\lambda_R = 656$ nm	n_R	f'_R	F'_R

TABLEAU 1 – Résumé des notations

Q32 6. Montrer que l'expression de la distance focale image f'_J associée au rayonnement jaune peut s'écrire

$$f'_J = \frac{C}{A-1}\left(1 + \frac{B}{(A-1)\lambda_J^2}\right)^{-1}.$$

Q33 7. En approximant λ_J à 6×10^{-7} m, montrer que $\frac{B}{(A-1)\lambda_J^2} \ll 1$. Simplifier alors l'expression de la question précédente à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 du type $(1+\varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ lorsque ε tend vers 0.

Q34 8. Justifier sans calcul la position des foyers images F'_B et F'_R sur l'axe optique par rapport à F'_J. Représenter sur votre copie un schéma indiquant la position des foyers images F'_B, F'_J, F'_R et le centre optique O de la lentille $\mathscr{L}$.

Q35 9. Qu'est-ce que le stigmatisme ? Est-il vérifié ici ? Quelle en est la conséquence ?

C. Correction des défauts

Afin de limiter les aberrations, une lentille sphérique mince $\mathscr{L}_2$ de centre optique O_2 en verre flint (verre plus dispersif que la lentille précédente) est ajoutée. L'indice n_2 du verre flint suit également la loi de Cauchy

$$n_2(\lambda) = A_2 + \frac{B_2}{\lambda^2} \quad , \quad A_2 \text{ et } B_2 \text{ étant deux constantes positives et } A_2 > 1.$$

Sa distance focale image est donnée par la relation

$$f'_2(\lambda) = \frac{C_2}{n_2(\lambda) - 1} \quad , \quad C_2 \text{ étant une constante dont on cherche à déterminer le signe.}$$

Cette deuxième lentille est accolée à la première lentille $\mathscr{L}$ de centre optique O. On suppose que les points O et O_2 sont confondus.

La distance focale image du système $\{\mathscr{L} + \mathscr{L}_2\}$ formé par les deux lentilles accolées est notée f'_T.

Q36 10. Montrer que

$$\frac{1}{f'_T} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f'_2}$$

Q37 11. Déterminer l'expression de $\frac{1}{f'_T}$ en fonction de A, B, C, A_2, B_2, C_2 et λ.

Q38 12. Établir une relation entre C, B, C_2 et B_2 permettant de supprimer totalement les aberrations chromatiques.

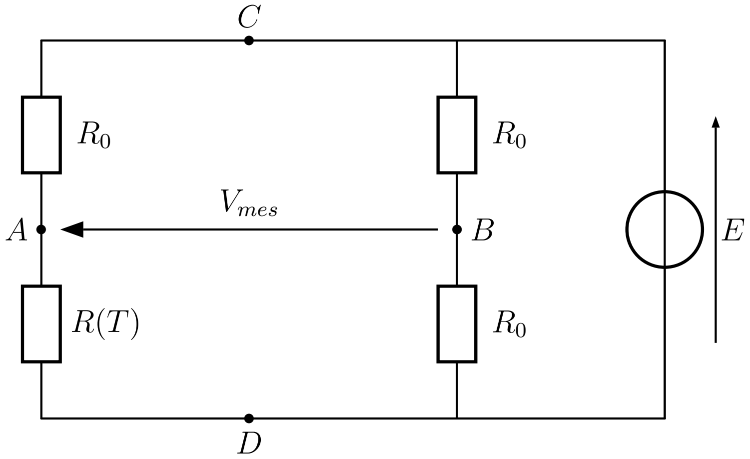
Q39 13. Quel est nécessairement le signe de C_2 ? En déduire la nature convergente ou divergente de la lentille $\mathscr{L}_2$.

III. Mesure de température

Il est important que la température soit contrôlée pour protéger les astronautes. On se propose dans cette partie d'étudier un montage permettant de déterminer la température via la variation de résistance d'un composant avec la température. On utilise pour cela fréquemment des résistances de platine "Pt100". Dans le cas où les variations de températures ne sont pas trop importantes, la résistance du fil de platine varie de façon affine avec la température :

$$R(T) = R_0(1 + \alpha(T - T_0))$$

La résistance variant faiblement ($2\ \Omega$ pour 10°C environ), il est important d'avoir un montage capable de détecter de faible variation de résistance. On propose pour cela le montage suivant :



Q40 1. Déterminer la tension V_{mes} en fonction de R_0, $R(T)$ et E.

2. On pose $x = \alpha(T - T_0)$. Si la gamme de température est suffisamment réduite, alors $x \ll 1$.
Q41 En déduire une expression simplifiée de V_{mes} en fonction de R_0, x et E.

Tous les capteurs ont un temps de réponse, c'est-à-dire qu'un certain temps est nécessaire avant de renvoyer une mesure stable. Dans le cas du capteur présenté ici, ce temps de réponse est lié à l'équilibre thermique entre le fil de platine et le système dont on cherche à mesurer la température. On se propose d'étudier la variation de T en fonction du temps lors de la mise en contact du thermomètre et du système dont on souhaite mesurer la température. On notera C la capacité thermique du fil de platine.

Q42 1. (a) En utilisant le premier principe de la thermodynamique entre deux instants proches, exprimer le transfert thermique δQ_r reçu par le platine en fonction de $\mathrm{d}T = T(t+\mathrm{d}t) - T(t)$ et des constantes du problème.

(b) Les transferts thermiques entre le fil de platine et le milieu extérieur pendant une durée $\mathrm{d}t$ peuvent s'exprimer sous la forme $\delta Q_p = \beta(T - T_1)\,\mathrm{d}t$ où T_1 est la température du milieu extérieur, T celle du fil de platine et β une constante positive.
Q43 Donner la relation entre δQ_r et δQ_p. Justifier.

Q44 (c) Établir l'équation différentielle sur la fonction $T(t)$.

Q45 2. Définir une constante de temps τ en lien avec l'équation différentielle obtenue à la question précédente. Sans résoudre l'équation différentielle, tracer une courbe $T(t)$ plausible en indiquant sur votre courbe T_1 et τ.

Q46 3. Si $\tau = 4\,\mathrm{s}$, quelle valeur proposez-vous pour le temps de réponse de ce capteur ? Expliquer.

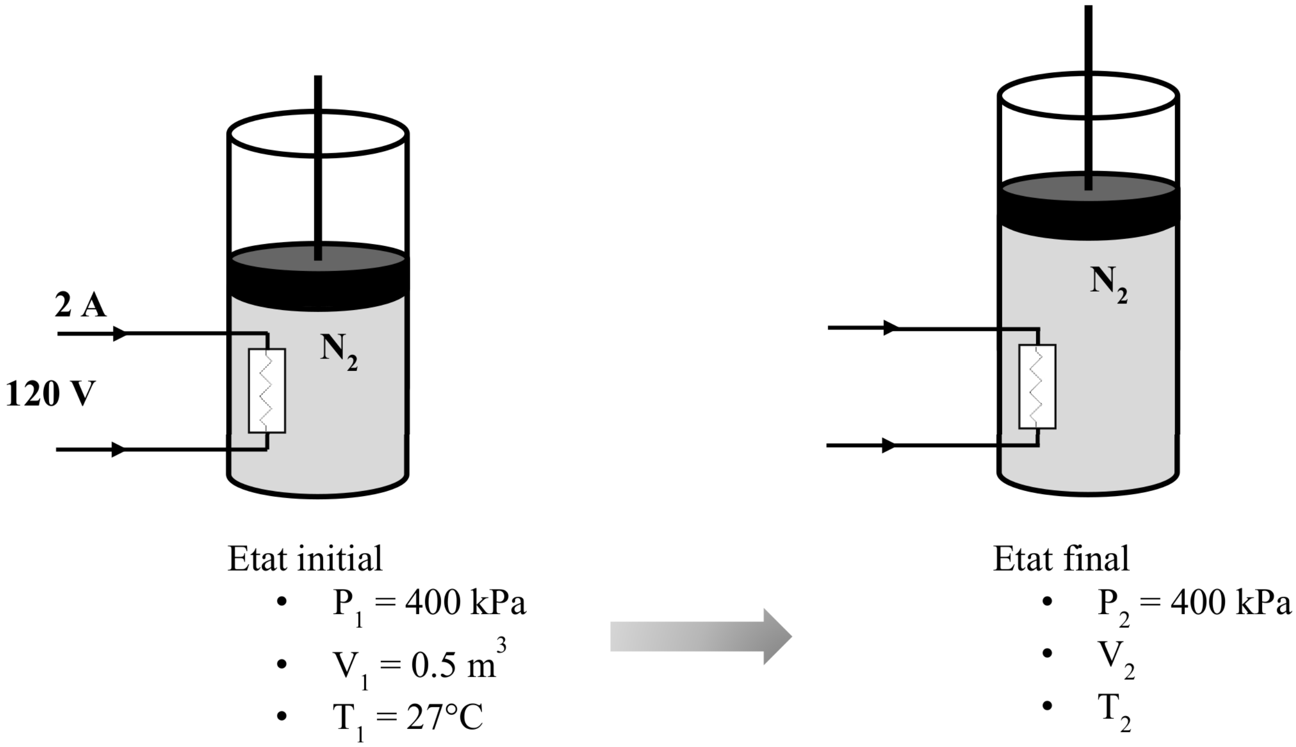
IV. CHAUFFAGE D'UN GAZ PARFAIT

On considère un cylindre fermé par un piston coulissant sans frottement. Le cylindre contient $V_1 = 0{,}5$ m^3 de diazote à la pression de $P_1 = 400$ kPa et à la température de $t_1 = 27$ °C.

Un élément chauffant électrique (résistance) est plongé dans le cylindre et permet de chauffer le gaz. On considère la résistance de capacité calorifique négligeable.

Elle est allumée et un courant de $I = 2$ A y circule pendant 5 minutes sous une différence de potentiel électrique de $U = 120$ V.

Pendant l'évolution, le gaz se détend à pression constante. On considère également des fuites thermiques : $Q_c = 2800$ J est perdu par le système au profit du milieu extérieur. On suppose que le diazote est un gaz parfait, et que la transformation est infiniment lente.



Données :

- masse molaire du diazote : $M(N_2) = 28$ g.mol^{-1}.
- la capacité thermique massique du diazote est constante et vaut $c_p = 1{,}039$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}
- la constante molaire des gaz parfaits : $R = 8{,}314$ J.mol^{-1}.K^{-1}.

1. Généralités : On note C_p et C_V les capacités thermiques à pression et à volume constant et γ le rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$. Ces trois grandeurs seront considérées comme étant constantes vis-à-vis de la température et de la pression.

Q47 (a) Rappeler l'équation d'état d'un gaz parfait. On désigne par n le nombre de moles.

Q48 (b) Rappeler la relation qui lie la fonction d'état enthalpie H à la fonction d'état énergie interne U.

Q49 (c) Rappeler les définitions de C_V et C_p. Comment se simplifient ces définitions dans le cas d'un gaz parfait ?

Q50 (d) Montrer que pour un gaz parfait : $C_p - C_V = nR$ (relation de Mayer).

Q51 (e) Exprimer C_V et C_p en fonction de n, R et γ.

2. Ici on nous donne c_p la capacité thermique massique à pression constante et à volume constant. Exprimer C_p en fonction de c_p et des constantes du problème (en particulier sans n). Q52

3. Calcul de la température finale

Q53 (a) Appliquer le premier principe avec l'enthalpie lors de cette transformation. Justifier

(b) En déduire la température finale T_2 en fonction de C_p la capacité thermique et des données du problème. Q54

Fin

Remarque générale pour les A.N. : vous ne pouvez pas laisser un résultat sous la forme $\sqrt{3/4\frac{10^3}{10^2}}$ m/s, ce n'est pas une application numérique. Il faut faire le calcul (il était demandé avec 1 C.S.) et donner un résultat approché : par exemple $8{,}5$ m/s

I. De la Terre à la Lune...

Adapté de Centrale TSI 2012

1 De la Terre ...

A. Orbite circulaire

Q1 1. $\boxed{\vec{F}_G = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}$. Ne pas confondre $\vec{r}$ et $\vec{e}_r$, répondre en fonction des données de l'énoncé.

2. En coordonnées sphériques $\vec{F}_G = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$ et le déplacement élémentaire est $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$. L'énergie potentielle, si elle existe, est telle que $\mathrm{d}E_{p0} = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathrm{d}r$. On en déduit $\frac{\mathrm{d}E_{p0}}{\mathrm{d}r} = \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}$ soit $E_{p0} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r} + cte$. Le terme en $1/r$ tend vers 0 quand
Q2 $r \to \infty$ d'où $cte = 0$. $\boxed{E_{p0} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r}}$

Attention, c'est bien les coordonnées sphériques qui sont pertinentes et non polaires, sinon l'expression de la force est fausse. Dans la suite, les mouvement sont plan, ce qui fait que le "r" représente la même chose en sphérique et en polaire.

3. On applique le principe fondamental de la dynamique à la fusée dans le référentiel défini par l'énoncé. La trajectoire étant plane (car circulaire), on se place en coordonnées cylindro-polaire. $m_F\vec{a} = -\mathcal{G}\frac{m_F m_T}{r^2}\vec{e}_r$, soit en projetant selon $\vec{e}_r$: $-m_F r\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}\frac{m_F m_T}{r^2} \Rightarrow (r\dot{\theta})^2 = \mathcal{G}\frac{m_T}{r} \Rightarrow$
Q3 $\boxed{v_0 = \sqrt{\mathcal{G}\frac{m_T}{r}}}$ et $\boxed{E_{c0} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{r}}$. (La projection selon $\vec{e}_\theta$ donne $r\ddot{\theta} = 0$ ce qui montre aussi que la vitesse est constante.)

4. D'après la question précédente : $(r\dot{\theta})^2 = \mathcal{G}\frac{m_T}{r}$. La vitesse étant constante, on peut dire que $\dot{\theta} = 2\pi/T_0$, d'où $4\pi^2\frac{r^3}{T_0^2} = \mathcal{G}m_T$. On en déduit la $\boxed{\text{3e loi de Kepler}}$: $\frac{T_0^2}{r^3} = cte$ où $cte = \boxed{\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_T}}$.
Q4 (Remarque, l'expression de la constante n'était pas connue lorsque Kepler a établi cette loi empiriquement, la 3e loi de Kepler est donc à strictement parler $\frac{T_0^2}{r^3} = cte$ sans donner la valeur de la constante. De façon "moderne", on donne généralement la valeur de la constante en plus).

Q5 5. $v_0 = \sqrt{\frac{6{,}7\times10^{-11}\times6\times10^{2}4}{6{,}4\times10^6}} \simeq \sqrt{6\times10^7} \simeq \sqrt{60}\times\sqrt{10^6} = \boxed{8\cdot10^3\ \text{km/s}}$.
$T_0 = 2\pi R_T/v_0 = 6{,}3\times6400/8 \simeq \boxed{5000\ \text{s}}$ (1h20min environ).

Q6 6. D'après la question 6 : $E_{c0} = \frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{r}$. De plus, $E_{p0} = -\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{r}$, d'où
$\boxed{E_{m0} = -\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{2r} = -\frac{K}{2r} \text{ avec } K = \mathcal{G}m_T m_F.}$

2 ... à la Lune.

A. Objectif Lune

A.1. Orbite de transfert

7. En utilisant le résultat admis à la question précédente (et démontré en cours) :

Q7 $E_m = -\frac{K}{2a} \boxed{= -\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{d_{TL}}}$ (ne pas laisser a, mais utiliser les notations de l'énoncé).

8. La vitesse est passée de façon quasi instantanée de v_0 à v_1, donc l'énergie potentielle n'a pas varié : $E_{p1} = E_{p0} = -\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{R_T}$.

> ***Attention à ne pas remplacer r dans l'énergie potentielle par la première distance qui vous passe sous la main, mais bien par la distance entre l'astre attracteur et l'objet, soit R_T ici.***

$E_m = E_c + E_p$ d'où $-\mathcal{G}\frac{m_T m_F}{d_{TL}} = \frac{1}{2}m_F v_1^2 - \mathcal{G}\frac{m_T m_F}{R_T}$ soit $v_1^2 = 2\mathcal{G}m_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{d_{TL}}\right)$ $\boxed{v_1 = \sqrt{2\mathcal{G}m_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{d_{TL}}\right)}}$

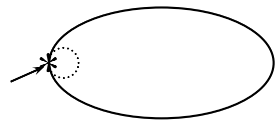
Q8 $v_1 = \sqrt{2 \times 4 \times 10^{14}\left(\frac{1}{6{,}4\times10^6} - \frac{1}{3{,}8\times10^8}\right)} \simeq v_1 = \sqrt{2 \times 4 \times 10^{14}\left(\frac{1}{6{,}4\times10^6}\right)} = 1{,}1 \times 10^4$ m/s, soit $\boxed{11 \text{ km/s}}$ (soit extrêmement proche de la vitesse de libération).

9. Puisque la Terre est l'astre attracteur, alors elle est située au $\boxed{\text{foyer}}$ de l'ellipse (cf démonstration en DM).

Q9

Compte tenu du temps de trajet, il faut allumer les moteurs à un instant t tel que la Lune se retrouve à proximité de l'apogée à un instant $t + t_1$ (avec t_1 la durée de transfert telle que définie par l'énoncé) : il faut donc s'y prendre en avance pour tenir compte du mouvement de la Lune (vous pouvez penser au fait d'envoyer un ballon à quelqu'un qui bouge, si vous l'envoyez à sa position actuelle, lorsque le ballon arrivera, il sera dans le dos de la personne : il faut donc viser devant la personne).

On allume les moteurs au niveau du périgée de la trajectoire souhaitée (ce point n'est pas évident, mais est fortement suggéré par le schéma de l'énoncé).



10. Dans ce genre de question où la vitesse varie et où la trajectoire est une ellipse, il serait très difficile de faire un calcul direct : le mieux est généralement d'utiliser les lois de Kepler.

$T^2/a^3 = T_0^2/R_T^3$ d'après la 3e loi de Kepler soit $T = T_0\left(\frac{d_{TL}}{2R_T}\right)^{3/2}$

De plus $t_1 = \frac{T}{2}$ puisque l'on parcourt la moitié de l'ellipse en terme d'aire, soit $t_1 = \frac{T_0}{2}\left(\frac{d_{TL}}{2R_T}\right)^{3/2}$.

Q10 Numériquement $t_1 = \frac{1}{2} \times 1{,}3 \times \left(\frac{3{,}8\times10^8}{1{,}28\times10^7}\right)^{3/2}$ $t_1 = \frac{1}{2} \times 1{,}3 \times (30)^{3/2} = \frac{1}{2} \times 1{,}3 \times (2{,}7 \times 10^4)^{1/2} = \frac{1}{2}1{,}3 \times 1{,}6 \times 10^2 = 100$ h soit environ $\boxed{4 \text{ jours}}$ (on trouve plutôt 5 si on fait correctement l'application numérique).

On peut aussi utiliser la valeur de la constante dans la 3e loi de Kepler ce qui doit donner le même résultat numérique.

> ***Attention, la distance à parcourir n'est pas d_{TL} puisque l'on est sur une ellipse et de plus la vitesse n'est pas constante (à cause de la loi des aires). Des réponses du type $\frac{d_{TL}}{v_1}$ ou $\frac{\pi d_{TL}}{v_1}$ n'ont donc aucune raison d'être valide.***

A.2. Orbite lunaire

11. On souhaite "s'attacher" (en terme d'orbite) à la Lune, il faut donc tomber dans son puit de
Q11 potentiel : il faut donc $\boxed{\text{freiner}}$ pour diminuer son énergie mécanique.
On peut aussi remarquer que lors du départ de la terre, les applications numériques nous disent que pour passer de l'orbite basse à l'orbite de transfert, on a du augmenter la vitesse (d'environ 3 km/s), il parait donc naturel que cela se passe dans l'autre sens pour passer de l'orbite de transfert à l'orbite basse.

12. On a à nouveau un mouvement circulaire, on peut réutiliser le résultat démontré au début
Q12 du problème dans le cas de la Terre ($v_0 = \sqrt{\mathcal{G}\frac{m_T}{r}}$) en adaptant les notations : $v_2 = \sqrt{\mathcal{G}\frac{m_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{4{,}9}{1{,}7} \times 10^{12-6}} = 1{,}5 \times 10^3$ m/s (on trouve plutôt $\boxed{1{,}7 \text{ km/s}}$ si on fait correctement l'application numérique).
Remarque : même si vous reprennez un résultat déjà démontré, dites le et citez la question où il a été démontré.

B. Atmosphère lunaire

13. D'après l'équation d'état du gaz parfait $PV = Nk_BT$ avec N le nombre de particule ($N = n\mathcal{N}_A$). Or $P = \frac{1}{3}n^* \, m \, v^2 = \frac{1}{3}\frac{N}{V} \, m \, v^2$ d'où $k_BT = \frac{1}{3} \, m \, v^2$ et finalement $v = \sqrt{3\frac{k_BT}{m}} = \sqrt{3\frac{k_B\mathcal{N}_AT}{\mathcal{N}_Am}} = \boxed{\sqrt{3\frac{RT}{M}}}$

Q13 Numériquement $\boxed{v = \sqrt{3\frac{8\times 300}{40\times 10^{-3}}} = 400 \text{ m/s}}$ (attention au g/kg)

Attention à ce que représente les notations, ici m est la masse d'une particule, alors que dans $n = m/M$, m représente la masse d'un échantillon de $N = n\mathcal{N}_A$ particules ! N'appliquez pas de formule «sans réfléchir» à ce que représente les variables.

14. La vitesse de libération est telle que $E_m = 0$ à la surface de l'astre (cas limite entre un état lié
Q14 et un état de diffusion). On en déduit $\frac{1}{2}mv_{lib}^2 - \frac{\mathcal{G}mm_L}{R_L} = 0$ d'où $\boxed{v_{lib} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_L}{R_L}}}$.

C. Déplacements sur la Lune

C.1. Caractéristiques du sol lunaire

15. Le poids est principalement lié à l'interaction gravitationnelle avec la planète, ainsi $mg_T = \frac{\mathcal{G}mm_T}{R_T^2}$ soit $g_T = \frac{\mathcal{G}m_T}{R_T^2}$ et de même $g_L = \frac{\mathcal{G}m_L}{R_L^2}$.

Q15 On en déduit $\boxed{g_L = g_T\frac{m_LR_T^2}{m_TR_L^2}} = 9{,}8\frac{4{,}9\times 10^{12}}{4\times 10^{14}}\left(\frac{6{,}4}{1{,}7}\right)^2 = 9{,}8 \times \frac{1}{100}4^2 = \boxed{1{,}6 \text{ m/s}^2}$.

16. L'énergie de pesanteur au sommet du saut est mg_Tz_T sur Terre et mg_Lz_L sur la Lune. <u>Si</u> l'athlète parvient à fournir la même énergie sur la lune (i.e. même vitesse initiale), alors on
Q16 en déduit que z_L est 6 fois plus grand que z_T puisque la gravité est six fois plus faible, soit une détente verticale de $\boxed{6 \text{ m}}$ environ.
Remarque : le fait d'être capable de fournir la même énergie ou la même vitesse initiale n'a rien d'évident, il s'agit d'une hypothèse potentiellement criticable et qu'il faut expliciter. On

ne peut pas simplement dire « la gravité est 6 fois plus faible donc on saute 6 fois plus haut ». De nombreuses lois de la physique ne sont pas juste linéaire.

17. $z(x(t)) = A\cos(2\pi v t/\lambda) = A\cos\left(\left[\frac{2\pi v}{\lambda}\right] t\right)$: on a donc effectivement une fonction sinusoïdale
Q17 du temps avec $\boxed{\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}}$.

18. Pour ne pas avoir de décollement du sol, il ne faut pas que la réaction normale du sol sur le rover s'annule. Système : { rover}; bilan des efforts : {poids + réaction du sol }; référentiel : lunaire, galiléen pour des durées suffisamment faible.

En projetant le principe fondamental de la dynamique selon l'axe vertical, on trouve $m\ddot{z} = R_N - mg_L$, soit $R_N = m(g_L + \ddot{z})$

Pour que le véhicule reste au sol, il faut que $g_L + \ddot{z} \geqslant 0$ à chaque instant.

$\ddot{z} = -\omega^2 z(t)$ est une fonction sinusoïdale d'amplitude $\omega^2 A$, donc dans le pire des cas (au minimum), $g_L + \ddot{z} = g_L - \omega^2 A$. Pour que $g_L + \ddot{z} \geqslant 0$ à chaque instant, il faut et il suffit donc
Q18 que $g_L - \omega^2 A \geqslant 0$, soit $A \leqslant A_{max} = \frac{g_L}{\omega^2} = \boxed{\dfrac{g_L \lambda^2}{4\pi^2 v^2}}$.

19. Numériquement $A_{max} = 1{,}5\frac{1^2}{4\times10\times4^2}$ (attention au km/h - m/s) soit environ $2{,}5$ mm (2,7 en
Q19 fait). Ce n'est donc pas raisonnable et le contact au sol ne sera pas maintenu, il est nécessaire d'adapter un véhicule. (même sur terre on met des suspensions ! mais la valeur des paramètres n'est pas la même)

C.2. Rover lunaire

20. Système : le châssis du véhicule (le parallélépipède de masse m_R) ; bilan des forces : poids + la force donnée par l'énoncé F_f + la force du ressort $\vec{F} = -k\Delta l \vec{u}_z$; référentiel : lunaire comme précédemment.

Au repos, la somme des forces est nulle et le rover est immobile ($\dot{z} = \dot{z}_O = 0$), d'où en
Q20 projetant le PFD selon $\vec{u}_z$: $0 = -m_R g_L - k\Delta l \Rightarrow \boxed{\Delta l = -\dfrac{m_R g_L}{k}}$.

21. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m_R (même système/référentiel que précédemment), et en projetant selon Oz, on obtient

$$m_R\ddot{z} = -m_R g_L - k(l(t) - l_0) - \beta\left(\dot{z} - \dot{z}_O\right)$$

Or d'après le schéma, $l(t) - l_0 = \Delta l + z(t) - z_O(t)$, et on a vu à la question précédente que $0 = -m_R g_L - k\Delta l$, d'où

$$m_R\ddot{z} = -k(z(t) - z_O(t)) - \beta\left(\dot{z} - \dot{z}_O\right) \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\beta}{m_R}\dot{z} + \frac{k}{m_R}z(t) = \frac{\beta}{m_R}\dot{z}_O(t) + \frac{k}{m_R}z_O(t)$$

Q21 Ce qui donne par identification : $\boxed{\omega_1 = \frac{\beta}{m_R}\,;\, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_R}}\,;\, f(t) = \omega_1\dot{z}_O(t) + \omega_0^2 z(t)}$.

Attention à ce genre de problème où z est défini par rapport à la position d'équilibre. Ce choix facilite la suite des calculs car il permet de supprimer les constantes du second membre de l'équation différentiel, mais il faut être extrêmement prudent au moment d'exprimer $l(t)$ en fonction de $z(t)$ et il faut justifier son résultat à l'aide d'un schéma.

Un autre moyen simple de justifier sans se tromper est d'utiliser la relation de Chasles : $l = \overline{OG} = z_G - z_O = (z_G - z_{eq}) + z_{eq} - z_O = z(t) + (l_0 + \Delta l) - z_O$

Q22 22. En régime sinusoïdal forcé, l'équation précédente devient

$$-\omega^2\underline{z} + j\omega\omega_1\underline{z} + \omega_0^2\underline{z} = j\omega\omega_1\underline{z}_O + \omega_0^2\underline{z}_O \Leftrightarrow \frac{\underline{z}}{\underline{z}_O} = \frac{j\omega\omega_1 + \omega_0^2}{-\omega^2 + j\omega\omega_1 + \omega_0^2} = \boxed{\frac{1 + j\frac{\omega\omega_1}{\omega_0^2}}{1 + j\frac{\omega\omega_1}{\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

Q23 23. Si k est très faible, alors ω_0^2 est très faible, ainsi $1 \ll \frac{\omega\omega_1}{\omega_0^2}$ et la fonction de transfert devient $\underline{H} = \dfrac{j\frac{\omega\omega_1}{\omega_0^2}}{j\frac{\omega\omega_1}{\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \dfrac{\omega_1}{\omega_1 + j\omega} = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$: $\underline{H}$ se réduit à la fonction de transfert d'un filtre passe bas du premier ordre, de pulsation de coupure $\boxed{\omega_c = \omega_1 = \dfrac{\beta}{m_R}}$.

Q24 24. En module, $H = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2/\omega_1^2}}$, il faut donc $(\omega/\omega_1)^2 = 99 \simeq 100$, soit $\omega_1 = \omega/10$

Ce qui donne $\beta = m_R\frac{2\pi v}{10\lambda} = 70 \times 2 \times 3 \times 4 = 1600$ kg/s. Pour plus de sécurité et pour tenir compte des arrondis des applications numériques faites à la main, je proposerai $\boxed{\beta = 2 \times 10^3 \text{ kg/s}}$.

Q25 25. Pour vérifier les conditions de l'énoncé, il faut $\omega_0 \ll \omega_1 \ll \omega \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m_R}} \ll \frac{\beta}{m_R} \Rightarrow k \ll \frac{\beta^2}{m_R} = 4 \times 10^6/700 \simeq 5 \times 10^3$ N/m

On peut donc proposer $\boxed{5 \times 10^2 \text{ N/m}}$ pour avoir un facteur 10. Il ne faut pas non plus trop baisser k car le ressort sert à maintenir une position d'équilibre autour de laquelle on peut varier dans les deux sens (dit autrement, une position au repos qui ne serait pas en butée de l'amortisseur).

(En fait il suffit que $\omega_0^2 \ll \omega_1\omega$ ce qui est un peu moins restrictif).

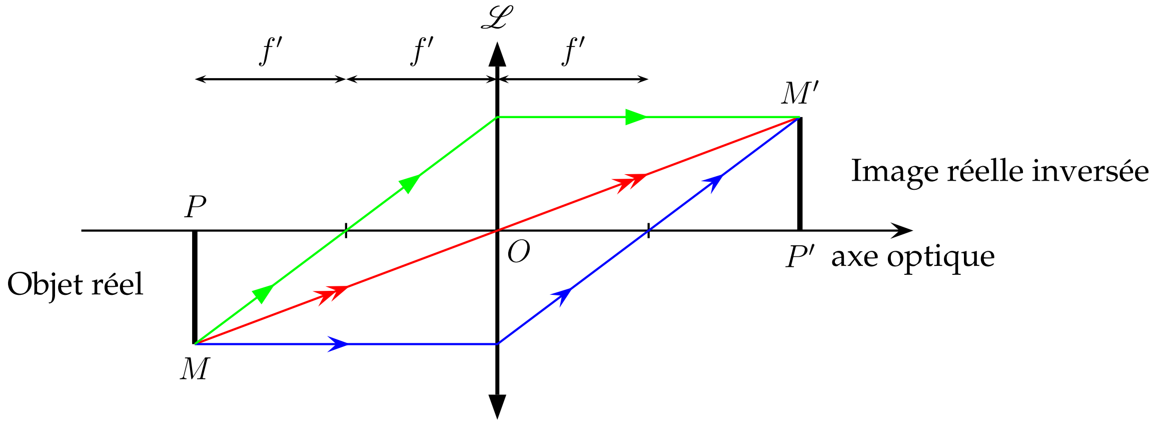
Q26 26. g n'intervient pas dans les équations établies (à partir du moment où l'on fait l'hypothèse de non décollement). On en déduit que le comportement serait le même, mais il faudrait un ressort adapté pour avoir une position d'équilibre raisonnable compte tenu de la plus forte gravitée. (a priori plus grande raideur et/ou plus grande longueur à vide).

II. Étude du dispositif optique de photographie

A. Construction de l'image obtenue

Q27 1. Dans l'approximation de Gauss , les rayons sont $\boxed{\text{peu éloignés}}$ de l'axe optique et $\boxed{\text{peu inclinés par rapport à l'axe optique}}$: rayons $\boxed{\text{paraxiaux}}$.
Les conséquences sont le stigmatisme et l'aplanétisme approché (non demandé ici).

Q28 2. L'image obtenue est $\boxed{\text{réelle, de même taille et inversée}}$.

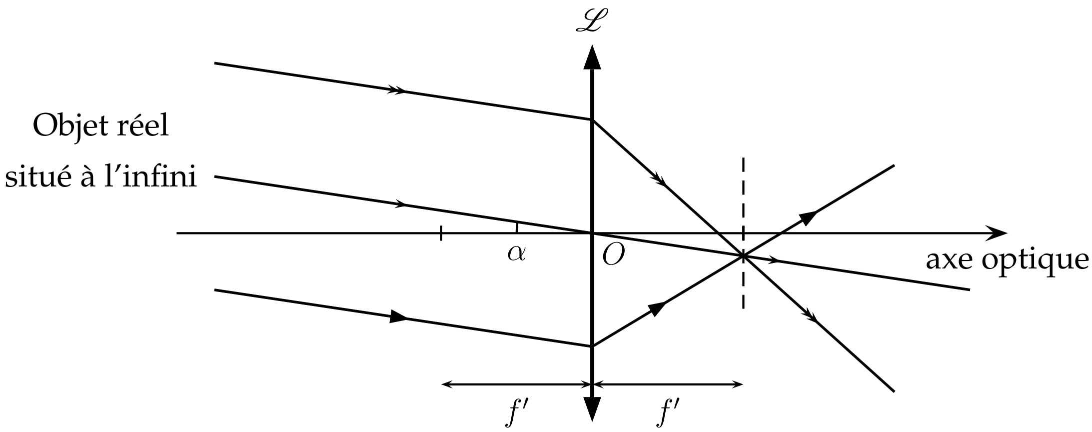


En effet : $\frac{1}{\overline{OP'}} - \frac{1}{\overline{OP}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$ avec $\overline{OP} = -2f'$
$\frac{1}{\overline{OP'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OP}} = \frac{1}{\overline{OF'}} - \frac{1}{2\overline{OF'}} = \frac{1}{2\overline{OF'}}$ d'où $\overline{OP'} = 2f'$
or $\gamma = \frac{\overline{P'M'}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{2f'}{-2f'} = \boxed{-1}$ d'où même taille ($|\gamma| = 1$) et inversée ($\gamma < 0$).

Q29 3. $OP = 35.10^3$ km donc $OP \gg f'$ donc on peut considérer que l'image se forme au $\boxed{\text{foyer image de } \mathcal{L}}$.

Q30 4. $d'(\text{pixel}) = 1\ \mu$m. Or $|\gamma| = \frac{d'}{d} = \frac{OP'}{OP}$ d'où $d = d' \times \frac{OP}{OP'} = 1.10^{-6} \times \frac{35.10^6}{5}$
La dimension du plus petit objet détectable est donc $\boxed{d = 7 \text{ m}}$.
Pour observer 70 km, il faut $\frac{70.10^3}{7}$, soit $\boxed{10000 \text{ pixels}}$.

Q31 5. Des rayons parallèles convergent au foyer secondaire image, dont on trouve la position en prolongeant le rayon passant par le centre



B. Influence de la longueur d'onde

Q32 6. Remplaçons $n(\lambda_J)$ par son expression dans f'_J : $f'_J = \frac{C}{n(\lambda_J)-1} = \frac{C}{A+\frac{B}{\lambda_J^2}-1} = \frac{C}{A-1+\frac{B}{\lambda_J^2}} = \frac{C}{(A-1)\left(1+\frac{B}{(A-1)\lambda_J^2}\right)}$

$$\boxed{f'_J = \frac{C}{A-1}\left(1+\frac{B}{(A-1)\lambda_J^2}\right)^{-1}}$$

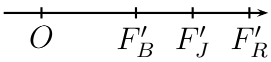
7. Évaluons $\frac{B}{(A-1)\lambda_J^2} \simeq \frac{3{,}8.10^2}{0{,}5\times(600)^2} \simeq \frac{8.10^2}{36.10^4} \simeq \frac{2}{9}10^{-2} \simeq 2.10^{-3} \ll 1$

On peut alors faire un DL de l'expression précédente pour obtenir : $\boxed{f'_J = \frac{C}{A-1}\left(1-\frac{B}{(A-1)\lambda_J^2}\right)}$

Q33

Si on vous demande un DL, c'est pour avoir quelque chose de plus "subtil" que simplement la limite : il ne faut donc pas se limiter à l'ordre 0 (surtout que l'énoncé donnait la formule à l'ordre 1).

8. $\lambda_B \leqslant \lambda_J \leqslant \lambda_R$ donc $-\frac{1}{\lambda_B^2} \leqslant -\frac{1}{\lambda_J^2} \leqslant -\frac{1}{\lambda_R^2}$ donc d'après le résultat de la question précédente :

Q34 $\boxed{f'_B \leqslant f'_J \leqslant f'_R}$ 

Justifier votre réponse, et ce d'autant plus que l'énoncé donnait la réponse sur un schéma plus loin.

Q35 9. Stigmatisme : $\boxed{\text{L'image d'un point est un point.}}$ Non vérifié ici à cause des foyers différents pour des longueurs d'ondes différentes.
On obtient alors des $\boxed{\text{aberrations chromatiques}}$, c'est-à-dire que l'image d'un point non monochrome est une tache colorée, chaque couleur formant un point à une position légèrement différente. On a donc une image $\boxed{\text{floue et irisée}}$ sur les bords.

C. Correction des défauts

Q36 10. Pour 2 lentilles accolées de même centre : $A \longrightarrow A' \longrightarrow A''$. A' joue donc le role de l'image pour la première lentille et de l'objet pour la seconde.
$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ et $\frac{1}{\overline{OA''}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'_2}$. On prend le même centre car les deux lentilles sont accolées.
Soit en sommant : $\frac{1}{\overline{OA''}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{f'_T}$
On obtient $\boxed{\frac{1}{f'_T} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f'_2}}$. Cette forme factorisée en fonction de λ est intéressante compte tenu du contexte.

Q37 11. En remplaçant les expressions des distances focales en fonction des indices :
$\frac{1}{f'_T} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f'_2} = \frac{n(\lambda)-1}{C} + \frac{n_2(\lambda)-1}{C_2} = \frac{(A+\frac{B}{\lambda^2})-1}{C} + \frac{(A_2+\frac{B_2}{\lambda^2})-1}{C_2}$
$$\boxed{\frac{1}{f'_T} = \left[\frac{A-1}{C} + \frac{A_2-1}{C_2}\right] + \left[\frac{B}{C} + \frac{B_2}{C_2}\right]\frac{1}{\lambda^2}}$$

Q38 12. Pas d'aberration chromatique si f'_T est indépendant de λ cad si $\boxed{\frac{B}{C} + \frac{B_2}{C_2} = 0}$.

Q39 13. B, C et B_2 réels positifs donc on a C_2 négatif. D'où $\boxed{\mathscr{L}_2 \text{ est divergente}}$.

III. Mesure de température

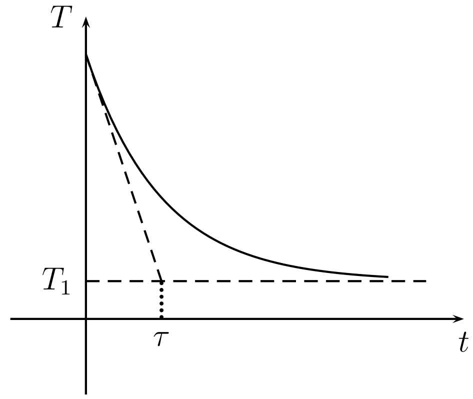
Q40 1. $V_{mes} = V_A - V_B$ et $E = V_C - V_D$. À l'aide de deux diviseurs de tension :
$V_C - V_A = \frac{R_0}{R_0+R}E$ et $V_C - V_B = \frac{R_0}{R_0+R_0}E = \frac{E}{2}$ (on peut aussi utiliser le point D comme point intermédiaire plutôt que le C). On trouve après calculs : $\boxed{V_{mes} = \frac{R-R_0}{2(R_0+R)}E}$

Q41 2. On pose $x = \alpha(T-T_0) \ll 1$. $V_{mes} = \frac{R_0(1+x)-R_0}{2(R_0+R_0(1+x))}E = \frac{R_0 x}{2(2R_0+R0x}E = \frac{x}{4(1+\frac{x}{2})}E$
$\boxed{V_{mes} \simeq \frac{xE}{4}}$ en ne gardant que le premier ordre en x. On trouve bien une tension mesurée proportionnelle à la différence de température.

Q42 1. (a) En appliquant le premier principe (sous forme différentielle) au fil de platine, on obtient : $\mathrm{d}U = C\mathrm{d}T = \delta Q_r$

Q43 (b) Le transfert thermique δQ_p correspond à des pertes thermiques (si $T > T_1$, fil plus chaud que le milieu extérieur, alors $\delta Q_p > 0$). Il est égal en valeur absolue à δQ_r mais correspond à l'opposé de du transfert thermique reçu.
$\boxed{\delta Q_r = -\delta Q_p}$.

Q44 (c) D'où $C\mathrm{d}T = -\beta(T - T_1)\,\mathrm{d}t$. $\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{T-T_1} = \frac{\beta}{C}\mathrm{d}t}$



Q45 2. On peut définir une constante de temps $\boxed{\tau = \frac{C}{\beta}}$.

Q46 3. Si $\tau = 4\,\mathrm{s}$, on peut supposer que le régime établi sera atteint au bout de 5τ soit environ $\boxed{20\,\mathrm{s}}$.

IV. CHAUFFAGE D'UN GAZ PARFAIT

1. (a) $\boxed{pV = nRT}$ pour n mole de gaz occupant un volume V sous une pression p et à une
Q47 température T.

Q48 (b) $\boxed{H = U + pV}$

(c) Par définition : $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$. Or pour un gaz parfait, H ne dépend que de T
Q49 d'où $\boxed{C_p = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\mathrm{d}T}}$. De même $\boxed{C_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}}$.

(d) À partir de : $H = U + pV = U + nRT$. En dérivant par rapport à T, on obtient
Q50 $\boxed{C_p = C_V + nR}$ d'où le résultat demandé.
Attention, si on n'a pas simplifié à la question précédente, on est géné car a priori $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \neq \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P$ en général. De même, attention, les formules $U = \frac{3}{2}nRT$ ou $U = \frac{5}{2}nRT$ ne sont valables que pour un GP monoatomique ou diatomique (respectivement).

Q51 (e) De plus $C_p = \gamma C_V$ d'où $C_V(\gamma - 1) = R \Rightarrow \boxed{C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_p = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1}}$.

Q52 2. $C_p = mc_p = nMc_p$
Calculons le nombre de moles à partir des paramètres de l'état initial : $n = \frac{p_1V_1}{RT_1}$ d'où
$\boxed{C_p = \frac{Mp_1V_1c_p}{RT_1}}$
Remarque : Attention à ne pas mettre juste P, V, T mais bien P_1, V_1, T_1 qui sont des grandeurs définies par l'énoncé et connue.

3. Calcul de la température finale :

(a) Considérons le système gaz d'azote et résistance. Il subit une transformation isobare
Q53 donc on peur appliquer le premier principe avec l'enthalpie.

L'azote étant un gaz parfait et comme on néglige la capacité thermique de la résistance, on a $\Delta H = C_p(T_2 - T_1) + 0 \times (T_2 - T_1)$

D'autre part, le système reçoit un travail par effet Joule $UI\tau$ et «perd» un transfert thermique Q_c (donc reçoit $-Q_C$). On a donc :

$\boxed{\Delta H = C_p(T_2 - T_1) = UI\tau - Q_c}$

Attention, en terme de raisonnement, si on veut considérer $UI\tau$ comme un transfert thermique, il faut que la résistance ne fasse pas partie du système (et réciproquement). Dans ce cas, l'énergie venant de la résistance est en effet un transfert thermique. Mais pour justifier qu'il vaut $UI\tau$, il faut faire un premier principe sur la résistance : $\Delta U = W + Q_{gaz\to res}$, or la capacité de la résistance est négligeable, donc $\Delta U = 0 \Rightarrow Q_{gaz\to res} = -UI\tau$, et compte tenu de la convention thermodynamique, $Q_{res\to gaz} = -Q_{gaz\to res}$. Voici tous les arguments nécessaires. On peut observer que le raisonnement est plus simple si on inclus la résistance dans le système.

Q54 (b) d'où $\boxed{T_2 = T_1 + \dfrac{1}{C_p}(UI\tau - Q_c)}$