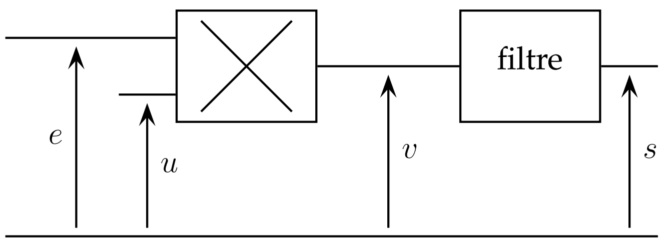
Conseils :

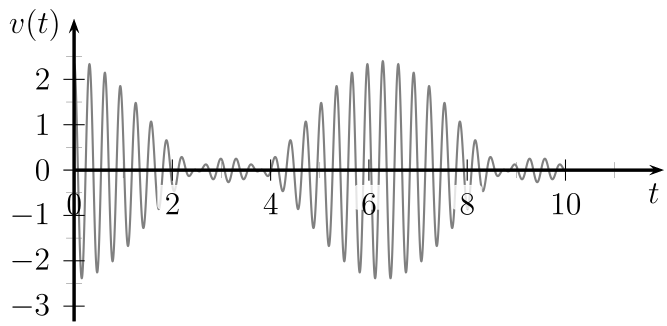
- Ce devoir comporte 4 exercices indépendants.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).

  Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- Changer de page pour un nouvel exercice.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

I. DÉMODULATION SYNCHRONE

On considère le montage suivant utilisant un multiplieur. Le signal $e(t)$ qui *contient* l'information à basses fréquences (musique ou voix humaine par exemple, en $(1 + m\cos\omega t)$) est multiplié par une tension à hautes fréquences $u(t)$ (on appelle porteuse cette tension à hautes fréquences), ce qui donne le signal $v(t)$ représenté ci-dessous. Ceci permet de transporter par voie hertzienne le signal sur de longues distances. Le but du jeu est ensuite de récupérer uniquement le signal informatif $e(t)$.





La tension $v(t)$ peut s'écrire sous la forme $v(t) = ke(t)u(t)$ où k est une constante positive caractéristique du multiplieur.

On envoie sur une entrée un signal $e(t) = V_0(1 + m\cos\omega t)\cos\Omega t$ et sur l'autre la tension $u(t) = V\cos\Omega t$ avec $\Omega \gg \omega$. En sortie du multiplieur, le signal traverse un filtre pouvant être de type passe-bas ou passe-haut selon le traitement souhaité.

Q1 1. Représenter en le justifiant le spectre du signal $v(t)$ en sortie du multiplieur. On rappelle que le spectre représente l'amplitude des différentes composantes spectrales en fonction de la fréquence. Pour cela, on décomposera au préalable le signal $v(t)$ sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales.

Q2 2. On dispose de deux filtres dont les caractéristiques sont données en fin d'énoncé. Lequel permet de sélectionner le signal informatif en $(1 + m\cos\omega t)$? Préciser la valeur de sa fréquence de coupure.

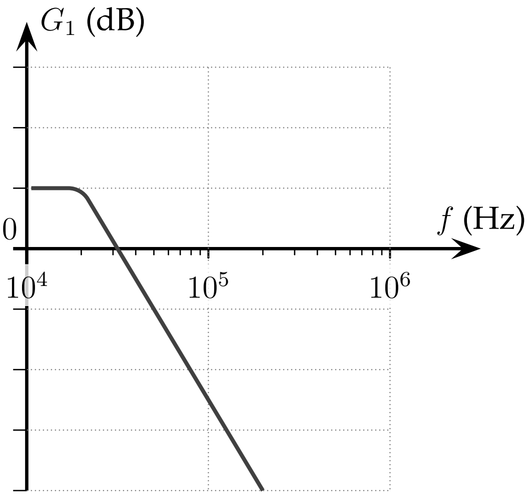
Q3 3. Exprimer la tension $s(t)$ obtenue en sortie du filtre, en fonction de k, V, V_0, m, H_0, ω et t.

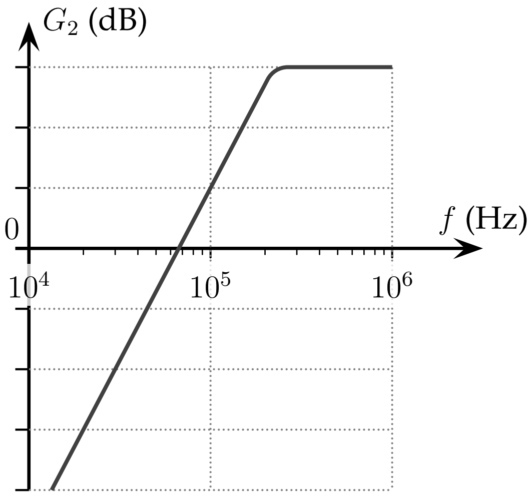
4. On considère toujours le filtre choisi. À 100 kHz, on a une valeur absolue du gain $|G_{dB}|$ de
Q4 l'ordre de 50 dB. Déduire de cette mesure et des autres informations disponibles la valeur de H_0 et l'ordre du filtre.

Filtre 1	Filtre 2
Fonctions de transfert	
$\underline{H_1}(j\omega) = \dfrac{H_0}{1+\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^n}$	$\underline{H_2}(j\omega) = \dfrac{H_0\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^n}{1+\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^n}$

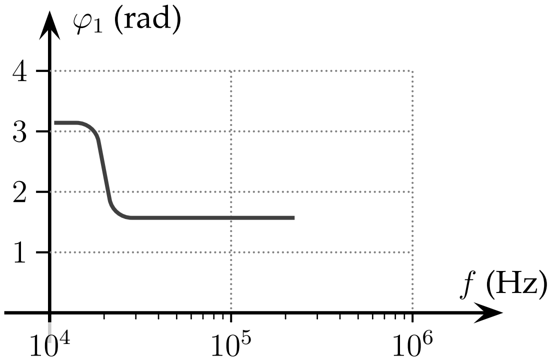
Courbes de gain

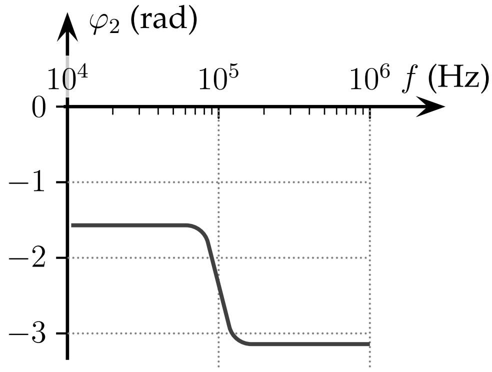
(Certaines données sont volontairement absentes des axes des ordonnées)



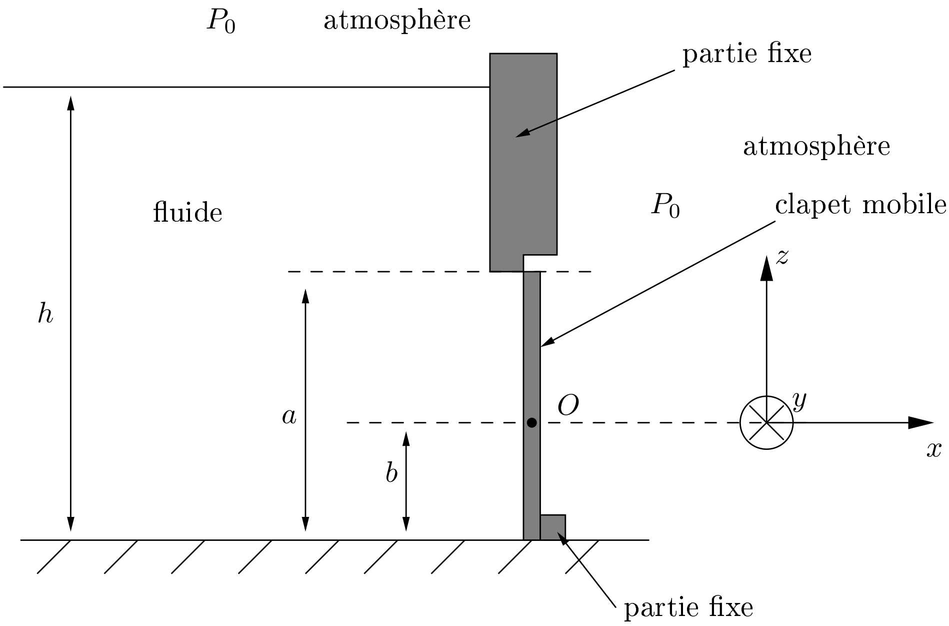


Courbes de phase





II. Ouverture d'un clapet de sécurité



On considère un clapet de sécurité rectangulaire de largeur l (dans la direction $\vec{u_y}$) et de hauteur a articulé autour d'un axe fixe horizontal $\Delta = (O,\vec{u_y})$ où O est un point situé à une hauteur b du fond. Le niveau du liquide, de masse volumique ρ, au dessus du fond du bassin est noté h. La pression atmosphérique de l'air, noté P_0, est supposé homogène.

Q5 1. Rappeler la relation fondamentale de la statique des fluides et les hypothèses associées.

Q6 2. En déduire le champ de pression, noté $P(z)$ régnant dans le fluide en fonction de P_0, ρ, g (l'intensité du champ de pesanteur), h, b et z. On prendra l'origine des altitudes en O en accord avec le schéma. Vérifier de façon explicite la valeur de la pression sur la surface libre en contact avec l'atmosphère.

Q7 3. On appelle pression effective, notée P_{eff}, au niveau du clapet, la différence entre les pressions existantes de part et d'autre du clapet (côté fluide et côté atmosphère). Montrer que

$$P_{\text{eff}}(z) = p(z) - P_0 = \rho g(h - b - z)$$

Q8 4. Déterminer la résultante élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ des forces de pression, exercée sur un élément de surface $\mathrm{d}S$ du clapet à l'altitude z. Représenter la sur un schéma. On exprimera $\mathrm{d}S$ sur le clapet en coordonnées cartésiennes.

Q9 5. Déterminer le moment élémentaire $\mathrm{d}\mathcal{M}_\Delta$ par rapport à l'axe Δ de la force élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ exercée sur un élément de surface $\mathrm{d}S$ du clapet à l'altitude z.

Q10 6. Montrer que le moment sur l'axe Δ des forces de pression s'exerçant sur toute la surface du clapet peut se mettre sous la forme suivante

$$\mathcal{M}_\Delta(\text{pression}) = \rho g l \left[(h-b)\frac{(a-b)^2}{2} - \frac{(a-b)^3}{3} - (h-b)\frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3}\right]$$

7. Les forces s'exerçant sur le clapet sont les forces de pression, la force de la liaison entre l'axe et le clapet ainsi que la force de réaction de la partie fixe inférieure sur le clapet, notée $\vec{R}$. La liaison avec l'axe étant supposée idéale son moment projeté sur Δ vaut zéro.

Q11 (a) Tant qu'il y a contact, quels sont la direction et le sens de $\vec{R}$? En déduire le signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R})$.

Q12 (b) On rappelle que l'équilibre du clapet se traduit par $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R})+\mathcal{M}_\Delta(\text{pression})+\mathcal{M}_\Delta(\text{liaison}) = 0$. En déduire le signe de $\mathcal{M}_\Delta(\text{pression})$ tant que le clapet est fermé.

Q13 8. On désire que le clapet ne s'ouvre pas tant que $h < 10\,a$ et s'ouvre pour $h \geqslant 10\,a$. De quelle équation b est alors solution ?

Q14 9. Résoudre numériquement ou graphiquement cette équation à l'aide de votre calculatrice en prenant $a = 20$ cm.

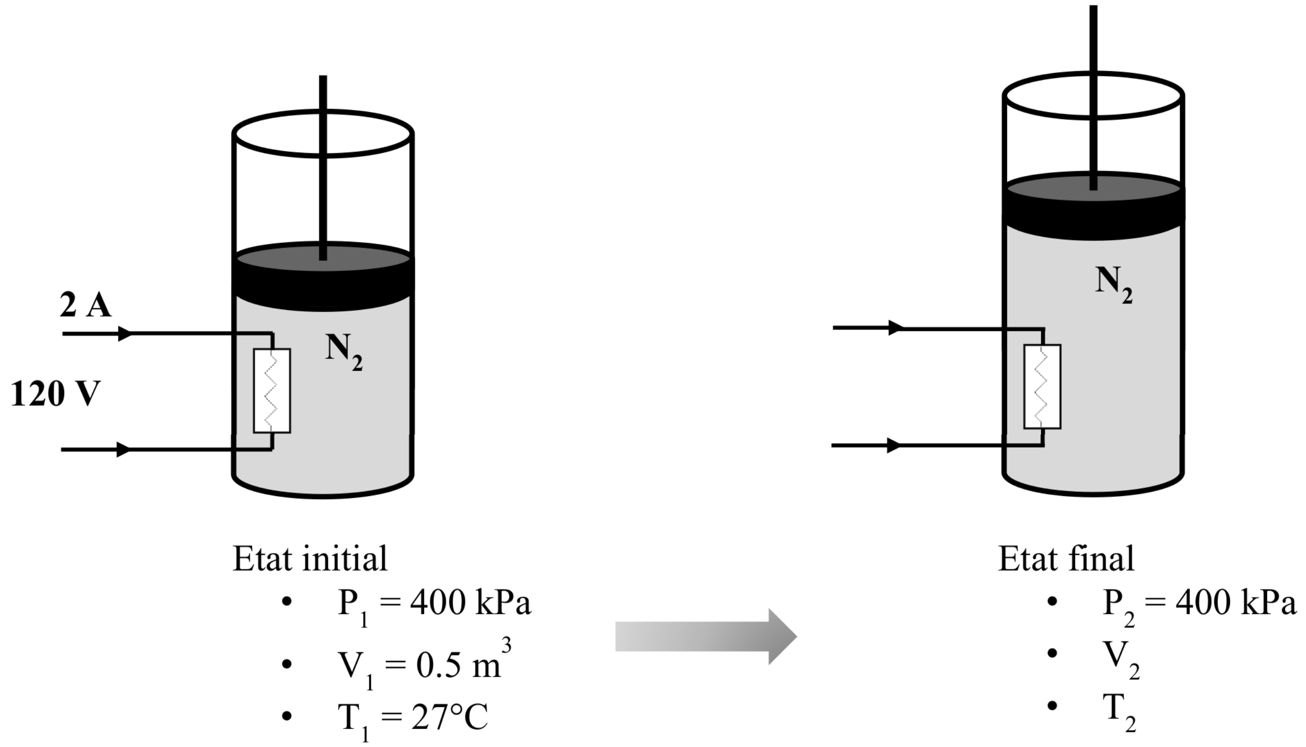
III. Chauffage d'un gaz parfait

On considère un cylindre fermé par un piston coulissant sans frottement. Le cylindre contient $V_1 = 0{,}5$ m^3 de diazote à la pression de $P_1 = 400$ kPa et à la température de $t_1 = 27$ °C.

Un élément chauffant électrique (résistance) est plongé dans le cylindre et permet de chauffer le gaz. On considère la résistance de capacité calorifique négligeable.

Elle est allumée et un courant de $I = 2$ A y circule pendant 5 minutes sous une différence de potentiel électrique de $U = 120$ V.

Pendant l'évolution, le gaz se détend à pression constante. On considère également des fuites thermiques : $Q_c = 2800$ J est perdu par le système au profit du milieu extérieur. On suppose que le diazote est un gaz parfait, et que la transformation est infiniment lente.



Données :

- masse molaire du diazote : $M(N_2) = 28$ g.mol^{-1}.
- la capacité thermique massique du diazote est constante et vaut $c_p = 1{,}039$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}
- la constante molaire des gaz parfaits : $R = 8{,}314$ J.mol^{-1}.K^{-1}.

1. Généralités : On note C_p et C_V les capacités thermiques à pression et à volume constant et γ le rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$. Ces trois grandeurs seront considérées comme étant constantes vis-à-vis de la température et de la pression.

Q15 (a) Rappeler l'équation d'état d'un gaz parfait. On désigne par n le nombre de moles.

Q16 (b) Rappeler la relation qui lie la fonction d'état enthalpie H à la fonction d'état énergie interne U.

Q17 (c) Rappeler les définitions de C_V et C_p. Comment se simplifient ces définitions dans le cas d'un gaz parfait ?

Q18 (d) Montrer que pour un gaz parfait : $C_p - C_V = nR$ (relation de Mayer).

Q19 (e) Exprimer C_V et C_p en fonction de n, R et γ.

2. Ici on nous donne c_p la capacité thermique massique à pression constante et à volume constant. Exprimer C_p en fonction de c_p et des constantes du problème (en particulier sans
Q20 n).

3. Calcul de la température finale

Q21 (a) Appliquer le premier principe avec l'enthalpie lors de cette transformation. Justifier

(b) En déduire la température finale T_2 en fonction de C_p la capacité thermique et des don-
Q22 nées du problème.

Q23 (c) Faire l'application numérique.

IV. AUTOUR DE L'EXPÉRIENCE DE RÜCHARDT...

On note $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ le rapport de la capacité thermique à pression constante C_p sur la capacité thermique à volume constant C_V d'un gaz.

Le fil conducteur de ce sujet est l'étude de l'expérience de Rüchardt servant à mesurer le coefficient γ d'un gaz, ici l'air.

Cet air est contenu dans un récipient de volume $V_0 = 4{,}0$ L surmonté d'un tube en verre de section $s = 2{,}0$ cm^2 et de hauteur $H = 80$ cm. Le volume V_0 est grand devant le volume $H.s$ du tube.

Une bille en acier de masse $m = 17$ g peut se déplacer dans ce tube. Le diamètre de la bille est très voisin de celui du tube si bien que la bille se comporte comme un piston étanche.

On note $P_a = 1{,}0$ bar la pression atmosphérique.

On néglige les frottements dans un premier temps.

L'intensité du champ de pesanteur vaut $g = 10$ m.s^{-2}.

Dans tout le problème les gaz sont supposés parfaits. On note n le nombre de moles d'air enfermé dans le système, p sa pression, V son volume et T sa température.

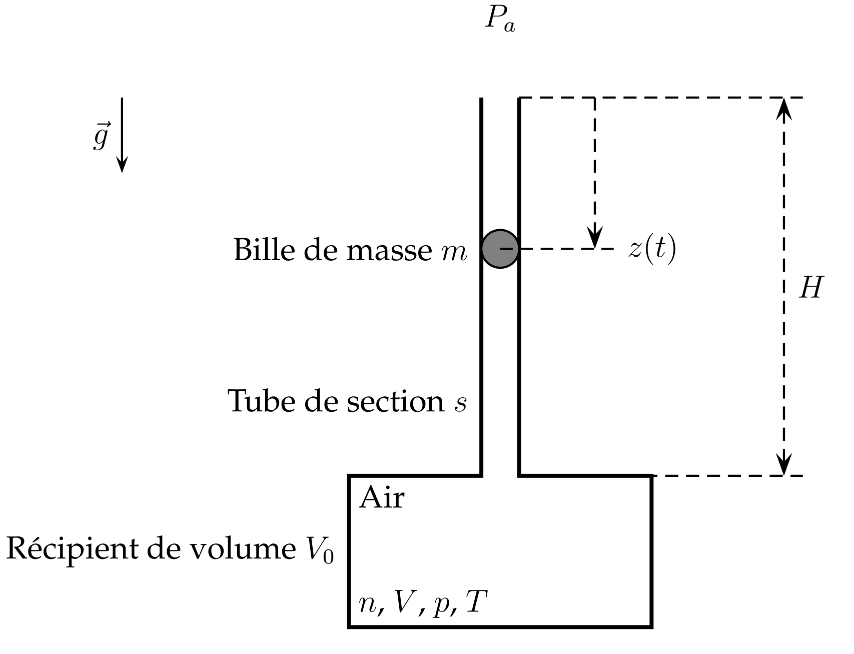


FIGURE 1 – Principe de l'expérience de Rüchardt.

On donne : $(1+\varepsilon)^k \simeq 1 + k\varepsilon$ pour $\varepsilon \ll 1$.

La constante des gaz parfaits vaut $R = 8{,}31$ J.K .mol^{-1}.

A. Étude du mouvement de la bille en régime libre

Lors des mouvements de m, on repère la position de la bille par sa cote $z(t)$ comptée par rapport au haut du tube ; l'axe des z est orienté vers le bas (voir figure 1).

On lâche la bille sans vitesse initiale depuis le haut du tube ($z = 0$). La bille effectue des oscillations dans le tube. En $z = 0$, la pression vaut P_a.

Q24 1. Rappeler les lois de Laplace ainsi que leurs conditions d'application.

Q25 2. Pourquoi peut-on considérer que l'air subit une transformation adiabatique ? Réversible ?

3. En tenant compte de la faible variation du volume V et de pression provoquées par les mouvements de la bille, montrer que :

Q26
$$\frac{p-P_a}{P_a} - \gamma\frac{sz}{Hs+V_0} = 0$$

4. On rappelle que l'on néglige les frottements. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la bille à un instant t quelconque et donner l'équation différentielle vérifiée par
Q27 $z(t)$.
5. En déduire que la période T_0 des oscillations est donnée par :

Q28
$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 m(V_0+Hs)}{\gamma s^2 P_a}$$

La mesure de T_0 permet donc de déterminer γ.

6. En tenant compte des conditions initiales, donner l'expression de $z(t)$ en fonction de g, t et
Q29 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.
7. En déduire la valeur maximale z_{max} de z atteinte au cours du mouvement en fonction de g
Q30 et ω_0 et proposer alors une deuxième méthode pour mesurer γ.

B. Mesures et exploitation en régime libre

Un capteur de pression permet de suivre les oscillations grâce aux variations de la pression. Il délivre une tension u_p, reproduisant les variations de la pression p.

Pour améliorer la précision des mesures, on fait varier le volume du récipient V_0 en introduisant de l'eau dans le récipient. Initialement le volume disponible est minimal noté $V_{0,i}$ et on mesure une période $T_{0,i}$. On peut alors retirer progressivement de l'eau, le volume d'air dans le récipient prenant les valeurs :

$$V_{0,k} = V_{0,i} + kV_1$$

où k est un entier et V_1 est un volume constant. Pour chaque volume $V_{0,k}$, on mesure la période T_k des oscillations de la bille.

1. Écrire T_k^2 en fonction de k. Quel type de courbe obtient-on ? En déduire une méthode pour
Q31 mesurer le coefficient γ de l'air. Dire en quoi cela améliore la méthode de la question A.5.
2. La figure 2 est un enregistrement obtenu à l'oscilloscope des oscillations de la bille. On a utilisé pour le faire le mode de déclenchement de l'oscilloscope « SINGLE » (monocoup).
Q32 Pourquoi ?
3. Mesurer la pseudo-période T des oscillations amorties sur cet enregistrement (on confondra
Q33 T et T_0 dans cette question). En déduire γ et commenter la valeur obtenue.
Q34 4. Les oscillations observées sont donc amorties. Proposer deux sources de dissipation de l'énergie.

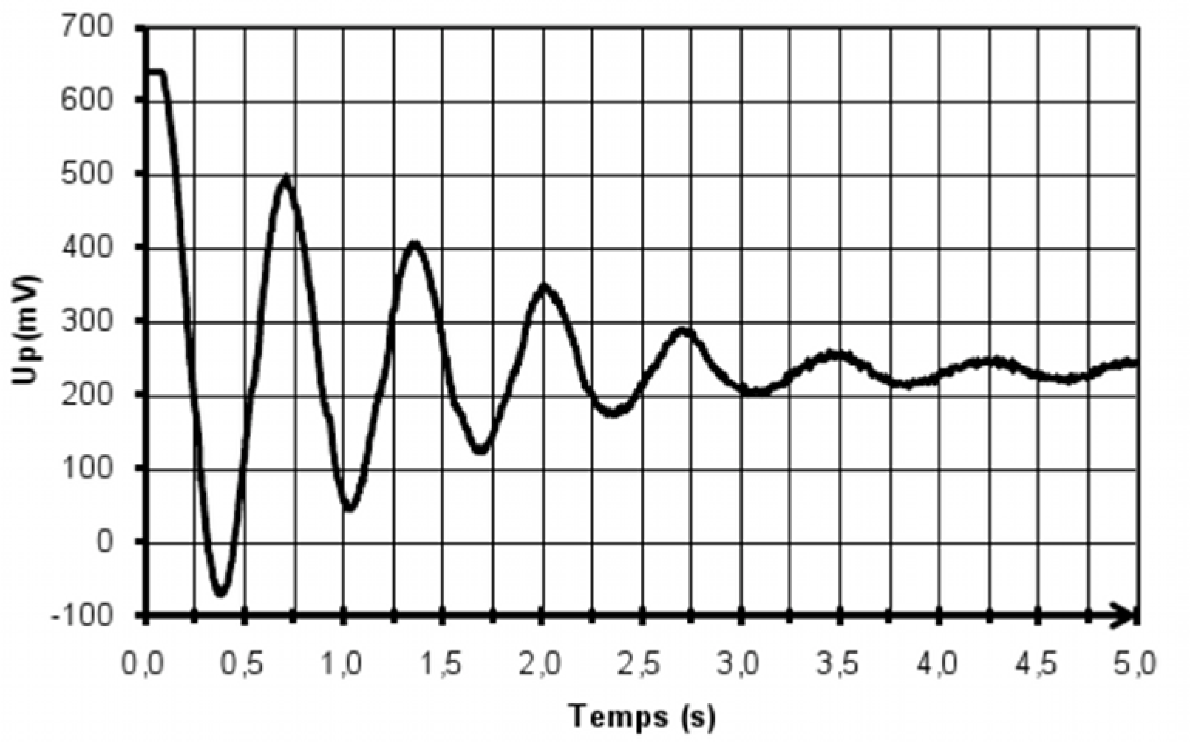


FIGURE 2 – Enregistrement des oscillations de la bille.

5. Pour simplifier, on modélise cet amortissement par une force $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$. Écrire la nouvelle
Q35 équation différentielle vérifiée par $z(t)$ en tenant compte de cette force supplémentaire $\vec{F}$.

Q36 6. La mettre sous la forme

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = cte$$

Donner l'expression de Q en fonction des données du problème.

Q37 Comment s'appelle Q ? Donner la dimension de Q en la justifiant. À quelle condition sur Q obtient-on des oscillations amorties ?

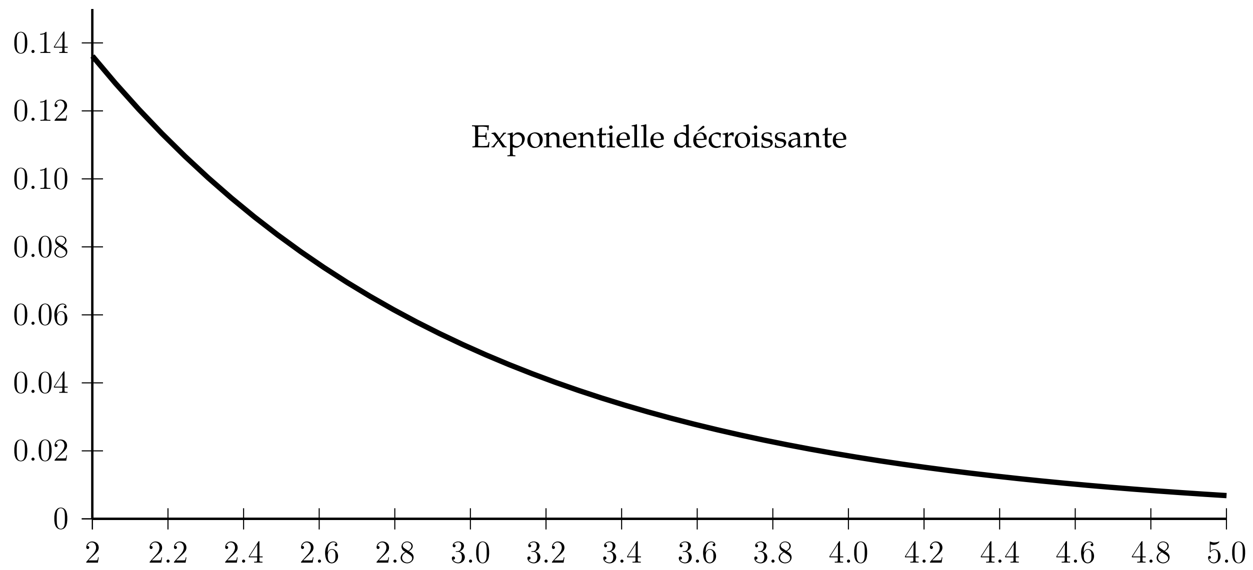


FIGURE 3 – Courbe $y = e^{-x}$

7. (a) Établir l'expression littérale de la pseudo-période T des oscillations amorties en fonction
Q38 de ω_0 et Q.

Q39 (b) L'amplitude $A(t)$ des oscillations décroît exponentiellement : $A(t) = Ae^{bt}$. Que vaut b en fonction de ω_0 et Q ?

Q40 (c) On considère que les oscillations sont négligeables quand leur amplitude est inférieure à 5 % de l'amplitude initiale. Montrer que l'amplitude $A(t)$ devient négligeable devant A au bout de Q oscillations. On pourra s'aider de la courbe de la figure 3.

Q41 (d) En déduire une valeur approximative de Q sans calcul à partir de l'enregistrement de la figure 2. L'expression de la période des oscillations utilisée à la A.5. est-elle valide ?

C. Étude en régime forcé

Voici une autre façon d'exploiter ce dispositif... Grâce à un petit électroaimant alimenté à la pulsation ω (non représenté sur la figure 1), on peut imposer à la bille de masse m une force supplémentaire $F_0.\cos(\omega t)\vec{u}_z$. On ne néglige pas les frottements qui sont modélisés par une force $\vec{F} = -\lambda.\vec{v}$.

On branche l'électroaimant et on attend que le régime forcé s'établisse. On pose $Z(t) = z(t) - z_{eq}$ où z_{eq} est la cote de m à l'équilibre. On admet que l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$ est :

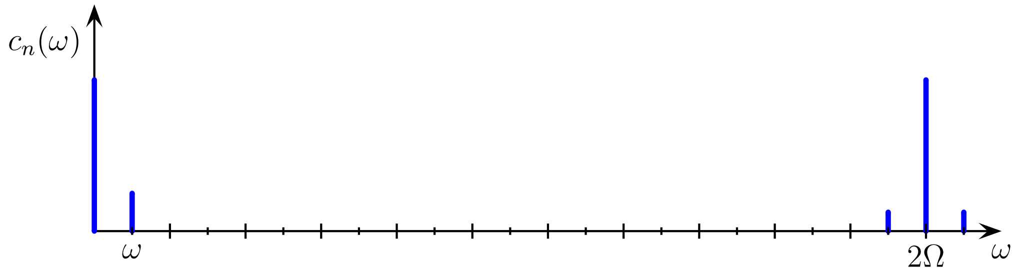
$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

où Q et ω_0 sont des constantes.

1. En régime sinusoïdal forcé,
$$z(t) = Z_0 \cos(\omega t + \varphi)$$
Q42 Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z_0} = Z_0.e^{j\varphi}$ de $\underline{Z(t)}$ où $j^2 = -1$.
En déduire l'amplitude Z_0 des oscillations forcées en fonction de F_0, m, Q, ω_0 et $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.
2. Tracer l'allure de la courbe donnant l'amplitude Z_0 des oscillations forcées en fonction de u : on distinguera deux cas suivant la valeur de Q.
Q43 On précisera les points particuliers suivants : valeur de l'amplitude des oscillations forcées en $u = 0$ et pour $u \to \infty$, position d'éventuels extrema. On suggère d'étudier $1/Z_0^2$ plutôt que Z_0 pour alléger les calculs.
3. Q44 Dans l'expérience de Rüchardt étudiée ici, Q vaut quelques unités. En utilisant la question précédente, proposer une méthode pour déterminer ω_0.
La mesure de ω_0 permet ensuite de remonter au coefficient γ mais ce calcul n'est pas demandé dans cette question.

I. Démodulation synchrone

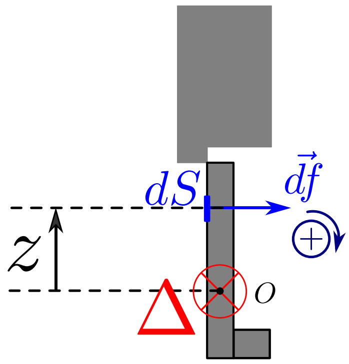
1. On utilise $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$ pour linéariser les formules :
$e(t) = V_0(1 + m\cos\omega t)\cos\Omega t = V_0\left[\cos\Omega t + \frac{m}{2}\cos\Big((\Omega+\omega)t\Big) + \frac{m}{2}\cos\Big((\Omega-\omega)t\Big)\right]$
Puis pour $v(t)$:
$v(t) = ku(t)e(t) = kVV_0\left[\cos\Omega t + \frac{m}{2}\cos\Big((\Omega+\omega)t\Big) + \frac{m}{2}\cos\Big((\Omega-\omega)t\Big)\right]\cos\Omega t$
$v(t) = \frac{kVV_0}{2}\left[1 + \cos 2\Omega t + \frac{m}{2}\Big(\cos\Big((2\Omega+\omega)t\Big) + \cos\Big(\omega t\Big) + \cos\Big((2\Omega-\omega)t\Big) + \cos\Big(\omega t\Big)\Big)\right]$
$\boxed{v(t) = \frac{kVV_0}{2}\left[1 + m\cos\Big(\omega t\Big) + \frac{m}{2}\cos\Big((2\Omega-\omega)t\Big) + \cos 2\Omega t + \frac{m}{2}\cos\Big((2\Omega+\omega)t\Big)\right]}$
Q1 D'où l'allure du spectre :



2. On cherche à récupérer le signal informatif proportionnel à $1 + \cos(\omega t)$, ce qui correspond
Q2 aux basses fréquences. Il faut donc utiliser le filtre passe-bas, cad le filtre 1.
En traçant les asymptotes sur la graphique, on observe qu'elles se coupent pour $\boxed{f_c \simeq 2.10^4 \text{ Hz}}$.
On vérifie bien que $F = \frac{2\pi}{\Omega} \gg f_c$.
3. Le signal d'entrée est $v(t)$ déterminé à la première question. Seuls la valeur moyenne et la composante à ω passent à travers le filtre, avec un gain H_0 à basses fréquences. D'où le
Q3 signal de sortie : $\boxed{s(t) = H_0\frac{kVV_0}{2} + H_0\frac{kVV_0 m}{2}\cos(\omega t)}$
4. Sur le graphe, pour la fréquence 10^5 Hz, on peut donc lire un gain négatif de -50 dB. On peut en déduire que l'écart entre deux graduations est de 20 dB.
L'asymptote à basse fréquences est d'équation $G_{dB} = 20\log(|H_0|)$, de valeur 20 dB sur ce
Q4 graphique. On peut en déduire que $\boxed{|H_0| = 10}$.
Pour un filtre d'ordre n, l'équation de l'asymptote à hautes fréquences est $G_{dB} = 20\log(|H_0|) - 20n\log(\frac{\omega}{\omega_c})$, soit une pente de $-20n$ dB par décade. Sur le graphique, si l'on prolonge l'asymptote, on mesure pour $f = 2.10^4$ Hz un gain de 20 dB, et pour $f = 2.10^5$ Hz un gain de -80 dB soit une pente de -100 dB par décade. D'où l'ordre du filtre $\boxed{n = 100/20 = 5}$.

II. Ouverture d'un clapet de sécurité

1. Relation fondamentale de la statique des fluides : $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}p = \rho\vec{g}}$ (ou $dp = \rho\vec{g}\cdot\vec{dr} = -\rho g dz$)
Q5 pour un fluide au repos dans un référentiel galiléen.
2. $\frac{dp}{dz} = -\rho g$, or la masse volumique de l'eau est constante, donc la relation s'intègre simplement : $p(z) - p(z_0) = -\rho g\,(z - z_0)$. La pression est continue à l'interface avec l'air (en
Q6 $z_0 = h - b$), donc $p(z_0) = P_0$ d'où $\boxed{p(z) = P_0 + \rho g(h - b - z)}$
3. La pression dans l'atmosphère à cette échelle est constante, on a donc
Q7 $\boxed{p_{eff}(z) = p(z) - P_0 = \rho g(h - b - z)}$



Q8 4. $\overrightarrow{dF} = P_{\text{eff}}(z)dS\vec{u}_x = \boxed{P_{\text{eff}}(z)dz\,dy\,\vec{u}_x}$

5. Il FAUT faire un schéma et représenter une force de pression $\overrightarrow{dF}$ sur un élément de surface dS ainsi que le bras de levier de cette force par rapport à Δ. Le bras de levier pour une telle force vaut z, de plus, pour une force appliquée « au dessus » de O, son effet sera de faire tourner le clapet dans le sens horaire, ce qui correspond au sens positif par rapport à l'axe Δ compte tenu de la règle du tire-bouchon. La norme de la force est $dF = P_{\text{eff}}dz\,dy$.

Q9 Son moment vaut donc $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{df}) = +zp(z)dz\,dy}$.

Sur votre schéma, évitez le cas particulier où $\overrightarrow{\mathrm{d}f}$ est représenté au niveau du point O. Cela vous empêche de voir clairement le bras de levier. De même, pour évitez les fautes de signe, faites un schéma avec $z > 0$.

6. Pour obtenir le moment total, il suffit de sommer les moments :
$\mathcal{M}_\Delta(\text{pression}) = \iint \mathcal{M}_\Delta(\vec{df}) = \iint zp(z)dz\,dy$
L'intégrale selon y est immédiate puisque rien ne dépend de y d'où
$\mathcal{M}_\Delta(\text{pression}) = l \times \int_{-b}^{a-b} zp(z)dz = l\rho g \int_{-b}^{a-b}(z(h-b) - z^2)dz$

$$= l\rho g \left[(h-b)\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_{z=-b}^{a-b}$$

Q10 donc $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\text{pression}) = \rho g l \left[(h-b)\frac{(a-b)^2}{2} - \frac{(a-b)^3}{3} - (h-b)\frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3}\right]}$

7. (a) Tant qu'il y a contact, la direction et le sens de $\vec{R}$ sont : selon $\boxed{Ox}$ et vers la $\boxed{\text{gauche}}$ (ou selon $-\vec{u}_x$). $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R})$ est donc positif (tend à faire tourner le clapet dans le sens horaire,
Q11 ce qui donne un signe $\boxed{+}$ compte tenu de la règle du tire bouchon.

(b) D'après le TMC à l'équilibre : $0 = \mathcal{M}_\Delta(\text{pression}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \underbrace{\mathcal{M}_\Delta(pivot)}_{0}$.

Q12 Tant que le clapet est fermé, $\mathcal{M}_\Delta(\text{pression}) = -\mathcal{M}_\Delta(\vec{R})$ Donc il est $\boxed{\text{négatif}}$.

Q13 8. b est solution de $\mathcal{M}_\Delta(\text{pression}) = 0$ avec $h = 10a$, c'est-à-dire :
$\boxed{(10a-b)\frac{(a-b)^2}{2} - \frac{(a-b)^3}{3} - (10a-b)\frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} = 0}$

9. On peut tracer le graphique sur la calculatrice et regarder l'in-
Q14 tersection avec l'axe des abscisses, ce qui donne $\boxed{b = 9{,}8 \text{ cm}}$.
Ou on peut simplifier l'équation ce qui donne $0 = \frac{1}{6}a^2(28a - 57b)$ d'où $\boxed{b = \frac{28}{57}a = 9{,}8 \text{ cm}}$
Ou on peut aussi faire une résolution numérique à la calculatrice (préciser la fonction) ou avec Python avec `fsolve`. On peut aussi procéder par dichotomie (programme à connaitre : vu en terminale en math et au programme de physique en sup)

III. Chauffage d'un gaz parfait

1. (a) $\boxed{pV = nRT}$ pour n mole de gaz occupant un volume V sous une pression p et à une
Q15 température T.

Q16 (b) $\boxed{H = U + pV}$

   (c) Par définition : $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$. Or pour un gaz parfait, H ne dépend que de T
Q17 d'où $\boxed{C_p = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\mathrm{d}T}}$. De même $\boxed{C_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}}$.

   (d) À partir de : $H = U + pV = U + nRT$. En dérivant par rapport à T, on obtient
Q18 $\boxed{C_p = C_V + nR}$ d'où le résultat demandé.

Q19 (e) De plus $C_p = \gamma C_V$ d'où $C_V(\gamma - 1) = R \Rightarrow \boxed{C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \qquad \text{et} \qquad C_p = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1}}$.

Q20 2. $C_p = mc_p = nMc_p$
   Calculons le nombre de moles à partir des paramètres de l'état initial : $n = \frac{p_1 V_1}{RT_1}$ d'où
   $\boxed{C_p = \frac{Mp_1V_1c_p}{RT_1}}$
   Remarque : Attention à ne pas mettre juste P, V, T mais bien P_1, V_1, T_1 qui sont des grandeurs définies par l'énoncé et connue.

3. Calcul de la température finale :
   (a) Considérons le système gaz d'azote et résistance. Il subit une transformation isobare
Q21 donc on peur appliquer le premier principe avec l'enthalpie.
   L'azote étant un gaz parfait et comme on néglige la capacité thermique de la résistance, on a $\Delta H = C_p(T_2 - T_1)$
   D'autre part, le système reçoit un transfert thermique par effet Joule $UI\tau$ et perd Q_c. On a donc :
   $\boxed{\Delta H = C_p(T_2 - T_1) = UI\tau - Q_c}$

Q22 (b) d'où $\boxed{T_2 = T_1 + \frac{1}{C_p}(UI\tau - Q_c)}$

Q23 (c) A.N. $T_2 = 273 + 27 + \frac{8.31 \times 300}{400.10^3 \times 0.5 \times 28.10^{-3}}(12 \times 2 \times 5 \times 60 - 2800)$ $\boxed{T_2 \simeq 330\ \mathrm{K}}$

IV. Autour de l'expérience de Rüchardt...

Petites Mines 2010

A. Étude du mouvement de la bille en régime libre

1. Les lois de Laplace s'utilisent pour un $\boxed{\text{gaz parfait}}$, subissant une transformation $\boxed{\text{adiabatique}}$
Q24 et $\boxed{\text{réversible}}$. On a alors $\boxed{pV^\gamma = cte = p_{initial}V_{initial}^\gamma}$. On en déduit les deux autres : $\boxed{TV^{\gamma-1} = cte'}$
   et $\boxed{p^{1-\gamma}T^\gamma = cte''}$.

2. La transformation peut être considérée comme adiabatique car elle est suffisamment $\boxed{\text{rapide}}$ pour que les transfert thermiques soient négligeables (les transferts thermiques étant lent et les différences de températures faibles). On considère également qu'elle est réversible car suffisamment $\boxed{\text{lente}}$ pour être quasi-statique (soit nettement inférieur à la vitesse du son, donc les pressions peuvent s'équilibrer) et mécaniquement réversible car les frottements
Q25 sont négligés.

3. D'après les lois de Laplace $pV^\gamma = cte = P_a(V_0+Hs)^\gamma$. On peut remplacer V par $V_0+(H-z)s$, d'où $p(V_0+(H-z)s)^\gamma = cte = P_a(V_0+Hs)^\gamma \Rightarrow p = P_a\left(\frac{V_0+Hs}{V_0+Hs-zs}\right)^\gamma = P_a\left(\frac{V_0+Hs-zs}{V_0+Hs}\right)^{-\gamma} = P_a\left(1-\frac{zs}{V_0+Hs}\right)^{-\gamma} \simeq P_a\left(1+\gamma\frac{zs}{V_0+Hs}\right)$

Q26 D'où l'équation $\boxed{\dfrac{p-P_a}{P_a} - \gamma\dfrac{sz}{Hs+V_0} = 0}$

4. La bille est soumise
   - à son poids $mg.\vec{e}_z$ où $\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire vertical descendant,
   - à la force de pression due à l'atmosphère $P_a s.\vec{e}_z$,
   - à la force de pression due au gaz $-ps.\vec{e}_z$ avec $p = P_a\left[\frac{\gamma sz}{Hs+V_0}+1\right]$

   Le principe fondamental de la dynamique $m\vec{a} = \Sigma\vec{F}$ projeté selon $\vec{e}_z$ donne l'équation

Q27

$$m\ddot{z} = mg + P_a s - ps \Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{\gamma s^2 P_a}{m(V_0+Hs)}z = g}$$

5. L'équation précédente peut s'écrire sous la forme $\ddot{z}+\omega_0^2 z = g$, équation d'un oscillateur harmonique de période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Par identification, on obtient bien $\boxed{T_0^2 = \dfrac{4\pi^2 m(V_0+Hs)}{\gamma s^2 P_a}}$. Q28

6. La solution de l'équation précédente est de la forme $z(t) = A.\cos\omega_0 t + B.\sin\omega_0 t + \frac{g}{\omega_0^2}$.

   Forme plus simple que** $A.\cos(\omega_0 t+\varphi)$ **pour les constantes.

Q29 À $t=0$, $z=0 \Rightarrow 0 = A + \frac{g}{\omega_0^2}$ et $\dot{z} = 0 \Rightarrow 0 = \omega_0 B$ d'où finalement, $\boxed{z = \dfrac{g}{\omega_0^2}[1-\cos\omega_{0t}]}$

7. On en déduit immédiatement $\boxed{z_{\text{max}} = \frac{2g}{\omega_0^2}}$. Comme ω_0 dépend de γ, on peut mesurer T_0 sur
Q30 plusieurs oscillations et en déduire γ.

C. Mesures et exploitation en régime libre

1. On peut reprendre les résultats de l'étude précédente en remplaçant simplement T_0 par T_k et V_0 par $V_{0,k}$ soit $\boxed{T_k^2 = \dfrac{4\pi^2 m(V_{0,i}+kV_1+Hs)}{\gamma s^2 P_a}}$ et si le tracé $T_k^2(k)$ sera une $\boxed{\text{droite}}$ dont
Q31 la mesure du cœfficient directeur $\frac{4\pi^2 mV_1}{\gamma s^2 P_a}$ permettra de déterminer γ avec plus de précision qu'avec la méthode du B.3. car on $\boxed{\text{travaille sur plus de points de mesure}}$.

Q32 2. On utilise le mode « SINGLE » de l'oscilloscope car il s'agit d'un $\boxed{\text{phénomène transitoire}}$.

3. On relève que six périodes correspond environ à 4,25 s d'où $\boxed{T \simeq \frac{4{,}25}{6} \simeq 0{,}7\ \text{s}}$. On utilise ensuite

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2 m(V_0+Hs)}{\gamma s^2 P_a} \simeq \frac{4\pi^2 mV_0}{\gamma s^2 P_a} \Rightarrow \gamma \simeq \frac{4\pi^2 mV_0}{T_0^2 s^2 P_a} \simeq \frac{40.17.10^{-3}.4.10^{-3}}{0{,}49.4.10^{-8}.10^5} \simeq 80.17.10^{-3} \simeq 1{,}4$$

Q33 Cette valeur parait $\boxed{\text{cohérente pour un gaz parfait diatomique}}$ (on utilise de l'air ici).

Concentrez-vous sur la mesure de période !

4. L'amortissement observé est certainement du à la présence de frottements (solides et fluides) et des fuites thermiques du récipient. Q34

5. En ajoutant $\vec{F} = -\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{z}.\vec{e}_z$ dans l'expression du principe fondamental de la dynamique précédent avant de projeter, on obtient maintenant : $\boxed{m\ddot{z} = -m\omega_0^2 z + mg - \lambda\dot{z}}$ Q35

6. L'équation prend la forme $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = g$ en posant $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m} \Rightarrow \boxed{Q = \dfrac{m\omega_0}{\lambda}}$ le facteur de qualité de l'oscillateur amorti. ω_0 étant l'inverse d'un temps, Q doit obligatoirement être sans dimension pour que l'équation soit homogène. Q36

Ne pas oublier le cours sur les régimes transitoires.

L'équation caractéristique associée à l'oscillateur harmonique est $x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$ et on obtient des oscillations amorties si $\boxed{\Delta < 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{2}}$ (régime pseudo périodique). Q37

7. (a) Les racines de l'équation caractéristique sont $-\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0[1 - \frac{1}{4Q^2}]^{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega$ où Ω est la pseudo pulsation de l'oscillateur. On a ainsi $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$ Q38

   (b) La solution de l'équation différentielle précédente est de la forme $z(t) = \exp(-\frac{\omega_0 t}{2Q}).[A\cos\Omega t + B\sin\Omega t] + g$ d'où $\boxed{b = -\dfrac{\omega_0}{2Q}}$ Q39

   (c) La courbe donnée par l'énoncé indique que $e^{-x} < 0{,}05$ quand $x \geqslant 3$. L'amplitude des oscillations est donc inférieure à 5 % de sa valeur initiale à partir de $bt = 3 \Rightarrow \frac{2\pi t}{2T_0 Q} = 3 \Rightarrow t = QT_0$ c'est à dire $\boxed{\text{au bout de } Q \text{ oscillations}}$. Q40

   (d) La lecture de la figure 2 nous permet de remarquer que l'amplitude des oscillations est faible (< 10 %) au bout de 5 ou 6 oscillations. On a donc $\boxed{Q \text{ de l'ordre de 5 ou 6}}$ ce qui permet bien de confondre Ω avec ω_0 et donc T avec T_0. En effet, le facteur $\sqrt{1 - 1/(4Q)^2} \simeq 0{,}995$ diffère de 1 de moins de 1%, et cette différence est donc négligeable compte tenu du nombre de chiffres significatifs avec lesquels on travaille. Q41

D. Etude en régime forcé

1. On peut écrire l'équation différentielle donnée par l'énoncé en notation complexe :

$$\ddot{\underline{Z}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{Z}} + \omega_0^2\underline{Z} = \frac{F_0}{m}\exp(j\omega t) \Rightarrow -\omega^2\underline{Z_0}\exp(j\omega t) + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{Z_0}\exp(j\omega t) - \omega_0^2\underline{Z_0}\exp(j\omega t) = \frac{F_0}{m}\exp(j\omega t)$$

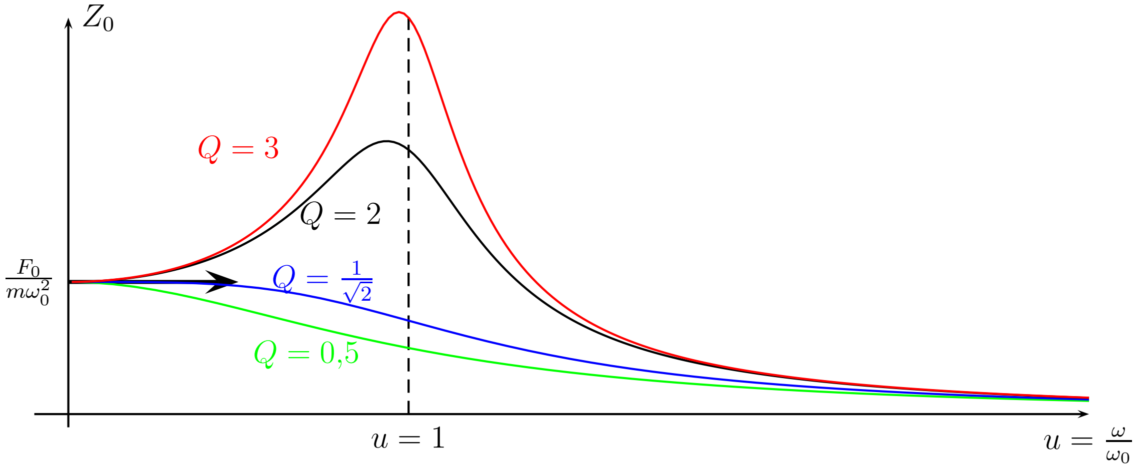
et après simplification par $\exp(j\omega t)$,

Q42

$$\underline{Z_0} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega.\frac{\omega_0}{Q}} \Rightarrow \boxed{\underline{Z_0} = \frac{\frac{F_0}{m\omega_0^2}}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}} \Rightarrow Z_0 = \frac{\frac{F_0}{m\omega_0^2}}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}}$$

2. Z_0 tend vers $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$ en basses fréquences ($u \ll 1$) et vers 0 en hautes fréquences ($u \gg 1$).
   On s'est ramené à un système mécanique équivalent à un filtre passe bas du second ordre, de facteur de surtension Q. L'allure est donc la suivante :

Q43



   Z_0 passe par un maximum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, la pulsation est alors $\omega_m = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ proche de ω_0 si Q est assez grand (supérieur à 3 ou 4). Z_0 maximum est alors proche de Q fois sa valeur en basses fréquences.

3. Comme ici Q est assez grand (quelques unités), on pourra assister à une résonance en amplitude des mouvement de la bille et ce pour une valeur de ω proche de ω_0.

Q44 On fera donc varier ω jusqu'à visualiser une $\boxed{\text{résonance en amplitude.}}$