

Conseils :

- Ce devoir comporte 3 exercices indépendants.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **ré-daction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).
Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

I. INSTABILITÉ DE TÔLE ONDULÉE

Lorsqu'une route en sable ou en gravier (masse volumique $\rho \approx 2000 \text{ kg.m}^{-3}$) est soumise au passage répété de véhicules, des bosses régulièrement espacées apparaissent à sa surface. Ce phénomène, appelé instabilité de tôle ondulée (*washboard road*), est d'une part très gênant pour les passagers et d'autre part très dangereux à cause de la perte d'adhérence induite par les bosses.

Expérimentalement, on constate que cette instabilité apparaît uniquement si les voitures se déplacent au delà d'une vitesse critique v_c .

On remarque également que ce phénomène ne dépend que des paramètres suivants : la masse m du véhicule, la largeur du pneu L , la masse volumique de la piste ρ , l'accélération de la pesanteur g et bien sûr la vitesse v du véhicule.

On prendra numériquement $g = 10$ en unité du système international.

- Q1 1. À partir de v et g , il est possible de construire une quantité, notée l_1 , homogène à une longueur. Donner l'expression de l_1 .
- Q2 2. De même, à partir des trois paramètres ρ , m et L , il est possible de construire une quantité, notée l_2 , homogène à une longueur. Donner l'expression de l_2 sachant que ρ et L apparaissent avec la même puissance.
- Q3 3. Le rapport $\frac{l_1}{l_2}$ est appelé nombre de Froude, noté F_r . Quel est sa dimension ?
- Q4 4. Expérimentalement, on observe que l'instabilité se développe lorsque le nombre de Froude dépasse un nombre de Froude critique $F_{r,c}$. Donnez alors l'expression de la vitesse critique v_c en fonction de $F_{r,c}$.
- Q5 5. Des expériences de laboratoire montrent que : $F_{r,c} = 5$. Quelle est alors la vitesse critique pour une voiture d'une tonne, dont les pneus ont une largeur de 20 cm ?

II. MODÉLISATION DU HALO SOLAIRE

Données numériques :

- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Indice optique de l'air : $n_a = 1,00$
- Indice optique de la glace : $n_g = 1,31$.

A. La réfraction de la lumière

- Q6 1. On considère un milieu homogène, isotrope et transparent à la lumière. Donner l'expression de l'indice optique n de ce milieu en définissant les termes utilisés dans votre formule.

On étudie le phénomène de la réfraction et de la réflexion de la lumière. Un rayon lumineux incident arrive sur un dioptre qui sépare deux milieux d'indice optique n_1 et n_2 . On note θ_1 l'angle d'incidence du rayon incident, θ'_1 l'angle que le rayon réfléchi fait avec la normale au dioptre, et θ_2 l'angle que le rayon réfracté fait avec cette même normale.

- Q7 2. Rappeler les lois de la réflexion et de la réfraction de Snell-Descartes et faire le schéma avec les notations de l'énoncé.
- Q8 3. Montrer que, dans le cas où $n_2 < n_1$, si θ_1 est supérieur à une valeur θ_{lim} , le rayon incident est totalement réfléchi par le dioptre. Exprimer θ_{lim} en fonction de n_1 et n_2 .
- Q9 4. Dans le cas d'un dioptre séparant la glace (milieu 1) de l'air (milieu 2), calculer la valeur de θ_{lim} en degrés.

B. Le halo solaire

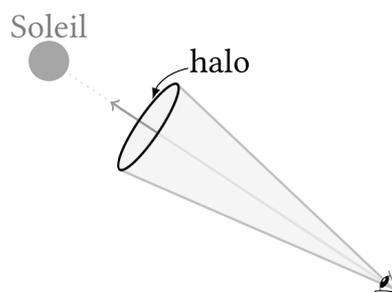


FIGURE 1 – Halo solaire. À gauche, photographie d'un halo solaire. À droite, géométrie du halo solaire : le halo apparaît sous la forme d'un cercle lumineux intense centré sur l'axe qui relie l'œil de l'observateur au Soleil.

Le halo solaire, ou anthélie, est un phénomène optique atmosphérique qui ressemble à un arc-en-ciel circulaire (voir figure 1 à gauche). Il apparaît sous la forme d'un cercle coloré dont le soleil occupe le centre. L'objectif de cette partie est la détermination du rayon angulaire du halo (qui représente l'angle au sommet du cône représenté sur la figure 1 à droite).

Le halo est dû à la réfraction de la lumière issue du soleil par de petits cristaux de glace en forme de bâtonnets. Les plus petits de ces cristaux (dont la taille peut être inférieure à $20 \mu\text{m}$)

ont un mouvement erratique provoqué par le choc des molécules qui constituent l'air; ils ont donc toutes les orientations possibles dans l'espace. Puisqu'on ne s'intéresse qu'à la déviation des rayons lumineux, on peut modéliser la réfraction de la lumière issue du soleil par l'ensemble de ces cristaux par la réfraction de la lumière par un seul cristal en considérant un angle d'incidence variable.

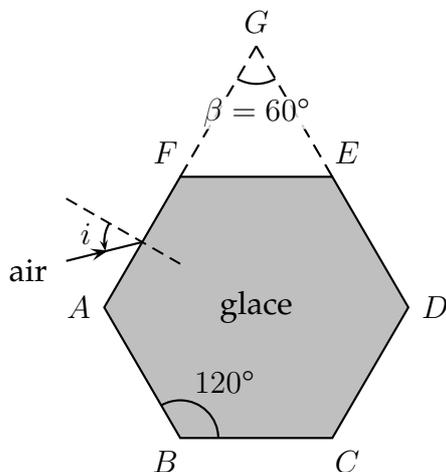


FIGURE 2 – Représentation de la section droite d'un cristal de glace et d'un rayon lumineux incident sur la face (AF) du cristal.

La figure 2 donne la représentation de la section droite d'un cristal de glace. Cette section présente la géométrie d'un hexagone régulier (ABCDEF). Un rayon lumineux incident, contenu dans le plan de cette section, atteint la face (AF) avec un angle d'incidence variable i . On étudie la déviation de ce rayon lumineux par le cristal.

1. Supposons que le rayon qui entre dans le cristal atteint la face (EF) (voir figure 3 page 3).

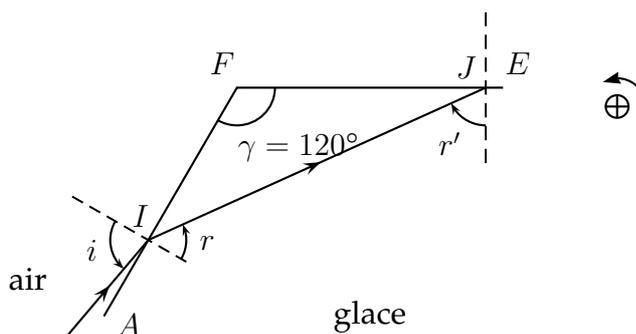


FIGURE 3 – Cas d'un rayon atteignant la face FE après être entré par la face AF.

- Q10 (a) Déterminer la relation entre l'angle de réfraction r en I et l'angle d'incidence r' en J . Justifier.
- Q11 (b) Déterminer la valeur maximale de l'angle de réfraction r .
- Q12 (c) En déduire que l'angle d'incidence r' est supérieur en valeur absolue à une valeur que l'on déterminera.
- Q13 (d) Le rayon lumineux peut-il alors sortir de la face (EF)?

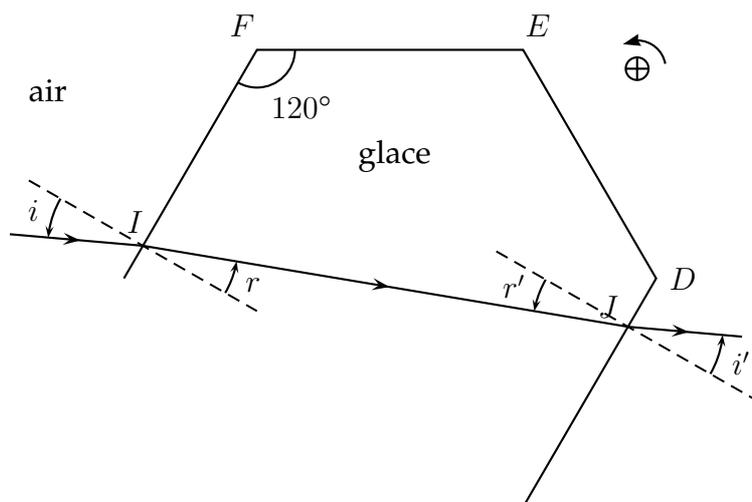


FIGURE 4 – Cas d’un rayon atteignant la face CD après être entré par la face AF

- Q14 2. Justifier qu’un rayon lumineux qui émerge par la face (CD) est parallèle au rayon lumineux incident et n’est donc pas dévié par le cristal de glace (voir figure 4 page 4).

On considère le rayon émergent par la face (DE) . Les faces (AF) et (DE) sont analogues aux faces d’un prisme de sommet G , d’angle au sommet β égal à 60° et d’indice optique égal à celui de la glace, à savoir n_g (voir figure 5 page 4). On sera très attentif à l’orientation des angles choisie sur cette figure.

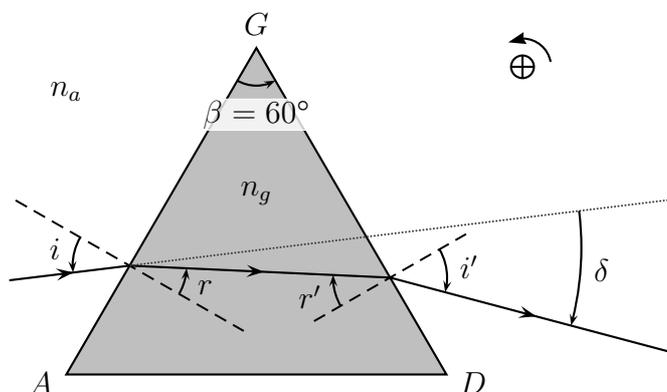


FIGURE 5 – Déviation du rayon lumineux incident par le prisme (ADG) d’indice optique n_g .

- Q15 3. Établir les expressions de β et δ en fonction des angles de la figure, en respectant l’orientation choisie.
4. La figure 6 page 5 montre les variations de la déviation $|\delta|$ en fonction de l’angle d’incidence i . On constate l’existence d’une valeur minimale dont on admet qu’elle est obtenue lorsque $i = -i'$. En déduire que dans cette configuration :
- Q16

$$r = \frac{\beta}{2} \quad \text{et} \quad \sin(i) = \frac{n_g}{n_a} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

- Q17 5. La figure 6 montre que la valeur minimale de $|\delta|$ est approximativement égale à 22° . Retrouver ce résultat par le calcul.

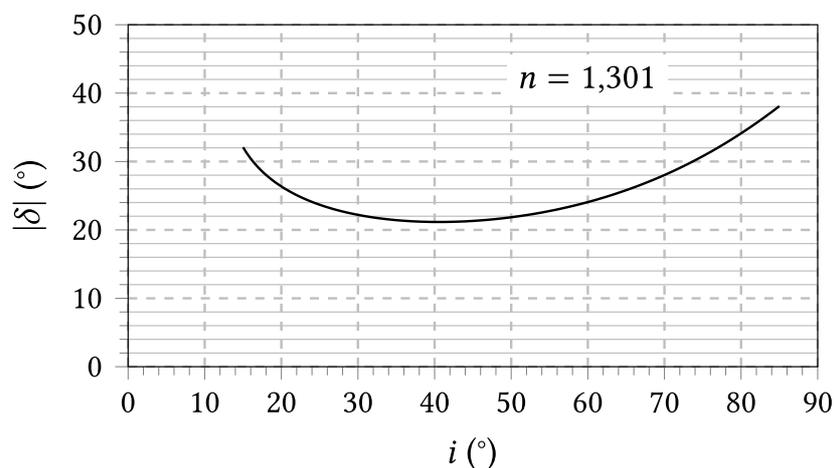


FIGURE 6 – Déviation du rayon lumineux en fonction de l'angle d'incidence.

- Q18 6. Expliquer pourquoi l'observateur observe une accumulation de lumière (le halo solaire) dans la direction qui correspond à une ouverture angulaire de 22° autour de l'axe dirigé de son œil vers le Soleil.
- Q19 7. L'indice optique de la glace est une fonction décroissante de la longueur d'onde. On observe que le halo est irisé (l'irisation est la production des couleurs de l'arc-en-ciel par décomposition de la lumière du Soleil) : de l'intérieur vers l'extérieur du halo, les couleurs observées varient du rouge au bleu. Faire un schéma. Préciser si les résultats établis précédemment sont en accord avec cette observation.

III. MIROIR RÉEL

Un miroir réel est constitué d'une fine couche métallique, appelée tain, considérée comme un miroir plan parfait, recouverte (pour la protéger) d'une lame de verre d'épaisseur e et d'indice n .

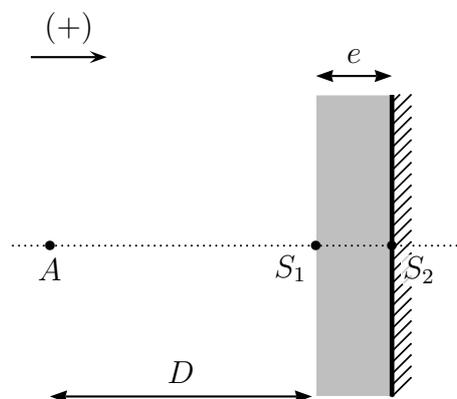
Soit un point objet A , soient S_1 et S_2 les points d'intersection de la normale au miroir passant par A avec les deux faces de la lame de verre. On note D la distance entre A et S_1 .

On supposera dans cet exercice que les conditions de Gauss sont réalisées et pourra utiliser la formule de conjugaison du dioptre plan vue en cours dans cette approximation, c'est-à-dire :

$$\frac{\overline{HA}}{n_1} = \frac{\overline{HA'}}{n_2}$$

où A' est l'image conjuguée de A après passage par la lumière depuis le milieu d'indice n_1 vers le milieu d'indice n_2 , et H est le projeté orthogonal de A sur le dioptre.

Dans la suite de l'exercice, on considérera que l'indice de l'air est exactement égal à 1.



A. Miroir équivalent - Méthode 1

- Q20 1. On considère un rayon lumineux issu de A et arrivant vers le miroir avec un angle d'incidence i . Tracer la trajectoire complète de ce rayon sur un grand schéma.
- Q21 2. Montrer par une construction géométrique soignée que ce miroir se comporte comme un miroir plan parfait équivalent (M_e) sur lequel il n'y aurait qu'une simple réflexion. Représenter ce miroir sur la figure (on refera le schéma centré sur la lame d'une épaisseur suffisante).
- Q22 3. Sachant que l'on est toujours dans les conditions de Gauss, déterminer la distance x entre le dioptre air/verre et le miroir équivalent.

B. Miroir équivalent - Méthode 2

- Q23 1. On note A_1 l'image de A par le dioptre air/verre, A_2 l'image de A_1 par le miroir plan, et A' l'image de A_2 par le dioptre verre/air. Placer ces points sur la droite (AS_2) en vous aidant du tracé réalisé à la question Q20 (on refera une figure).
- Q24 2. Déterminer par le calcul la position de A_1 en utilisant la relation de conjugaison du dioptre plan. On exprimera en particulier $\overline{S_1A_1}$ en fonction de $\overline{S_1A}$ et des données du problème.
- Q25 3. En déduire la position de A_2 . On exprimera en particulier $\overline{S_2A_2}$ en fonction de $\overline{S_1A}$ et des données du problème.
- Q26 4. En déduire finalement la position de A' . On exprimera en particulier $\overline{S_1A'}$ en fonction de $\overline{S_1A}$ et des données du problème.
- Q27 5. On considère que deux systèmes optiques sont équivalents s'ils possèdent la même relation de conjugaison. Montrer que ce miroir réel est équivalent à un miroir plan parfait (M_e) placé de telle sorte que $\overline{S_1S_e} = \frac{e}{n}$.

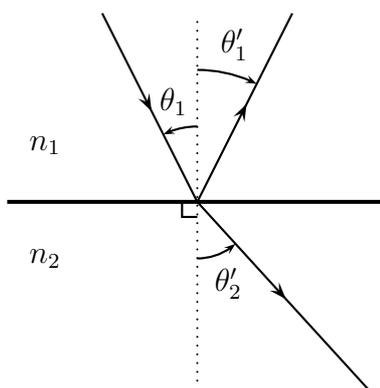
I. INSTABILITÉ DE TÔLE ONDULÉE

- Q1 1. On a $[v] = LT^{-1}$ et $[g] = LT^{-2}$ donc $l_1 = \frac{v^2}{g}$.
- Q2 2. On a $[m] = M$, $[\rho] = ML^{-3}$ et $[L] = L$ donc $l_2 = \sqrt{\frac{m}{\rho L}}$.
- Q3 3. Fr_c est le rapport de deux longueurs, c'est donc un nombre sans dimension.
- Q4 4. Au seuil de l'instabilité $Fr_c = \frac{v_c^2}{g\sqrt{\frac{m}{\rho L}}}$, donc $v_c = \sqrt{Fr_c \times g\sqrt{\frac{m}{\rho L}}}$.
- Q5 5. Ainsi, la vitesse critique de la voiture décrite dans l'énoncé est d'environ $8,9 \text{ m.s}^{-1}$. Dès que la voiture dépasse cette vitesse elle détériore la route et amplifie les rides présentes sur la route. On remarque alors que l'instabilité de tôle ondulée se développe très facilement car on ne peut pas raisonnablement demander aux automobilistes de conduire en dessous de 32 km.h^{-1} dans beaucoup de situations.

II. MODÉLISATION DU HALO SOLAIRE

A. La réfraction de la lumière

- Q6 1. Par définition, $n = \frac{c}{v} \geq 1$ avec v la vitesse de la lumière dans ce milieu et de la célérité c de la lumière dans le vide.
2. 1ère loi (à ne pas oublier) : le rayon réfracté (s'il y a réfraction) et le rayon réfléchi appartiennent au plan d'incidence (c'est-à-dire le plan qui contient la normale au dioptre au point d'incidence et le rayon incident).
- Q7 2ème loi (réflexion) : $\theta'_1 = -\theta_1$;
- 2ème loi (réfraction) : s'il y a réfraction, alors $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$.



Attention aux orientations, depuis la normale vers les rayons.

- Q8 3. La deuxième loi de la réfraction montre que $\theta_2 > \theta_1$ si $n_2 < n_1$, or θ_2 ne peut pas dépasser $\pi/2$ (en valeur absolue); θ_1 étant une fonction croissante de θ_2 , il existe donc une valeur maximale θ_{lim} de θ_1 telle que θ_2 soit défini. Cette valeur étant atteinte en $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, on en déduit $n_1 \sin \theta_{lim} = n_2 \sin \frac{\pi}{2}$, d'où $\theta_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$; cette expression est bien définie car $\frac{n_2}{n_1} \leq 1$.
- Q9 4. Numériquement avec les valeurs de l'énoncé, on trouve $\theta_{lim} = 49,8^\circ$.

B. Le halo solaire

1. Cas d'un rayon atteignant la face FE

- Q10 (a) On complète les angles $\widehat{FIJ} = \frac{\pi}{2} - r$ (en radian) et $\widehat{FJI} = \frac{\pi}{2} + r'$ (attention à l'orientation positive des angles). En faisant la somme des angles dans le sens positif dans le triangle FIJ , on obtient $\pi = \gamma + \frac{\pi}{2} - r + \frac{\pi}{2} + r' \Rightarrow \boxed{\gamma = r - r'}$; cf schéma figure 1 page 2.

Faites un schéma sur la partie intéressante et citez le triangle ou les angles.

- Q11 (b) Au maximum $i = \pi/2$ d'où la valeur maximale de l'angle de réfraction r est $r_{max} = \arcsin\left(\frac{n_a}{n_g}\right)$ (on passe d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent, donc on se rapproche de la normale, c'est pour cela que i atteint $\pi/2$ avant r).
- Q12 (c) D'après les questions précédentes $r' = r - \gamma$, or $r < r_{max}$, donc $r' < r_{max} - \gamma$. Toutefois, r' étant négatif, on en déduit $\boxed{|r'| = -r' > \gamma - r_{max} = 70,2^\circ}$
- Q13 (d) On se rappelle que $\theta_{lim} = 49,8^\circ$, or on vient de trouver que r' est toujours plus grand en valeur absolue que 70° et donc il y aura toujours **réflexion totale** sur la face (EF) et les rayons ne peuvent donc pas sortir par cette face.

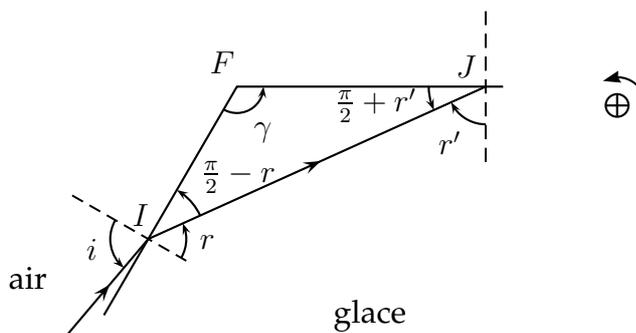
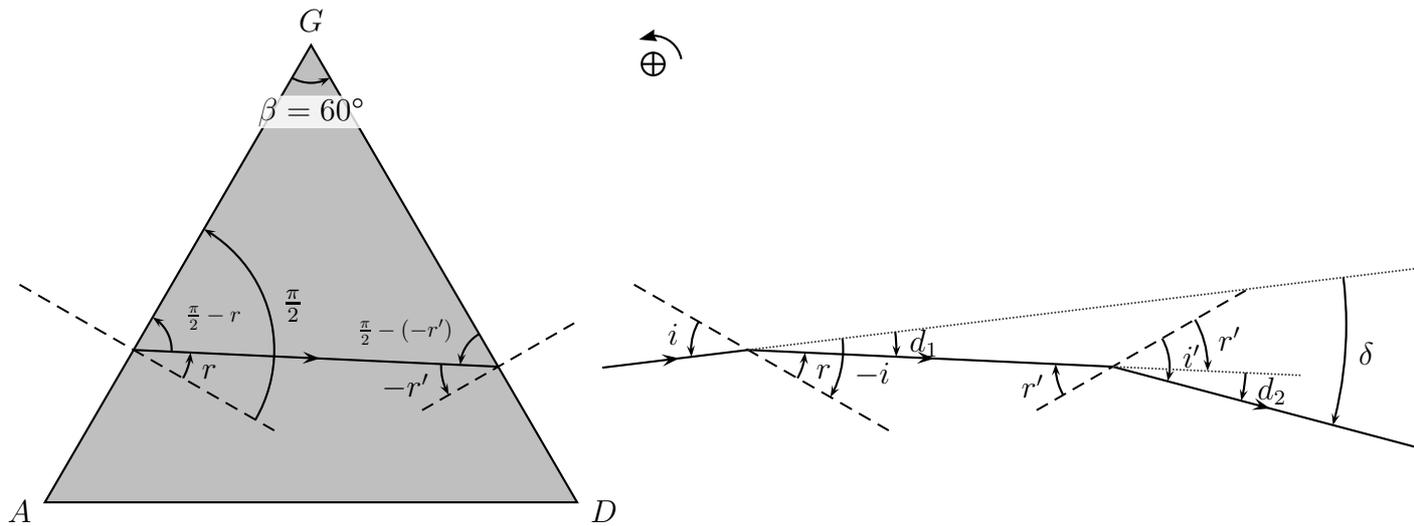


FIGURE 1 – Cas d'un rayon atteignant la face FE après être entré par la face AF .

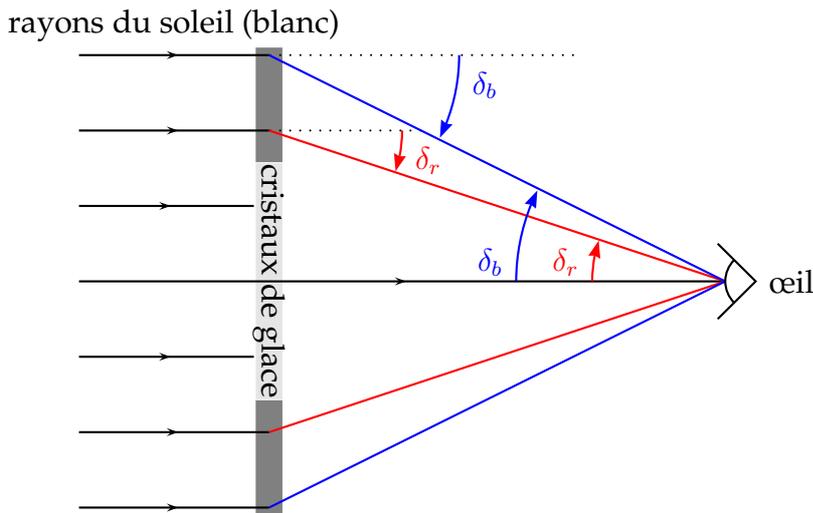
- Q14 2. Les faces (CD) et (AF) sont parallèles, donc leur normale sont parallèles aussi. Ainsi les angles r et r' sont alternes-internes et donc égaux. En appliquant les lois de Snell-Descartes en I et en J , on obtient $n_a \sin i = n_g \sin r$ et $n_g \sin r' = n_a \sin i'$, mais puisque $r = r'$ on en déduit $\sin i = \sin i'$ et donc $i = i'$ puisque l'on est dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Ainsi le rayon émerge parallèlement au rayon incident : il n'est pas dévié.



- Q15 3. Figure de gauche ci-dessus, la somme des angles dans le triangle $G I J$ vaut $\pi = \beta + \frac{\pi}{2} - r + \frac{\pi}{2} + r'$, ce qui donne $\boxed{\beta = r - r'}$.
 Par déviations successives (depuis les prolongement des rayons incidents vers les rayons émergents), $\delta = d_1 + d_2$. Or sur le schéma ci-dessus à droite, on voit $d_1 + (-r) = -i$ et $r' + d_2 = i'$ d'où $\boxed{\delta = -i + r + i' - r'}$.

Schéma indispensable, surtout pour la déviation.

- Q16 4. Si $i = -i'$, alors en utilisant les relations de Snell-Descartes, $r = -r'$. On en déduit dans cette configuration $2r = \beta$ (relation 1 précédente) et donc $\boxed{r = \frac{\beta}{2}}$. De même $\delta = -2i + 2r = -2i + \beta$. Or $n_a \sin i = n_g \sin(r) \Rightarrow \boxed{\sin(i) = \frac{n_g}{n_a} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$.
- Q17 5. Numériquement on peut tirer i de la question précédente, puis on en déduit $\delta = -2i + \beta = \boxed{-21,8^\circ}$. C'est cohérent avec $|\delta| \simeq 22^\circ$.
- Q18 6. Au voisinage du minimum, plusieurs rayons avec des i proches vont donner quasiment le même δ , ce qui donne une accumulation d'énergie dans cette direction (cf corrigé DM arc-en-ciel pour plus de détails). De plus, les cristaux ayant toutes les directions et étant nombreux, lorsque qu'un observateur regarde le soleil, il verra des cristaux "bien orientés" dans tout un cône centré sur le soleil et d'angle au sommet $21,8^\circ$. Voir schéma pour la question ci-après pour plus de détails.
- Q19 7. L'indice optique de la glace étant une fonction décroissante de la longueur d'onde, i l'est aussi (d'après $\sin(i) = \frac{n_g}{n_a} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$). Ainsi $|\delta| = -\delta = 2i - \beta$ l'est aussi. Le rouge ($\lambda = 600 - 800$ nm) est donc moins dévié que le bleu-violet ($\lambda = 400 - 480$ nm). On notera δ_r et δ_b les déviations pour le rouge et le bleu avec $\delta_r < \delta_b$. Pour le schéma, il s'agit surtout de représenter des rayons qui arrivent dans l'œil et de ne pas oublier qu'il y a une symétrie de révolution autour de l'axe œil - soleil.

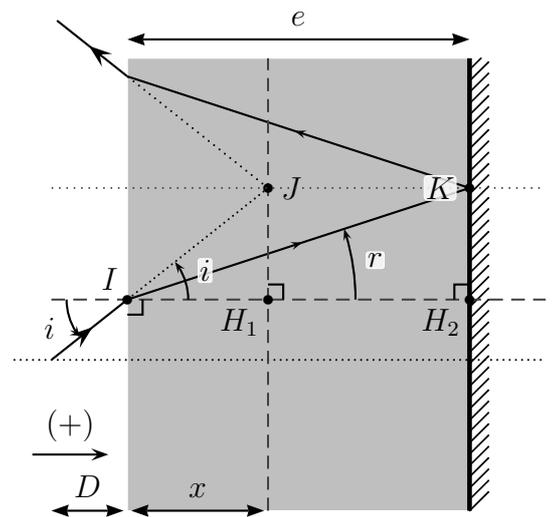
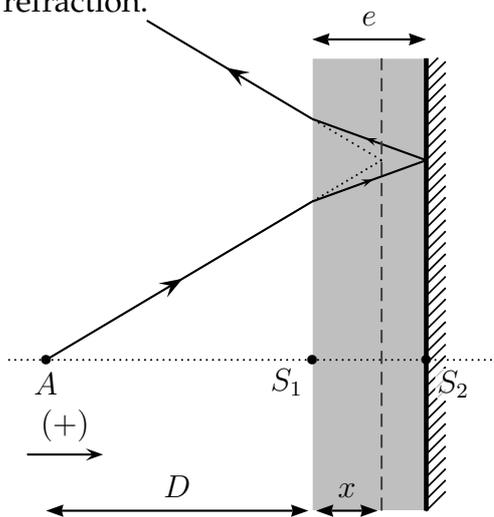


Les rayons lumineux qui arrivent dans l'œil vu de l'intérieur ont, d'après le schéma, une déviation inférieure à ceux qui arrivent à l'extérieur. Vu les remarques précédentes, on en déduit que le rouge est à l'intérieur et le bleu à l'extérieur, ce qui est cohérent avec la proposition de l'énoncé.

III. MIROIR RÉEL

A. Miroir équivalent - Méthode 1

- Q20 1. On considère un rayon lumineux issu de A et arrivant vers le miroir avec un angle d'incidence i . Trajectoire représentée ci-dessous à gauche. On se rapproche de la normale lors de la réfraction.



2. D'après les lois de la réflexion, on a une symétrie par rapport à une droite horizontale pour les rayons dans le verre, et donc le rayon arrive sur le dioptre verre-air avec la même inclinaison que celle qu'il avait après avoir passé le dioptre air-verre. Il va donc ressortir symétrique du rayon incident par rapport à une horizontale. D'après les schémas ci-dessus, on peut voir que tout se passe pour le rayon comme s'il se réfléchissait en J sur un miroir qui n'aurait pas de verre. On a représenté le miroir équivalent verticalement en pointillé.

Q21

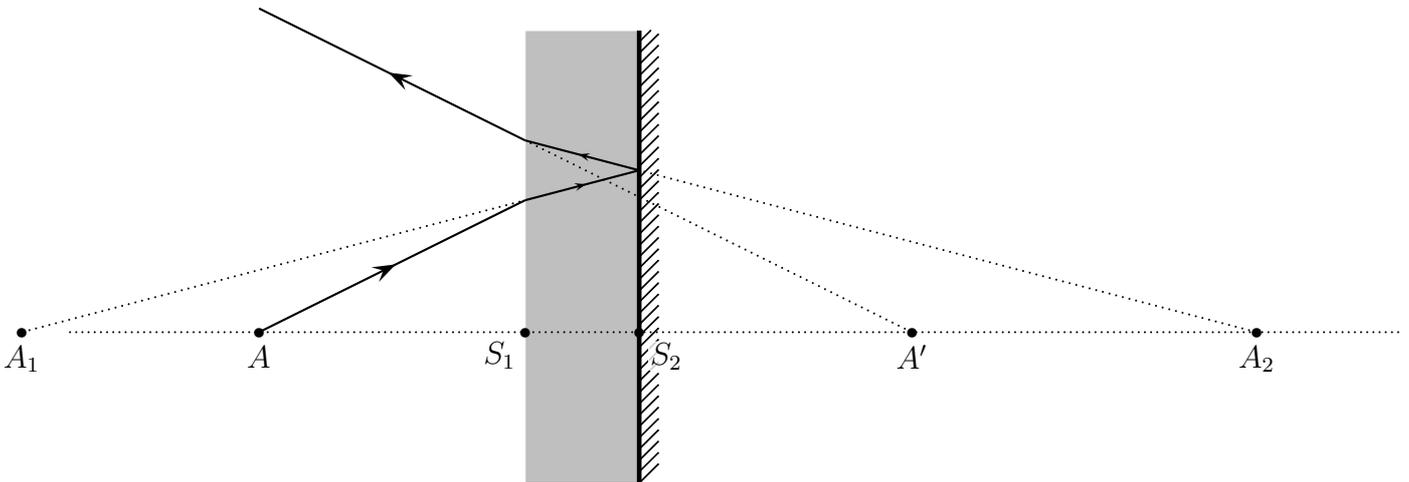
3. Compte tenu des symétries, $H_2K = H_1J$, cela donne $e \tan r = x \tan i$ en utilisant les triangles rectangles IH_1J et IH_2K .

De plus la réfraction en I donne $1 \times \sin i = n \sin r$.

Q22

Comme on se place dans l'approximation de Gauss, on peut simplifier les formules précédentes en $er = xi$ et $i = nr$, soit finalement $x = \frac{e}{n}$

B. Miroir équivalent - Méthode 2



Q23

1. On note A_1 l'image de A par le dioptre air/verre, A_2 l'image de A_1 par le miroir plan, et A' l'image de A_2 par le dioptre verre/air. Les points seront sur l'axe optique en pointillé horizontal car on pourrait tracer un rayon parfaitement horizontal qui ne serait pas dévié mais changerait juste de sens après réflexion sur le miroir. Pour placer les points, on se rappelle que l'image par un système optique (lorsqu'elle existe) est l'intersection des rayons émergents. Ici on est obligé de prolonger les rayons émergents, on a donc à chaque fois des images virtuelles.

Q24

2. L'image A_1 doit vérifier la relation de conjugaison donnée dans l'énoncé : $\overline{S_1 A_1} / n = \overline{S_1 A} / 1$ (on a juste adapté les notations).

Q25

3. Puis A_2 est l'image de A_1 par le miroir, c'est donc le symétrique par rapport à S_2 , $\overline{S_2 A_2} = -\overline{S_2 A_1} = -(\overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 A_1}) = \overline{e - n \overline{S_1 A}}$ (on utilise Chasles et le fait que $e = S_1 S_2$).

Q26

4. Enfin, A' est l'image de A_2 par le dioptre plan, on a donc d'après la relation de conjugaison $\overline{S_1 A_2} / n = \overline{S_1 A'} / 1$ soit $\overline{S_1 A'} = \frac{1}{n}(\overline{S_1 S_2} + \overline{S_2 A_2}) = \frac{1}{n}(e + (e - n \overline{S_1 A}))$ soit en simplifiant : $\overline{S_1 A'} = \frac{2e}{n} - \overline{S_1 A}$

Q27

5. On considère que deux systèmes optiques sont équivalents s'ils possèdent la même relation de conjugaison.

Supposons que l'on ait un miroir plan parfait placé en $\overline{S_1 S_e} = x$, alors l'image A' de A par ce miroir est telle que $\overline{S_e A} = -\overline{S_e A'} \Leftrightarrow \overline{S_e S_1} + \overline{S_1 A} = -\overline{S_e S_1} - \overline{S_1 A'} \Leftrightarrow \overline{S_1 A} = -2\overline{S_e S_1} - \overline{S_1 A'} = 2x - \overline{S_1 A'}$. Compte tenu de la relation précédente, cela correspond si et seulement si $x = \frac{e}{n}$.

Vu la question, on pouvait directement poser $x = e/n$ et vérifier que cela donnait la même relation de conjugaison.