Conseils :

- Ce devoir comporte 3 exercices indépendants. Lisez attentivement l'énoncé du début à la fin et choisissez **ensuite** par quel problème commencer (aucun ordre n'est imposé).
- Rédigez les problèmes sur **des copies** différentes.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).

  Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

I. DIFFÉRENTES UTILISATIONS DE CONDENSATEURS

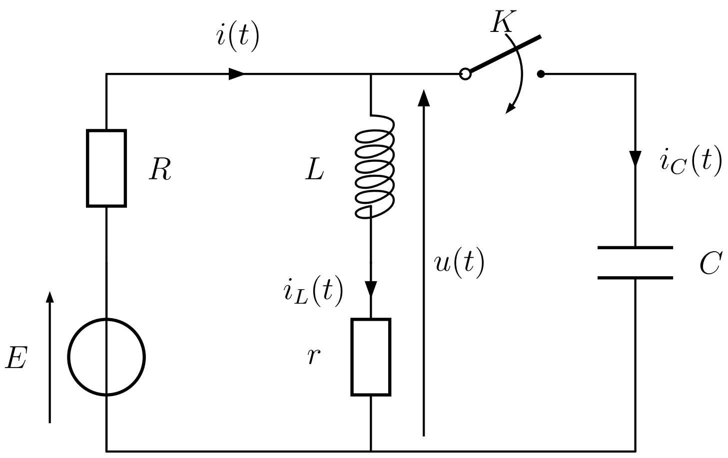


FIGURE 1 – Circuit complet

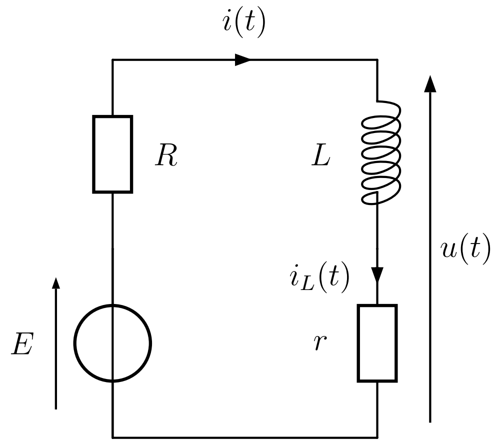


FIGURE 2 – Circuit simplifié pour la partie A.

On considère le circuit de la figure 1 à gauche ci-dessus, constitué d'un générateur réel, modélisé par un générateur idéal de f.é.m E en série avec un résistor de résistance R, branché à une bobine réelle, modélisée par une bobine idéale d'inductance L en série avec un résistor de résistance r. L'interrupteur K permet de relier, lorsqu'il est fermé, un condensateur de capacité C en parallèle avec la bobine réelle et le générateur réel.

A. Établissement du courant dans le circuit RL

Dans un premier temps, l'interrupteur K est ouvert et le générateur est éteint depuis longtemps. La branche contenant le condensateur ne participe donc pas et on peut utiliser le circuit de la figure 2. On considère que la tension aux bornes du générateur idéal est nulle lorsqu'il est éteint. À $t = 0$, on allume le générateur et la f.é.m prend instantanément la valeur E.

1. Relations constitutives et mesures expérimentales :
   - (a) Donner la relation constitutive d'une bobine idéale (faites un schéma pour définir vos notations). Q1
   - (b) Quelle est la relation constitutive pour la bobine réelle avec les notations du problème (lien entre i_L, u, r et L) ? Q2
   - (c) Représenter sur un schéma les branchements de l'oscilloscope (CH1 et masse) permettant de mesurer $u(t)$. Placer également CH2 si on souhaite mesurer la tension de sortie du GBF. Q3
   - (d) Proposer un protocole permettant de mesurer la force électromotrice E et la résistance interne R du générateur. Q4

     Le générateur sera sorti du circuit précédent. On considérera que l'on dispose du matériel usuel de travaux pratiques et on justifiera la réponse en détaillant les différentes étapes. Un schéma est obligatoire.
2. Valeurs limites :
   - Q5 (a) Déterminer, en justifiant précisément, les expressions de $i_L(t < 0)$ et $u(t < 0)$.
   - Q6 (b) Déterminer, en justifiant précisément, les expressions de $i_L(t = 0^+)$ et $u(t = 0^+)$.
   - Q7 (c) Déterminer, en justifiant précisément, les expressions de $i_L(t \to \infty)$ et $u(t \to \infty)$.

3. Équation différentielle :

Q8 (a) Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution temporelle de $i_L(t)$. Mettre cette équation différentielle sous forme canonique en faisant apparaitre un temps caractéristique que l'on notera τ.

Q9 (b) Vérifier explicitement, sans utiliser l'équation différentielle, que $[\tau] = \mathrm{T}$.

Q10 (c) Résoudre l'équation différentielle en tenant compte des conditions initiales.

Q11 (d) Tracer l'allure de la courbe $i_L(t)$.

B. Réponse du circuit au branchement d'un condensateur

Dans cette partie, on étudie l'évolution du circuit lors du branchement du condensateur en parallèle de la bobine. Pour simplifier les expressions, on place la nouvelle origine des temps au moment où l'on ferme l'interrupteur K et on considère que le générateur était allumé depuis longtemps. Le condensateur était initialement déchargé.

1. Déterminer (en justifiant précisément) les valeurs des grandeurs $u(t)$, $i(t)$, $i_L(t)$ et $i_C(t)$, définies sur le schéma :

Q12 (a) juste avant la fermeture de l'interrupteur,

Q13 (b) puis juste après la fermeture de l'interrupteur,

Q14 (c) et enfin au bout d'un temps suffisamment long.

Faire un résumé des résultats obtenus dans un **tableau**.

	i_c	i_L	i	u
$t = 0^-$				
$t = 0^+$				
$t = \infty$				

2. (a) Montrer que l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $i_L(t)$ est :

$$LC\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left(rC + \frac{L}{R}\right)\frac{di_L}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R}\right)i_L(t) = \frac{E}{R}$$

Q15 Mettre l'équation sous forme canonique.

(b) Exprimer alors en fonction de r, R, L et C la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité
Q16 Q de ce circuit.

3. Analyse dimensionelle :

(a) En utilisant la forme canonique de l'équation différentielle, déterminer les dimensions
Q17 de Q et ω_0. Justifier.

(b) Vérifier alors que vos expressions de Q et ω_0 en fonction de r, R, L et C sont bien homo-
Q18 gènes.

4. On s'intéresse maintenant au régime pseudo-périodique, montrer alors que la pseudo pul-
Q19 sation vaut $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

Q20 5. Déterminer alors littéralement l'expression la plus "légère" possible de $i_L(t)$.

6. On donne ci-dessous la courbe de $i_L(t)$:

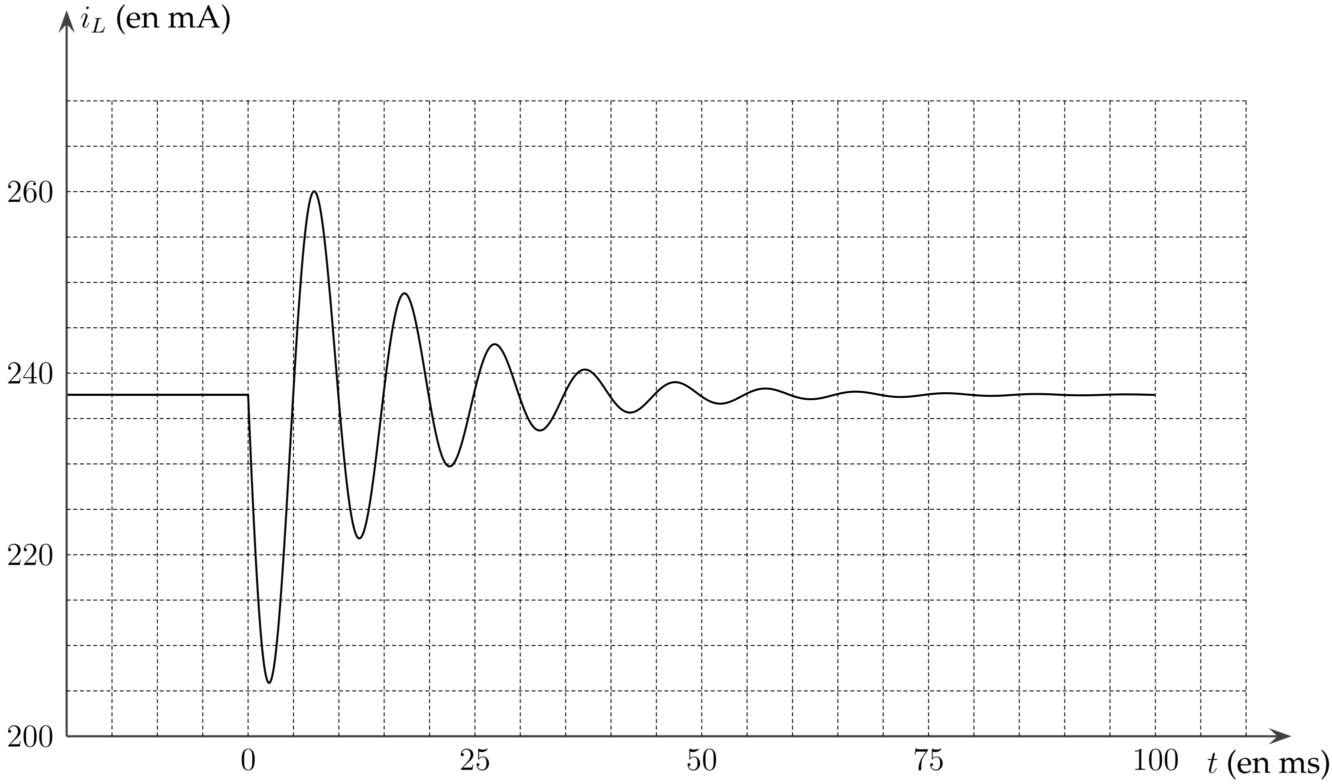
Q21 (a) Sachant que $r = 0{,}5\ \Omega$ et $R = 50\ \Omega$, déterminer la valeur de la fem du générateur. Justifier.

Q22 (b) Mesurer la pseudo-période T en expliquant la méthode et en déduire la valeur de ω.

(c) Cette courbe a été obtenue à partir d'une mesure de u grâce à une carte d'acquisition puis à un calcul sur le logiciel d'acquisition.

i. Expliquer la formule utilisée pour obtenir i_L à partir de u et des caractéristiques E, R
Q23 du générateur.

ii. Reproduire la courbe de i_L et dessiner dessous la courbe initiale de u sans se préoccuper
Q24 de l'échelle et en expliquant succintement.

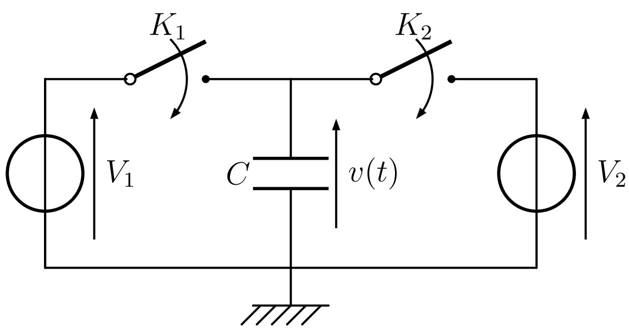


C. Simulation de résistance par commutation capacitive

Attention

Les questions de cette partie sont plus difficiles. Vous devez avoir cherché tout le reste du devoir avant de les aborder.

Le dispositif considéré est représenté ci-contre. Les interrupteurs K_1 et K_2 se ferment alternativement.
On supposera qu'un interrupteur ouvert présente une résistance infinie, tandis qu'un interrupteur fermé présente une résistance r, identique pour K_1 et K_2.



Les commutations sont supposées instantanées, selon la séquence suivantes (n entier positif) :

$$\begin{cases} K_1 \text{ fermé} ; K_2 \text{ ouvert pour } nT < t < (n+1/2)T \\ K_1 \text{ ouvert} ; K_2 \text{ fermé pour } (n+1/2)T < t < (n+1)T \end{cases}$$

On suppose le phénomène établi depuis un temps suffisamment long pour que les potentiels de tous les points soient des fonctions périodiques du temps, de période T.

1. À un instant considéré comme l'instant initial $t = 0$ (K_1 se ferme pendant que K_2 s'ouvre), on note V_0 la tension aux bornes du condensateur : $v(0) = V_0$.

Q25 (a) Écrire l'équation différentielle satisfaite par $v(t)$ entre les instants 0 et $T/2$.

Q26 (b) En déduire l'expression de $v(t)$ entre les instants 0 et $T/2$.

Q27 (c) Calculer alors $v(T/2)$, qu'on notera V_0', en fonction de r, C, T, V_0 et V_1.

On posera dorénavant : $a = \frac{T}{2rC}$.

Q28 2. (a) Écrire l'équation différentielle satisfaite par $v(t)$ entre les instants $T/2$ et T.

Q29 (b) En déduire $v(T)$ en fonction de V_0', V_2 et a.

Q30 3. Compte tenu de la périodicité de $v(t)$ dans le temps, exprimer V_0 et V_0' en fonction de V_1, V_2 et a.

Q31 4. Étudier et **interpréter** les cas limites $rC \ll T$ et $rC \gg T$.

Q32 5. Application numérique : $r = 100\ \Omega$; $T = 10^{-5}$ s ; $V_1 = 5$ V ; $V_2 = 1$ V ; $C = 10$ nF.

Tracer $v(t)$ sur une période avec l'échelle suivante : 1 cm pour 10^{-6} s ; 2 cm pour 1 V.

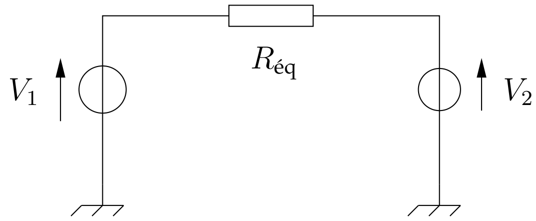
Q33 6. (a) Exprimer la charge q accumulée dans le condensateur aux instants $t = 0$, $t = T/2$ et T.

Q34 (b) En déduire l'expression Δq de la quantité de charge qui transite du "générateur V_1" vers le "générateur V_2", pendant une période, au travers du circuit précédent.

On exprimera le résultat en fonction de C, a et $(V_1 - V_2)$.

Q35 7. Quelle est l'expression de l'intensité moyenne I_{moyen} du courant qui traverse chaque interrupteur, en fonction de C, T, a, V_1 et V_2. Faire l'application numérique.

Q36 8. En déduire la valeur de la résistance équivalente $R_{\text{éq}}$ qui, branchée comme sur la figure ci-contre, serait traversée par le même courant moyen. Faire l'application numérique.



Q37 9. Quelle peut être l'utilité d'un tel dispositif ?

II. Fuite précipitée de James Bond

Un agent secret bien connu, inflitré depuis plusieurs mois au sein d'une organisation criminelle, vient d'être démasqué. Ce problème se propose d'étudier sa fuite précipitée. Sauf mention contraire, l'étude se fera dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Les différentes parties sont largement indépendantes.

1 La fuite en avion

L'agent secret parvient à monter à bord d'un petit avion. Au cours de la phase de décollage, l'avion se déplace en ligne droite avec une accélération constante a_0 qui le fait passer d'une vitesse nulle à la vitesse v_0=144 km/h en huit secondes.

Q38 1. Que vaut l'accélération a_0 de l'avion ? Quelle est la distance parcourue durant la phase de décollage ?

Une fois dans les airs, l'agent secret doit effectuer un demi-tour le plus rapidement possible. L'avion, que l'on suppose ponctuel, suit une trajectoire circulaire de rayon R à altitude constante et à la vitesse constante v_0. Pour éviter l'évanouissement de l'agent secret, l'accélération subie lors de la manœuvre doit être inférieure à $5g$, où $g = 9{,}81$ m.s^{-2} est l'accélération de la pesanteur.

Q39 2. Quelle est la valeur minimale R_{min} du rayon de la trajectoire ? On pourra introduire une base polaire judicieusement choisie.

Q40 3. En déduire la durée minimale τ_{min} pour effectuer le demi-tour.

2 Les tirs de roquettes

Même si l'agent a réussi à prendre les airs, il n'est pas encore sorti d'affaire puisque ses adversaires disposent de lance-roquettes. Les roquettes, supposées ponctuelles et de masse $m = 5$ kg, sont envoyées depuis le point O (abscisse $x = 0$ et altitude $z = 0$) avec une vitesse initiale de norme constante v_1 et une inclinaison α réglable (voir la figure 1 ci-dessous).

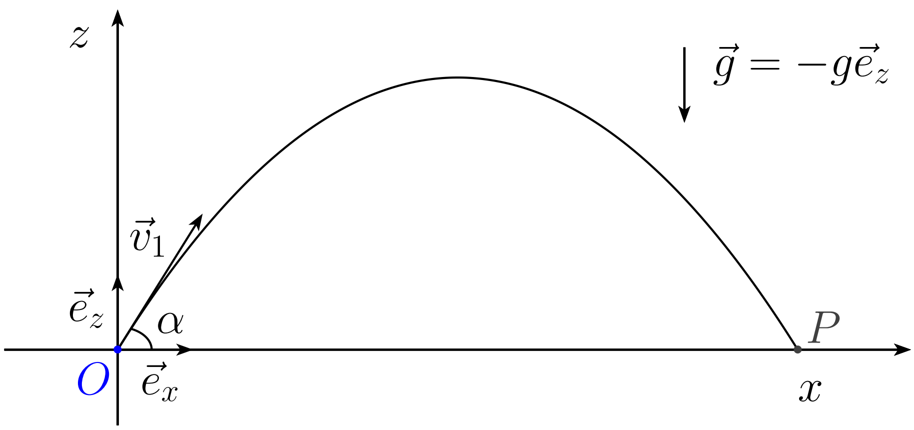


FIGURE 1 – Lancement des roquettes à éviter.

4. On suppose que les roquettes ne sont soumises qu'à l'action de la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

Q41 (a) Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement d'une roquette lancée à $t = 0$ en fonction de v_1,α et g.

Q42 (b) La portée du tir correspond à la distance $p = OP$ entre la position O du lance-roquette
Q43 et la position du point de chute P de la roquette. Exprimer p en fonction de v_1, α et g.

Q44 (c) Sachant que la portée maximale du lance-roquette est $p_{\text{max}} = 500$ m, en déduire la valeur de la vitesse v_1.

Q45 (d) Déterminer l'équation $z(x)$ de la trajectoire d'une roquette lancée avec une inclinaison α quelconque. Dans cette équation, on fera apparaître l'angle α uniquement à travers la fonction $\tan \alpha$. On rappelle que

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha.$$

Q46 (e) Pour qu'un point $N(x,z)$ puisse être atteint par une roquette, il faut qu'il existe un angle α tel que les coordonnées (x,z) vérifient la relation $z(x)$ précédente. En déduire l'expression de la courbe $(\mathcal{C})$ délimitant les points accessibles des points non accessibles par un tir à v_1 fixé et à α variable (voir la figure 2 ci-dessous).

Q47 (f) Justifier l'appellation « parabole de sécurité » donnée à cette courbe. $(\mathcal{C})$

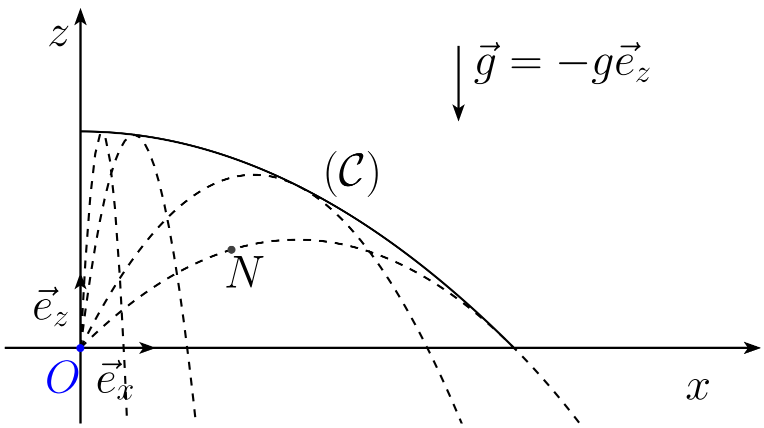


FIGURE 2 – Lancement des roquettes à éviter

5. En plus de l'action de la pesanteur, les roquettes sont en réalité également soumises à une force de frottement due à l'air de la forme $\vec{F} = -k\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la roquette et k une constante positive.

Q48 (a) Donner l'unité de k dans le système international.

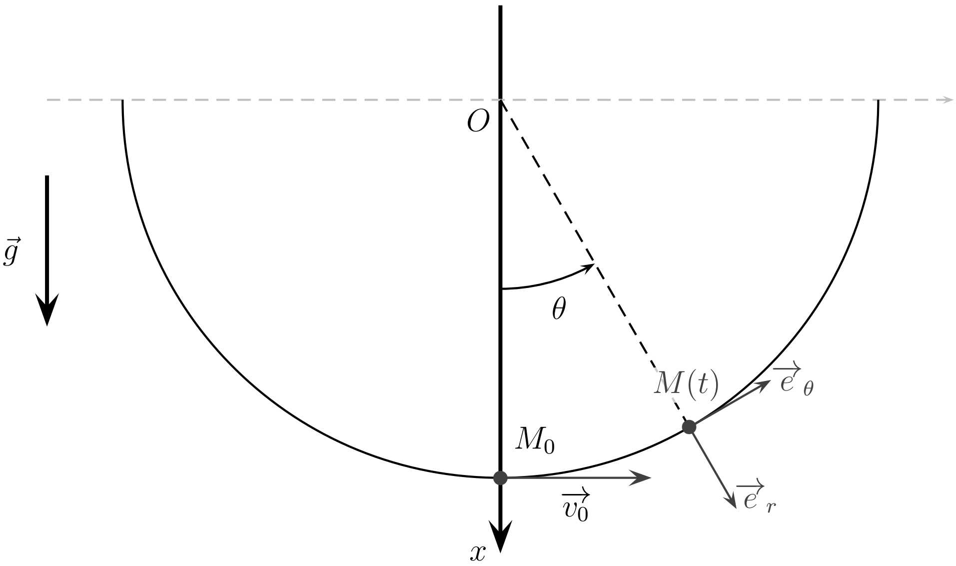
Q49 (b) Écrire l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}$ (équation vectorielle).

Q50 (c) Montrer que les roquettes atteignent une vitesse limite $\vec{v}_{\text{lim}}$ que l'on exprimera en fonction des données de l'énoncé.

Q51 (d) Déterminer l'évolution $\vec{v}(t)$ du vecteur vitesse d'une roquette. On exprimera $\vec{v}(t)$ en fonction uniquement du temps t, du vecteur vitesse initial $\vec{v}_1$ de la roquette, de la vitesse limite $\vec{v}_{\text{lim}}$ et d'un temps caractéristique τ que l'on définira en fonction des données de l'énoncé.

III. Mouvement pendulaire amorti

Un petit objet assimilé à un point matériel M, de masse m, peut glisser sans frottement le long d'un rail ayant la forme d'un demi-cercle de centre O et de rayon R, placé dans un plan vertical.



On repère la position du point M à l'instant t par l'angle $\theta(t) = (\overrightarrow{OM}_0, \overrightarrow{OM}(t))$.

À l'instant $t = 0$, l'objet est lancé du point M_0 avec une vitesse $\vec{v}_0$.

Dans tout le problème, on utilisera une base de projection polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. On prendra pour valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 10$ m.s^{-2}.

Q52 1. Faire l'inventaire des forces appliquées à M, et les représenter sur un schéma clair lorsque le point est dans une position $M(t)$ quelconque. On précisera les composantes de ces forces sur la base polaire.

Q53 2. Exprimer l'accélération de M dans la base polaire. Justifier.

Q54 3. En déduire l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $\theta(t)$.

Q55 4. On suppose que la norme v_0 du vecteur vitesse initial est suffisamment faible pour que la condition $\theta(t) \ll 1$ rad soit satisfaite à chaque instant. Déterminer complètement l'expression de $\theta(t)$ dans cette hypothèse en fonction de v_0, g, R et t.

On suppose à partir de maintenant que le point M subit au cours de son mouvement une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, où λ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du point M à l'instant t. La condition $\theta(t) \ll 1$ rad reste également satisfaite à chaque instant.

Q56 5. Établir la nouvelle équation différentielle satisfaite par la fonction $\theta(t)$.

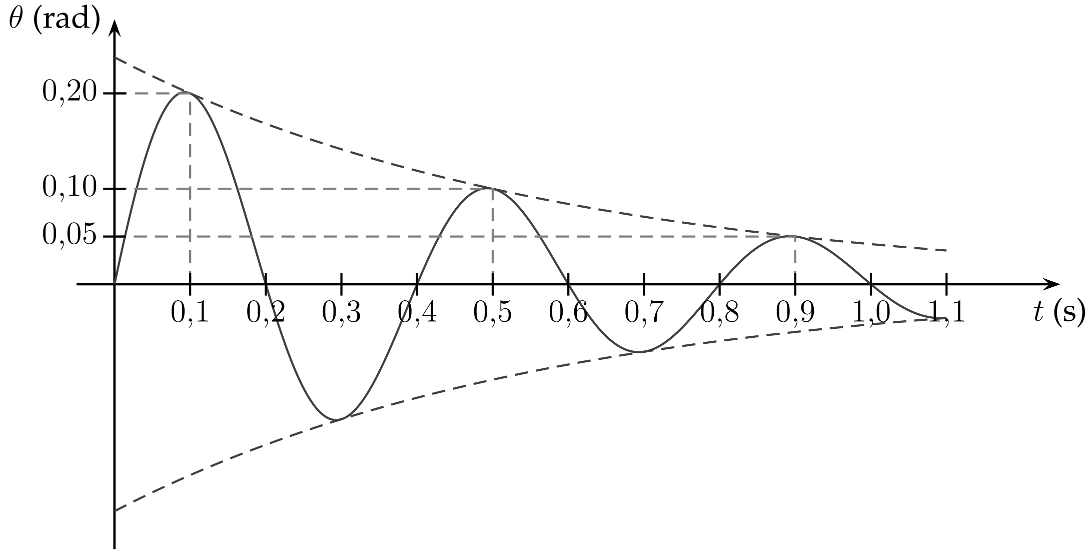
Q57 6. Les grandeurs m, g et R étant fixées, donner la condition portant sur λ pour que le mouvement soit pseudo-périodique.

Q58 7. Cette condition étant réalisée, exprimer $\theta(t)$ sous la forme :

$$\theta(t) = A\exp(-\frac{t}{\tau})\sin(\Omega t)$$

On justifiera soigneusement l'établissement de cette relation et on exprimera A, τ et Ω en fonction de v_0, m, g, R et λ.

8. L'allure de la courbe représentative des variations de la fonction $\theta(t)$ est donnée ci-dessous.



On appelle décrément logarithmique la grandeur sans dimension :

$$\delta = ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right)$$

où T est la pseudo-période et t le temps.

Q59 (a) Exprimer λ en fonction de δ, m et T.

Q60 (b) Par lecture graphique, déterminer la valeur de T.

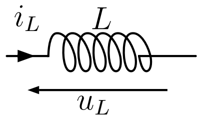
Q61 (c) Par lecture graphique, déterminer la valeur de δ.

Q62 (d) En déduire la valeur de λ (sans omettre de préciser son unité), sachant que $m = 100$ g.

I. AUTOUR DU CONDENSATEUR

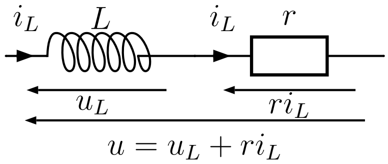
A. Établissement du courant dans le circuit RL

1. Relations constitutives et tension

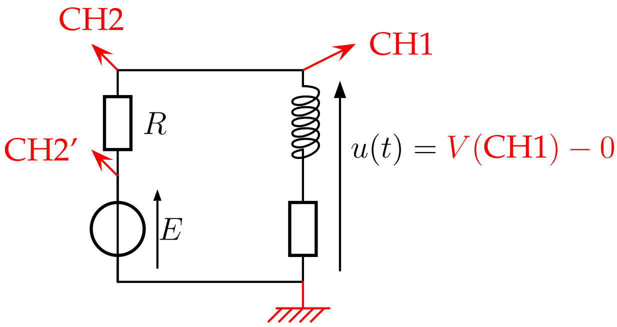


Q1 (a) $u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ avec les notations définis sur le schéma à droite

(b) Pour la bobine réelle avec les notations du problème :



Q2 Les deux dipôles étant en série, ils sont parcourus par le même courant i_L. Par additivité des tensions, $\boxed{u = u_L + ri_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + ri_L}$



Q3 (c) Il faut savoir représenter les branchements de l'oscilloscope et réciproquement il faut savoir pour des branchements donnés quelles sont les tensions mesurées.
Cela se fait à l'aide du symbole de masse qui représente le potentiel de référence et d'une flèche au niveau du potentiel mesuré (par rapport à la masse).

Ci-dessus, CH1 permet de mesurer $u(t)$ comme indiqué. Pour CH2, la tension de sortie du GBF ... c'est en fait la même car "E et R" forme le modèle un générateur réel. Si on avait effectivement un générateur idéal de tension en série avec un résistor, on pourrait brancher CH2′ comme ci-dessus entre E et R pour avoir la mesure de E. On pouvait donc soit représenter CH2 comme ci-dessus, soit dire que CH1 est suffisant et fait les 2 mesures souhaités déjà.

(d) cf méthode vue en TP : la tension aux bornes du générateur réel est $E - Ri$. On se place en circuit ouvert (rien de branché sur le générateur) et on mesure la tension à ses bornes.
Q4 Puisque $i = 0$, on mesure E.

On branche ensuite un résistor de résistance variable R_2 et d'après la formule des ponts diviseurs de tension, la tension aux bornes du générateur est $\frac{R_2}{R_2+R}E$. On fait varier R_2 jusqu'à mesurer $E/2$ en sortie : on a alors $R_2/(R_2 + R) = 1/2 \Rightarrow R_2 = R$. Il suffit ensuite de mesurer la résistance R_2 à l'ohmmètre pour connaitre R.
Autre méthode vue en TP : à partir du tracé de la caractéristique du GBF.

Remarque : faites un schéma et représentez le voltmètre ou l'oscilloscope.

2. Valeurs limites

Faites des schémas pour JUSTIFIER vos affirmations ! Utilisez les lois de l'électricité et les dipôles équivalents en régime permanent.

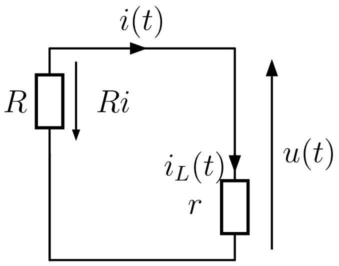


FIGURE 1 – Circuit équivalent à $t < 0$

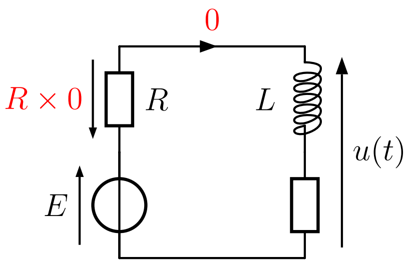


FIGURE 2 – Circuit à $t = 0^+$

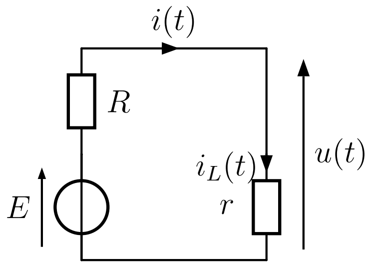


FIGURE 3 – Circuit équivalent à $t \to \infty$

(a) À $t < 0$ le générateur est équivalent à un fil (tension nulle d'après l'énoncé). On est en régime permanent, on en déduit que la bobine est équivalente à un fil. On peut donc représenter le schéma de la figure 1 ci-dessus. $u = ri_L = ri = -Ri \Rightarrow (r+R)i = 0 \Rightarrow i =$
Q5 0. On a donc $\boxed{i_L(t<0) = 0 \text{ et } u(t<0) = 0}$.

(b) À $t = 0^+$, on peut seulement utiliser <u>la continuité du courant à travers une bobine</u>, on en déduit que $\boxed{i_L(t=0^+) = i_L(t=0^-) = 0}$, ce que l'on représente sur la figure 2. De là, on obtient la tension aux bornes de R qui vaut 0. Puis d'après la loi des mailles $u + 0 = E \Rightarrow$
Q6 $\boxed{u(t=0^+) = E}$.

Attention à ne pas essayer d'utiliser quelque chose sur $u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ car même si $i_L(t = 0^+) = i_L(t = 0^-)$ (c'est-à-dire simplement la courbe est continue), on ne sait **<u>rien</u>** sur $\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ (pente de la courbe en ce point).

(c) Pour $t \to \infty$, on est en régime permanent et on peut remplacer la bobine par un fil. Cela
Q7 donne le schéma de la figure 3 ci-dessus. On en déduit $\boxed{u(t\to\infty) = \frac{r}{R+r}E}$ d'après les ponts diviseurs de tension et $\boxed{i_L(t\to\infty) = E/(r+R)}$ d'après la loi de Pouillet.

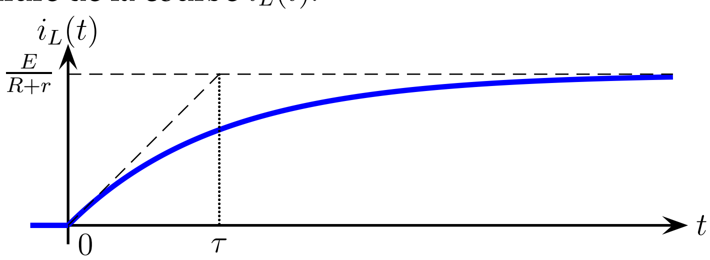
3. (a) Le circuit n'a qu'une seule maille, $i_L = i$, la tension aux bornes de R en convention récepteur est Ri (cf circuit figure 1 par exemple). La loi des mailles donne $u + Ri_L = E$ et en utilisant la relation établie pour u cela donne $\boxed{L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + ri_L + Ri_L = E}$.
Q8 On présente cette équation différemment pour la mettre sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{r+R}{L}i_L = \frac{E}{R+r}\frac{R+r}{L} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i_L = \frac{E/(R+r)}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R+r}}$$

(b) Pour ce genre d'analyse dimensionnelle, on part des relations constitutives : $[u] = [R][i] =$
Q9 $[L]\frac{[i]}{[\mathrm{d}t]} \Rightarrow [L/R] = [\mathrm{d}t] = \mathrm{T}$. On a donc bien $\boxed{[\tau] = [L/R] = \mathrm{T}}$.

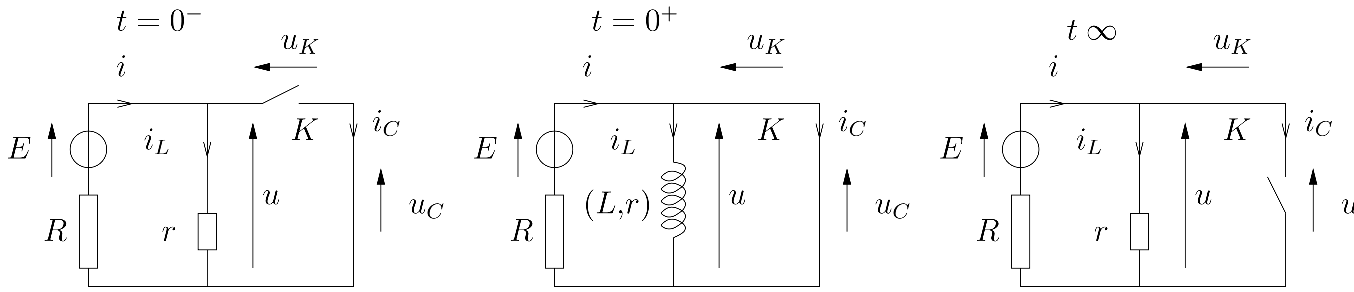
(c) Une solution particulière est $i_P = E/(R+r)$, la solution générale de l'équation homogène associée est $i_H = A\exp(-t/\tau)$ d'où la solution générale de l'équation différentielle est $i_L(t) = E/(R+r) + A\exp(-t/\tau)$. À $t = 0$, on a montré que $i_L(t=0) = 0$ d'où
Q10 $A = -E/(R+r)$ et finalement la solution est $\boxed{i_L(t) = \frac{E}{R+r}\left(1 - \exp(-t/\tau)\right)}$

Q11 (d) Allure de la courbe $i_L(t)$.



B. Réponse du circuit au branchement d'un condensateur

1. Commençons par représenter le circuit dans les trois situations envisagées :



Q12 (a) $t=0^-$ correspond simplement au système de la partie précédente aux temps longs, soit $\boxed{i_C(0^-)=0}$ (car interrupteur ouvert) d'où $\boxed{i_L(0^-)=\frac{E}{R+r}}$ comme précédemment et on en déduit $\boxed{u(0^-)=r.i_L(0^-)=\frac{rE}{R+r}}$.

Remarque : $u(0^-)=u_C(0^-)+u_K(0^-)\neq u_C(0^-)$: la tension aux bornes de K ouvert est $u_K(0^-)=u(0^-)=\frac{rE}{R+r}$.

Q13 (b) à $t=0^+$: par continuité de i_L et de u_C, $\boxed{i_L(0^+)=\frac{E}{R+r}}$ et $\boxed{u_C(0^+)=0.}$ La tension aux bornes de r est donc nulle et $\boxed{i(0^+)=\frac{E}{R}}$. De plus, $i(0^+)=i_L(0^+)+i_C(0^+) \iff i_C(0^+)=\frac{E}{R}-\frac{E}{R+r}\Rightarrow \boxed{i_C(0^+)=\frac{rE}{R(R+r)}}$.

Remarque : on a discontinuité de u_L qui passe de $\frac{rE}{R+r}$ à 0 et de i_C : $(0\to\frac{rE}{R(R+r)})$.

Q14 (c) à $t\to\infty$: Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, on se retrouve donc avec exactement la même situation qu'à $t=0^-$ d'où $i_C(\infty)=0$, $i_L(\infty)=i(\infty)=\frac{E}{R+r}$ et $u(\infty)=u_C(\infty)=\frac{rE}{R+r}$.

	i_c	i_L	i	u
$t=0^-$	0	$\frac{E}{R+r}$	$\frac{E}{R+r}$	$\frac{rE}{R+r}$
$t=0^+$	$\frac{rE}{R(R+r)}$	$\frac{E}{R+r}$	$\frac{E}{R}$	0
$t=\infty$	0	$\frac{E}{R+r}$	$\frac{E}{R+r}$	$\frac{rE}{R+r}$

Q15 2. (a) On a le système de 4 équations à 4 inconnues (i, i_L, i_C et u) suivant :

$$\begin{cases} u=E-Ri & (1)\\ u=ri_L+L\frac{di_L}{dt} & (2)\\ i_c=C\frac{du}{dt} & (3)\\ i=i_L+i_C & (4)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{(2) dans (1) donne } i=\frac{E-u}{R}=\frac{E}{R}-\frac{r}{R}i_L-\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} & (5)\\ \text{(2) dans (3) donne } i_c=rC\frac{di_L}{dt}+LC\frac{d^2i_L}{dt^2} & (6)\end{cases} \text{ et (5)}$$

et (6) dans (4) donne enfin $LC\frac{d^2i_L}{dt^2}+(rC+\frac{L}{R})\frac{di_L}{dt}+(1+\frac{r}{R})i_L(t)=\frac{E}{R}$

$$\Rightarrow \frac{d^2i_L}{dt^2}+\left(\frac{r}{L}+\frac{1}{RC}\right)\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{LC}\left(1+\frac{r}{R}\right)i_L(t)=\frac{E}{RLC} \iff \frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{di_L}{dt}+\omega_0^2 i_L(t)=\frac{E}{RLC}$$

(b)

avec par identification, $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}\left(1+\frac{r}{R}\right)}}$ et $\boxed{Q=\frac{\omega_0}{\frac{r}{L}+\frac{1}{RC}}}$

Q16

Q17 3. (a) Compte tenu de la forme canonique : $\frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{di_L}{dt}+\omega_0^2 i_L(t)=\dots$ on en déduit les équations au dimension suivantes : $\frac{[i]}{\mathrm{T}^2}=\frac{[\omega_0]}{[Q]}\frac{[i]}{\mathrm{T}}=[\omega_0]^2[i]$. . En prenant la première et la dernière, on en déduit $\boxed{[\omega_0]=\mathrm{T}^{-1}}$, puis avec la deuxième : $\frac{\mathrm{T}^{-1}[i]}{[Q]T}=\frac{[i]}{\mathrm{T}^2}$ d'où $\boxed{[Q]=1}$.

(b) On montré que $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}\left(1+\frac{r}{R}\right)}$. Le terme $1+\frac{r}{R}$ est sans dimension. Pour LC, on utilise les relations constitutives : $[u] = L\frac{[i]}{\mathrm{T}}$ pour la bobine et $[i] = C\frac{[u]}{\mathrm{T}}$ pour le condensateur. Soit en faisant le produit des deux équations : $[ui] = LC\frac{[ui]}{\mathrm{T}^2}$. On obtient alors

Q18 $\left[\sqrt{\frac{1}{LC}\left(1+\frac{r}{R}\right)}\right] = \sqrt{\mathrm{T}^{-2}} = \boxed{\mathrm{T}^{-1}}$, ce qui est cohérent.

De la même façon pour Q : $\frac{r}{L} = \mathrm{T}^{-1}$ (montré dans la question 3(b) de la partie précédente) et RC est un temps d'après le cours sur le circuit RC. L'addition $\frac{r}{L}+\frac{1}{RC}$ est donc bien homogène et de dimension T^{-1}. On a donc $[Q] = \frac{\mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{T}^{-1}} = \boxed{1}$.

4. L'équation caractéristique $z^2 + \frac{\omega_0}{Q}z + \omega_0^2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = \omega_0^2(\frac{1}{Q^2}-4) < 0$ (car $Q > \frac{1}{2}$ car régime pseudo-périodique) donc les solutions de l'équation caractéristique sont complexes ($z_{1,2} = \frac{1}{2}(-\omega_0/Q \pm j\sqrt{-\Delta})$) et le régime pseudo-périodique, de pseudo-pulsation

Q19 $\omega = \Im(z) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}.}$

5. La solution de l'équation différentielle se compose :
   - ➢ de la solution générale de l'équation homogène, soit $i_{L_h}(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\exp(-\frac{\omega_0}{2Q})$; qui correspond physiquement au régime transitoire et
   - ➢ d'une solution particulière (ici constante, car le second membre est constant), soit $i_{L_p} = \frac{E}{RLC\omega_0^2} = \frac{E}{R+r}$ qui correspond physiquement au régime établi ($t > 5\times$ constante de temps du circuit).

$$\Rightarrow i_L(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} + \frac{E}{R+r}$$

A et B étant 2 constantes déterminées par les conditions initiales suivantes :

Q20

$$\begin{cases} i_L(0^+) = \frac{E}{r+R} & \Rightarrow \quad A = 0 \\ \frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{u(0^+) - ri_L(0^+)}{L} = \frac{-rE}{L(r+R)} & \Rightarrow \quad B = \frac{-rE}{L\omega(r+R)} \end{cases} \quad \Rightarrow i_L(t) = \frac{E}{r+R}\left(1 - \frac{r}{L\omega}\,e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\sin\omega t\right)$$

6. (a) On a montré précédemment que $i_L(0) = i_L(t\to\infty) = \frac{E}{R+r}$ Graphiquement 60 mA occupe 7,2 cm, ce qui nous donne l'échelle. On voit que $i(0)$ est 3 mm sous 240 mA, d'où $i(0) = 240 - 0{,}3\times 60/7{,}2 = 237{,}5$ mA (moins de chiffres significatifs en fait, mais on garde tous les chiffres pour le prochain calcul). On en déduit $E = (R+r)\times i(0) = 11{,}99375 =$

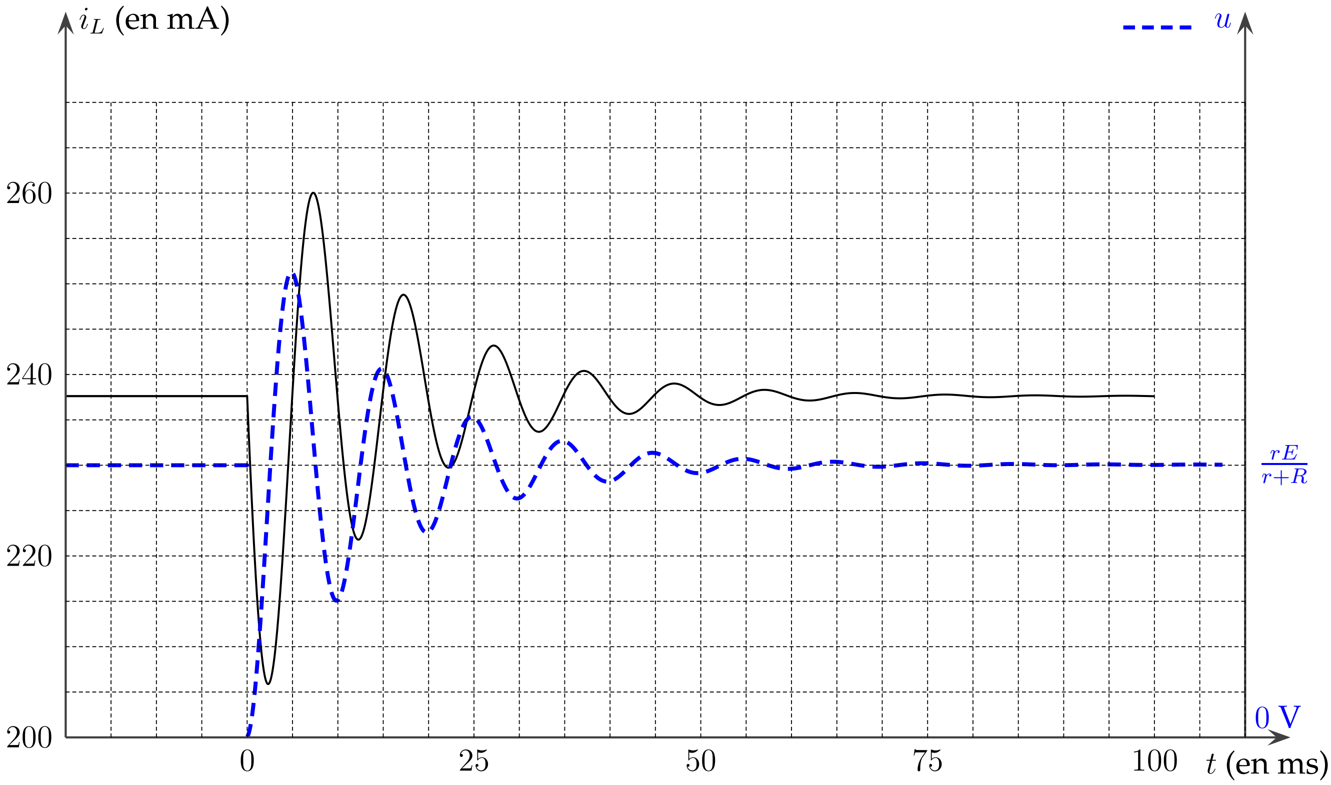
Q21 $\boxed{12}$ V (avec 2 chiffres significatifs).

(b) En terme d'échelle : 100 ms occupe 12,0 cm. On mesure 6 pseudo-périodes : $6T$ qui

Q22 occupe 7,15 cm : $\boxed{T = \frac{1}{6}\left(7{,}15\frac{100}{12}\right) = 9{,}9\text{ ms}}$. On en déduit $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 6{,}3\times 10^2\text{ rad/s}}$.

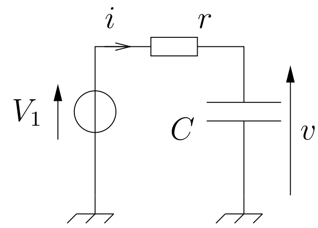
Q23 (c) i. $u = E - Ri$, d'où $\boxed{i_L = i - i_c = \frac{E-u}{R} - C\frac{du}{dt}}$ (On peut aussi résoudre l'équation différentielle $u = L\frac{di_L}{dt} + ri_L$ par la méthode d'Euler,mais on n'a pas le choix du "pas de temps" dt car il faut utiliser les valeurs connues de u).

Q24 ii. Ci-dessous, courbe de i_L et $u = ri_L + L\frac{di_L}{dt}$. À respecter :
   - ➢ pour les $t < 0$, valeur non nulle ($rE/(r+R)$)
   - ➢ à $t = 0$, valeur nulle (donc discontinuité)
   - ➢ oscillations à la même période
   - ➢ même limite en $t\to\infty$ que pour $t < 0$



C. Simulation de résistance par commutation capacitive

1. (a) Entre les instants 0 et $T/2$:



Le circuit correspond au schéma ci-contre.

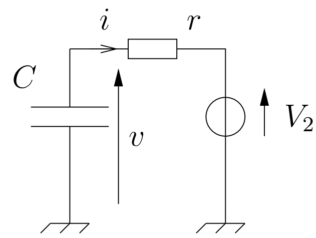
Q25 $v + ri - V_1 = 0$ avec $i = C\frac{dv}{dt}$ d'où $v + rC\frac{dv}{dt} = V_1$, soit $\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{V_1}{\tau} \text{ avec } \tau = rC}$

(b) Solution générale : $v = \alpha e^{-t/\tau} + V_1$ avec α une constante définie par la condition initiale $v(0^+) = V_0$ (continuité de la ten-

Q26 sion aux bornes d'un condensateur), soit $\alpha = V_0 - V_1$ et $\boxed{v = (V_0 - V_1)e^{-t/\tau} + V_1.}$

Q27 (c) $V_0' = v(T/2) = (V_0 - V_1)e^{-T/2rC} + V_1$ soit $\boxed{V_0' = (V_0 - V_1)e^{-a} + V_1}$ avec $a = \frac{T}{2rC}$.

2. (a) Entre les instants $T/2$ et T :



Le circuit correspond au schéma ci-contre.

$v - ri - V_2 = 0$ avec $i = -C\frac{dv}{dt}$ (C en convention générateur)

Q28 d'où $v + rC\frac{dv}{dt} = V_2$, soit $\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{V_2}{\tau} \text{ avec } \tau = rC.}$

(b) Résolution de cette équation différentielle : $v = \beta e^{-t/\tau} + V_2$

Q29 avec pour condition à $T/2$:$v(T/2) = V_0' \Rightarrow \beta = (V_0' - V_2)\,e^{a}$

et $\boxed{v = (V_0' - V_2)e^{a-t/\tau} + V_2}$ et on a $v(T) = (V_0' - V_2)e^{-a} + V_2$

3. $v(T) = v(0)$ car la période des signaux est T et la tension aux bornes d'un condensateur une fonction continue de t, d'où le système :

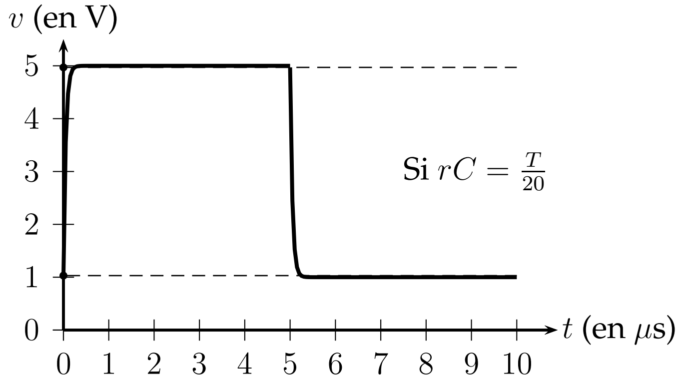
$\begin{cases} V_0' = (V_0 - V_1)e^{-a} + V_1 & (1) \\ V_0 = (V_0' - V_2)e^{-a} + V_2 & (2) \end{cases}$ (1) dans (2) donne $V_0 = [(V_0 - V_1)e^{-a} + V_1 - V_2]e^{-a} + V_2 \Rightarrow$

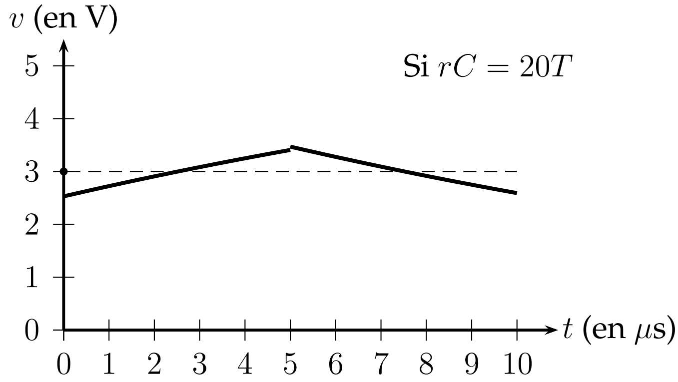
Q30 $V_0(1 - e^{-2a}) = V_1 e^{-a}(1 - e^{-a}) + V_2(1 - e^{-a}) \Rightarrow V_0(1 + e^{-a})(1 - e^{-a}) = (V_1 e^{-a} + V_2)(1 - e^{-a})$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{V_1 e^{-a} + V_2}{1 + e^{-a}} \qquad \text{et} \qquad V_0' = \frac{V_1 + V_2 e^{-a}}{1 + e^{-a}}$$

Q31 4. Si $rC \ll T$, alors $a \gg 1$ et $e^{-a} \simeq 0$ d'où $\boxed{V_0 \simeq V_2}$ et $\boxed{V_0' \simeq V_1}$.

La constante de temps τ étant très petite, le condensateur se charge très rapidement : quand on ferme K_1, v tend quasi-instantanément vers V_1, et quand on ferme K_2, v tend quasi-instantanément vers V_2. Par conséquent v est une tension créneau entre V_1 et V_2.





Si $rC \gg T$, alors $a \ll 1$ et $e^{-a} \simeq 1$ d'où $\boxed{V_0 \simeq V_0' \simeq \frac{V_1+V_2}{2}}$.

La constante de temps τ est tellement grande devant T que la tension aux bornes du condensateur n'a pas le temps de varier : elle s'établit en régime périodique de telle façon que la charge δq récupérée par C de nT à $(n+\frac{1}{2})T$ (à partir de V_1) soit la même que la charge transmise à V_2 de $(n+\frac{1}{2})T$ à $(n+1)T$.

Le courant moyen qui circule de V_1 vers C est donc le même que celui qui circule de C vers V_2 (même charge pendant la même durée).

Ce courant transite dans les 2 cas au travers de r d'où : $V_1 - ri = v = V_2 + ri \Rightarrow i = \frac{V_1-V_2}{2r}$ soit $\boxed{v = \frac{V_1+V_2}{2}}$.

5. $\boxed{\tau = 1\ \mu\text{s} = \frac{1}{T}}$, $a = 5$ et on est dans le cas $\tau \ll T$ et, en effet, $\boxed{V_0 = 1{,}03\ \text{V} \simeq V_1 \text{ et } V_0' = 4{,}97\ \text{V} \simeq V_2}$

Q32 Graphe de $v(t)$: Cf. ci-dessous.

6. charge accumulée à différents instants

(a) $\boxed{q(0) = q(T) = Cv(0) = CV_0 \simeq 1{,}03.10^{-8}\ \text{C}}$ et

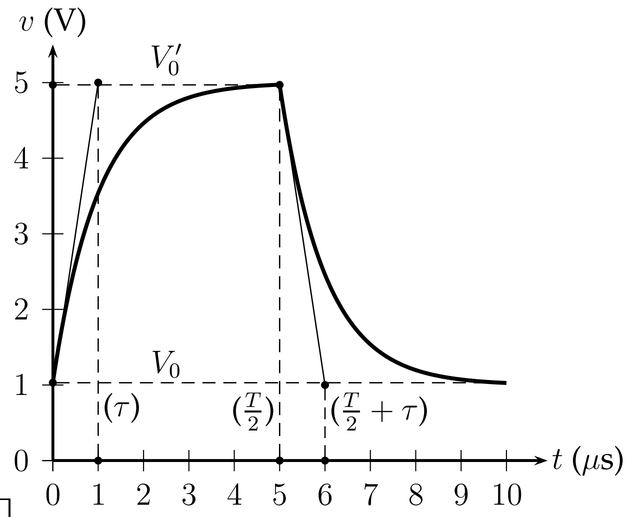
Q33 $\boxed{q(T/2) = Cv(T/2) = CV_0' \simeq 4{,}97.10^{-8}\ \text{C}}$

(b) Entre les instants nT et $(n+\frac{1}{2})T$, la charge $CV_0' - CV_0 = C(V_0' - V_0)$ transite de V_1 vers C ;

Entre les instants $(n+\frac{1}{2})T$ et $(n+1)T$, la charge $CV_0' - CV_0 = C(V_0' - V_0)$ transite de C vers V_2.

La charge qui transite de V_1 vers V_2 pendant une période T vaut donc $\Delta q = C(V_0' -$

Q34 $V_0)$, soit $\boxed{\Delta q = C(V_1 - V_2)\,\frac{1-e^{-a}}{1+e^{-a}} \simeq 3{,}94.10^{-8}\ \text{C}.}$



Q35 7. et 8. Δq transite pendant la durée T, donc $I_{\text{moyen}} = \frac{\Delta q}{T}$ et

$$I_{\text{moyen}} = \frac{C(V_1 - V_2)}{T}\,\frac{1-e^{-a}}{1+e^{-a}} \simeq 3{,}95\ \text{mA} \Rightarrow R_{\text{éq}} = \frac{V_1 - V_2}{I_{\text{moyen}}} = \frac{T}{C}.\frac{1+e^{-a}}{1-e^{-a}} \simeq 1014\ \Omega$$

Q36

Q37 **Utilité :** Ce dispositif simule un conducteur ohmique dont on peut faire varier la résistance électroniquement (par opposition à une méthode mécanique comme avec un potentiomètre classique) en agissant sur la période T des signaux.

II. FUITE PRÉCIPITÉE DE JAMES BOND

I. La fuite en avion

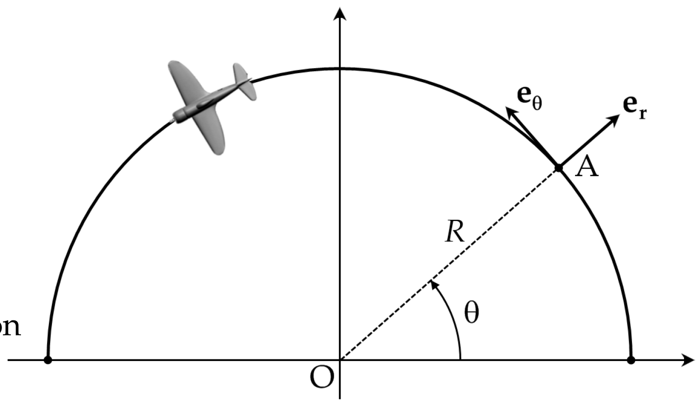
1. On a une accélération constante a_0. En prenant pour origine des temps l'instant où l'avion démarre avec une vitesse nulle on obtient par intégration l'expression de la vitesse $v(t)$ et de la distance parcourue $x(t)$:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = a_0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = a_0 t \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2.$$

Q38 Sachant que l'avion atteint la vitesse $v_0 = 144$ km/h $= 40$ m/s à l'instant $t_0 = 8$ s (fin de la phase de décollage), on en déduit :

$$a_0 = \frac{v(t_0)}{t_0} = \frac{v_0}{t_0} = 5 \text{ m/s}^2 \quad \text{et} \quad x(t_0) = \frac{1}{2}a_0 t_0^2 = \boxed{160 \text{ m}}$$

2. Le mouvement étant circulaire et uniforme, il est judicieux d'introduire une base polaire dont l'origine correspond au centre de rotation O. *Et cela n'a* __*aucun sens*__ *de manipuler des grandeurs r, θ et des vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ si on ne les a pas définis au préalable à l'aide d'une figure !*. Dans cette base de projection, la position, la vitesse et l'accélération de l'avion ont respectivement pour expression :



$$\overrightarrow{OA} = R\vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v_0\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad a = -v_0\dot{\theta}\vec{e}_r = -\frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r$$

Q39 Pour que le pilote ne s'évanouisse pas, il faut que $|||\vec{a}||| = \frac{v_0^2}{R} \leqslant 5g$. D'où $R > R_{\text{min}}$, avec

$$R_{\text{min}} = \frac{v_0^2}{5g}\boxed{\simeq 33 \text{ m}}$$

3 Le demi-tour de longueur πR est effectué avec une vitesse constante v_0. La durée $\tau = \pi R / v_0$
Q40 de la manœuvre vérifie donc :

$$\tau > \tau_{\text{min}} = \frac{\pi R_{\text{min}}}{v_0} = \frac{\pi v_0}{5g} \simeq \boxed{2{,}6 \text{ s}}$$

II. Les tirs de roquettes

4 (a) La roquette n'étant soumise qu'à l'action de la pesanteur, elle est en mouvement de chute libre. D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = -g\vec{e}_z.$$

En projettant sur les deux axes et par intégration successives, et en tennant compte de la vitesse initiale $\vec{v}_1 = v_1 \cos\alpha \vec{e}_x + v_1 \sin\alpha \vec{e}_z$ de la roquette lancée depuis la position
Q41 $(x = 0, z = 0)$, on obtient :

$$a_x = 0 \Rightarrow v_x(t) = v_1 \cos\alpha \Rightarrow \boxed{x(t) = v_1 \cos(\alpha) t},$$

$$a_z = -g \Rightarrow v_z(t) = v_1 \sin\alpha - gt \Rightarrow \boxed{z(t) = v_1 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2}.$$

(b) Soit $t_1 > 0$ l'instant où la roquette touche le sol (position $z = 0$), on a alors :

$$z(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 \left(v_1 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_1 \right) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{2 v_1 \sin\alpha}{g}$$

(Remarquer que l'on peut factoriser par t_1 permet de simplifier la résolution. En effet $t_1 = 0$ est une solution évidente qui correspond à l'instant où la roquette est envoyée
Q42 depuis le zol). On a donc :
Q43

$$p = x(t_1) = v_1 \cos(\alpha) t_1 = \frac{2 v_1^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \boxed{\frac{v_1^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

(c) La portée est donc maximale lorsque $\sin 2\alpha$ est maximal, soit $\sin 2\alpha = 1$ et donc $\alpha = \pi/4$.
Q44 D'où

$$p_{\max} = \frac{v_1^2}{g} \text{ et } v_1 = \sqrt{p_{\max} g} \simeq \boxed{70 \text{ m/s}}$$

Pensez à simplifier les formules, cela facilite l'étude des fonctions ($\sin 2\alpha$ ***ici)***

(d) Pour déterminer l'équation $z(x)$ de la trajectoire, il faut éliminer le paramètre t dans les
Q45 équations horaires précédentes. On obtient alors :

$$t = \frac{x}{v_1 \cos\alpha} \Rightarrow z = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} x - \frac{g x^2}{2 v_1^2 \cos^2\alpha} = \boxed{\tan(\alpha)\, x - \frac{g}{2 v_1^2}(1 + \tan^2\alpha) x^2}.$$

L'angle α n'apparaît en effet que par l'intermédiaire de sa tangente.

(e) Pour qu'un point $N(x,z)$ puisse être atteint par une roquette, il faut qu'il existe un angle α tel que les coordonnées (x,z) vérifient la relation $z(x)$ précédente. Or, lorsque les coordonnées (x,z) sont fixées, l'équation précédente correspond à une équation du second degré vérifiée par $\tan\alpha$:

$$\tan^2\alpha - \frac{2 v_1^2}{g x} \tan\alpha + \left(1 + \frac{2 v_1^2 z}{g x^2} \right) = 0$$

On peut trouver une solution réelle de $\tan\alpha$ (et donc un angle α) si et seulement si le discriminant de l'équation est positif, soit :

$$\Delta = \frac{4 v_1^4}{g^2 x^2} - 4 \left(1 + \frac{2 v_1^2 z}{g x^2} \right) \geqslant 0 \Rightarrow v_1^4 - 2 v_1^2 - g^2 x^2 \geqslant 0 \Rightarrow z \leqslant \frac{v_1^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v_1^2}.$$

Q46 Seuls les points situés sous la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $\boxed{z = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v_1^2}}$ peuvent donc être atteints par un tir de roquette. Les points situés au dessus ne pourront jamais être atteint. L'équation de cette courbe est une parabole.

Remarque, on peut aussi dériver par rapport à α ou $\tan\alpha$ pour trouver le maximum de $y(x,\alpha)$ à x fixé et α variable. On trouve le même résultat en n'oubliant pas que x est la constante et α la variable.

Q47 (f) Justification :

➢ D'après son équation, la courbe $(\mathcal{C})$ est une $\boxed{\text{parabole}}$;

➢ cette courbe délimite une zone en dehors de laquelle on est à l'abri d'un tir de roquette : $(\mathcal{C})$ délimite donc $\boxed{\text{une zone de sécurité}}$.

5 (a) Analyse dimensionnelle :

$$[k] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{[ma]}{[v]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L.T^{-1}} = M.T^{-1} \quad .$$

Q48 Dans le système international, k s'exprime donc en $\boxed{\text{kg/s}}$.

(b) Bilan des forces appliquées à la roquette :

➢ son poids $m\vec{g}$;

➢ la force de frottement due à l'air $\vec{F} = -k\vec{v}$.

Q49 En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{g} - k\vec{v} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}}.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}$.

(c) Cette équation différentielle est caractéristique d'un phénomène du premier ordre et l'on aura ainsi un régime transitoire suivi d'un régime permanent. Le régime permanent est de même nature que le second membre de l'équation, c'est-à-dire constant : le vecteur vitesse $\vec{v}$ atteindra donc une valeur constante $\vec{v}_{\text{lim}}$ au bout d'un temps suffisamment

Q50 long. Lorsque $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}} = \overrightarrow{Cte}$, l'équation différentielle devient :

$$\vec{0} + \frac{k}{m}\vec{v}_{\text{lim}} = \vec{g} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{m}{k}\vec{g}}$$

(d) On sait que la solution d'une équation différentielle est la somme d'une solution particulaire sol_P et de la solution sol_H de l'équation différentielle sans second membre (équation homogène) :

➢ sol_P : d'après la question précédente, on sait que $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}}$ est une solution particulière.

➢ sol_H : l'équation homogène s'écrit : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \vec{0}$ en posant $\tau = \frac{m}{k}$ (ce qui est bien homogène à un temps d'après la question **5.a**). Les solutions de cette équation sont de la forme $\vec{v}(t) = e^{-t/\tau}\vec{A}$, où A est un vecteur constant.

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre s'écrit donc :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{\text{lim}} + e^{-t/\tau}\vec{A}.$$

Le vecteur $\vec{A}$ est déterminée par la condition initiale $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_1$, soit :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{\text{lim}} + \vec{A} \Rightarrow \vec{A} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{\text{lim}}.$$

Q51 Ce qui donne finalement :

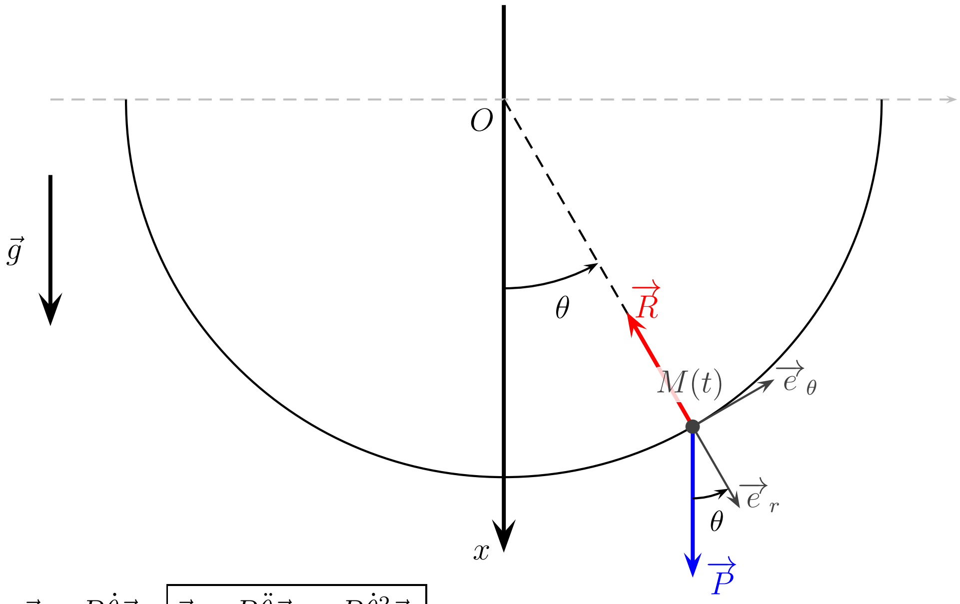
$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_{\text{lim}} + e^{-t/\tau}(\vec{v}_1 - \vec{v}_{\text{lim}})}.$$

III. Mouvement pendulaire amorti

Q52 1. Système : point M. Référentiel : $\mathcal{R}_T$ terrestre supposé galiléen.

Forces : son poids $\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos(\theta)\vec{e}_r - mg\sin(\theta)\vec{e}_\theta}$; la réaction normale du support (car pas de frottements) $\boxed{\vec{R} = N\vec{e}_r}$.

Il n'y a pas de fil, pensez à lire l'énoncé !



Q53 2. $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$; $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$; $\boxed{\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r}$

3. Appliquons la deuxième loi de Newton à l'objet dans $\mathcal{R}_T$: $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$.

Q54 Soit en projection selon $\vec{e}_\theta$: $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + 0$ d'où $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$. (Remarque, une méthode énergétique fonctionne aussi).

4. Pour des angles faibles (cad $\theta(t) \ll 1$), on fait l'approximation : $\sin\theta \simeq \theta$ d'où $\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$.

Le mouvement est celui d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$, la solution est de la forme $\theta(t) = A\cos(\sqrt{\frac{g}{R}}t) + B\sin(\sqrt{\frac{g}{R}}t)$.

Q55 Or $\theta(t=0) = 0 = A$ et $\dot{\theta}(t=0) = \frac{v_0}{R} = B\sqrt{\frac{g}{R}}$ d'où $B = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}$. D'où $\boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)}$

Attention, beaucoup ont écrit $\dot{\theta}(t=0) = v_0$, mais ce n'est pas homogène ! $v = R\dot{\theta}$ d'où $v_0 = R\dot{\theta}_0$.

Q56 5. On ajoute la force de frottements $\vec{f} = -\lambda R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ dans le bilan des forces. Appliquons la deuxième loi de Newton à l'objet dans le référentiel d'étude : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$, soit en projection selon $\vec{e}_\theta$: $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - \alpha R\dot{\theta}$, d'où pour $\theta \ll 1, \sin\theta \simeq \theta$: $ml\ddot{\theta} + mg\theta + \alpha R\dot{\theta} = 0$.

Soit : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0}$

Attention, évitez $\vec{v} = v\vec{e}_\theta$, c'est faux car $v = \|\vec{v}\| \geqslant 0$ alors que $R\dot{\theta}$ peut changer de signe. Utilisez l'expression vectorielle vue dans M_1.

Q57 6. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est : $r^2 + \frac{\lambda}{m}r + \frac{g}{R} = 0$. Le régime est pseudo-périodique si le discriminant est négatif : $\Delta = \frac{\lambda^2}{m^2} - 4\frac{g}{R} < 0$. D'où $\boxed{\lambda < 2m\sqrt{\frac{g}{R}}}$

7. Les racines de l'équation caractéristique sont de la forme : $r\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{m} \pm j\sqrt{4\frac{g}{R} - \frac{\lambda^2}{m^2}}\right)$

La solution est de la forme : $\theta(t) = A\exp(-\frac{t}{\tau})\sin(\Omega t+\varphi)$ avec $\boxed{\tau = 2m/\lambda}$ et $\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \frac{\lambda^2}{4m^2}}}$.

Q58 Comme $\theta(0) = 0$, on peut choisir $\varphi = 0$. $\dot{\theta}(0) = A\Omega = \frac{v_0}{R}$ donc $\boxed{A = \frac{v_0}{R\Omega}}$.

Q59 (a) $\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{A\exp(-\frac{t}{\tau})\sin(\Omega t)}{A\exp(-\frac{t+T}{\tau})\sin(\Omega(t+T))}\right) = \frac{T}{\tau}$ car $\Omega T = 2\pi$ d'où $\boxed{\lambda = \frac{2m\delta}{T}}$

Q60 (b) Sur la courbe, on lit $2T = 0{,}80\,\mathrm{s}$ soit $\boxed{T = 0{,}4\,\mathrm{s}}$

(c) Par lecture graphique en prenant les deux premiers maxima, on lit $\delta = \ln(0{,}20/0{,}10)$

Q61 $\boxed{\delta = \ln 2 = 0{,}69}$.

Q62 (d) D'où $\lambda = \frac{2m\delta}{T} = \frac{2\times 0{,}100\times\ln 2}{0{,}40}$ $\boxed{\lambda = 3{,}5.10^{-1}\ \mathrm{kg.s^{-1}}}$