

Conseils :

- Ce devoir comporte 4 exercices indépendants.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **ré-daction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).

Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.

- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

I. SYSTÈME MASSE–RESSORT

On se place dans le repère (\mathcal{R}) $(0xyz)$ orthonormé, direct, galiléen, de vecteurs unitaires de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le système envisagé est constitué d'un ressort, d'un demi-cercle \mathcal{C} et d'une perle P .

Le ressort est parfait, c'est-à-dire sans masse et développant selon sa propre direction une force proportionnelle à son élongation. On note k ce coefficient de proportionnalité et l_0 la longueur à vide du ressort.

Le demi-cercle (fixe dans (\mathcal{R})) \mathcal{C} , de rayon R , de centre O , est contenu dans le demi-plan xOy , supposé vertical, Ox étant la verticale descendante.

La perle P est un objet quasi-ponctuel de masse m astreint à se déplacer sans frottement sur \mathcal{C} . On notera \vec{N} la force exercée par \mathcal{C} sur P .

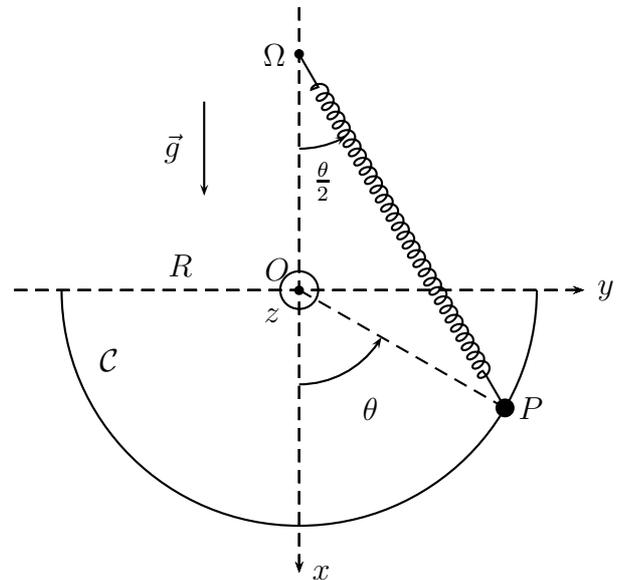
Le ressort a une extrémité liée à P et l'autre à un point Ω situé aux cotes $x = -R, y = 0, z = 0$ de (\mathcal{R}) .

La position de P dans (\mathcal{R}) est repérée par l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OP}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

On note \vec{e}_r le vecteur unitaire de \overrightarrow{OP} et \vec{e}_θ le vecteur unitaire déduit de \vec{e}_r par la rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de \vec{e}_z .

Le système est placé dans le champ de pesanteur d'accélération $\vec{g} = g\vec{e}_x$ de module g constant.

Les expressions vectorielles demandées seront exprimées dans la base $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$.



A. Tension du ressort.

- Q1 1. Recopier le schéma. Donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{P\Omega}$ en fonction de R et θ .
- Q2 2. Donner l'expression du module $P\Omega$ de $\overrightarrow{P\Omega}$ en fonction de R et θ (ou mieux, de $\frac{\theta}{2}$).
On rappelle que $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$.
- Q3 3. Donner l'expression de la tension \vec{T} du ressort en fonction de R, k, l_0 et θ et la mettre sous la forme : $\vec{T} = k(2R \cos \frac{\theta}{2} - l_0) \times (-\cos \frac{\theta}{2} \vec{e}_r + \sin \frac{\theta}{2} \vec{e}_\theta)$.

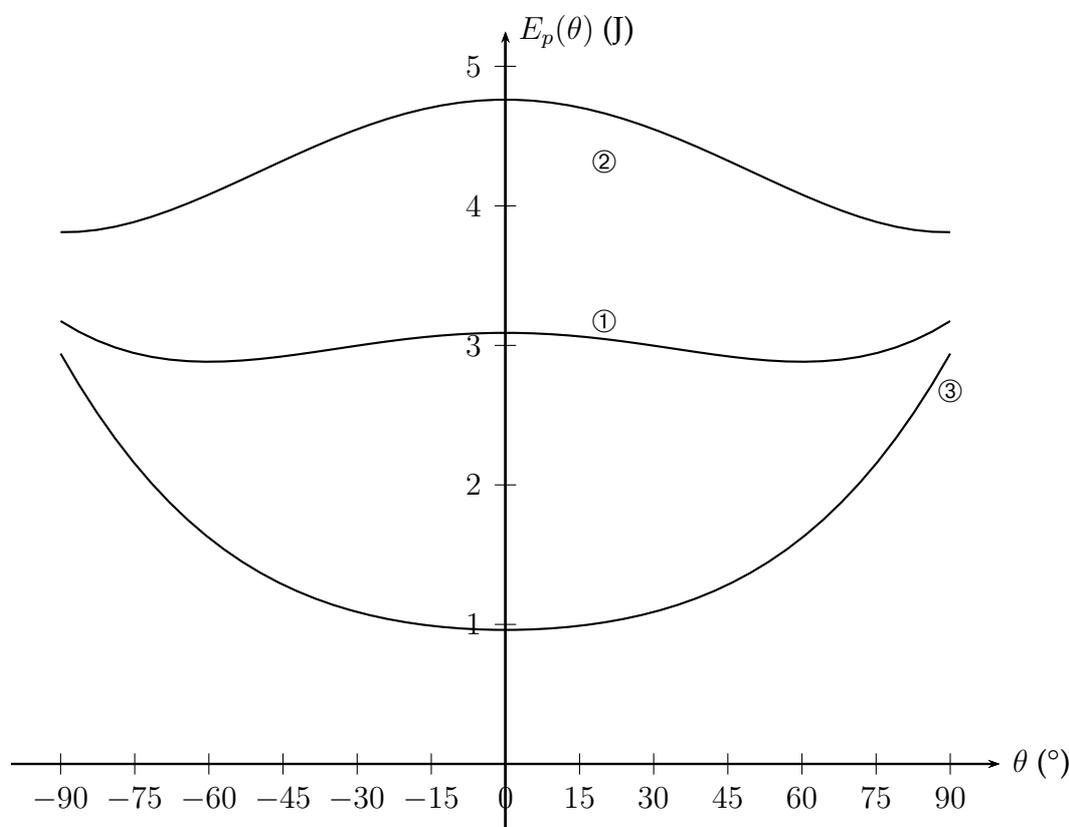
B. Mise en équation

- Q4 1. Donner l'expression de la vitesse \vec{v} de P dans (\mathcal{R}) en fonction de R et $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ puis de l'accélération \vec{a} de P dans (\mathcal{R}) en fonction de $R, \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$.
- Q5 2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle du mouvement de P en fonction de θ et ses dérivées.

C. Étude d'équilibres possibles

- Q6 1. Quelles sont les forces qui dérivent d'une énergie potentielle? Donner les expressions de ces énergies potentielles.
- Q7 2. En déduire, l'expression de l'énergie potentielle E_p de la perle P en fonction des constantes et du paramètre θ .

- Q8 3. Écrire l'expression de l'énergie mécanique totale E_m du système.
- Q9 4. En déduire, lorsque le mouvement de P a lieu, son équation différentielle en fonction de R , g , k , l_0 , m , θ et ses dérivées convenables. Commenter.
- Q10 5. Déterminer l'expression des positions d'équilibre $\theta = \theta_i$ envisageables pour le système.
On rappelle que $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}$
- Q11 6. On veut imposer l'existence d'une position d'équilibre pour une valeur θ_1 de θ comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (ce qui implique par symétrie une position équivalente $-\theta_1$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0). Écrire les inégalités que cela implique pour le paramètre l_0 . Donner une interprétation physique de ces conditions.
- Faire l'application numérique pour $m = 1 \text{ kg}$, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $k = 10^2 \text{ N.m}^{-1}$ et $R = \frac{2mg}{k}$.
7. Sur le graphe représenté ci dessous, apparaissent trois courbes, chacune correspondant à une valeur de l_0 différente (les valeurs numériques des autres constantes sont celles données dans la question précédente).



- Q12 Interpréter ces courbes.

II. MOUVEMENT DANS UN TUBE D'OSCILLOSCOPE

La figure 1 (page 4) montre un tube d'oscilloscope de petite dimension, dans lequel des électrons émis par la cathode sont accélérés et déviés vers un écran luminescent. La déviation est assurée par le passage des électrons entre les plaques de deux condensateurs plans : un pour la déviation horizontale, l'autre pour la déviation verticale. L'étude qui suit ne concernera que le condensateur responsable de la déviation verticale.



FIGURE 1 – Petit tube d'oscilloscope, de longueur d'environ 20 cm.

On modélise la trajectoire d'un électron de la façon suivante (figure 2, page 4), où la zone de déviation est grisée) :

- on négligera l'effet de la pesanteur,
- l'électron est émis à vitesse nulle par effet thermo-électronique au niveau de la cathode portée au potentiel nul, il est accéléré à l'aide d'une tension $V_0 > 0$ afin d'acquérir à l'entrée de la zone de déviation une vitesse \vec{v}_0 ,
- pendant son trajet dans la zone de déviation, il est soumis à un champ électrique \vec{E} lié aux potentiels $\pm V_p$ des plaques du condensateur, de longueur l et séparées par une distance d ,
- poursuivant son mouvement, il arrive sur la surface de l'écran à une distance y_s de l'axe Ox , l'écran étant situé à la distance D du centre du condensateur.

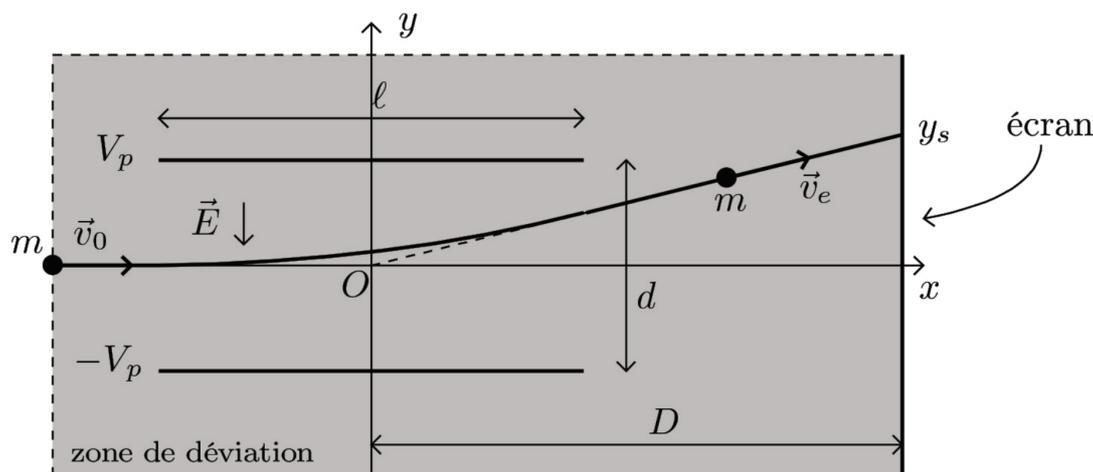


FIGURE 2 – Schéma de la zone de déviation

Valeurs numériques :

masse d'un électron $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg; charge élémentaire $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C
 $V_0 = 950$ V; $V_p = 180$ V; $D = 7,00$ cm; $d = 2,00$ cm; $l = 4,00$ cm .

A. Étude physique

- Q13 1. En appliquant la conservation de l'énergie que l'on justifiera, calculer la vitesse v_0 de l'électron à l'entrée de la zone de déviation. Faire l'application numérique. Commenter.
- Q14 2. On modélise les plaques de déviation comme un condensateur sans effets de bord : le champ électrique est donc considéré comme nul si $|x| > l/2$ et uniforme si $|x| \leq l/2$, \vec{E} étant parallèle à l'axe Oy . Exprimer le champ \vec{E} entre les plaques en fonction de V_p et d , justifier.
- Q15 3. On suppose que la vitesse d'entrée de l'électron dans la zone de déviation est $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$. En appliquant les lois de la mécanique, établir l'équation de la trajectoire $y(x)$ de l'électron entre les plaques (pour $|x| < l/2$).
- Q16 4. (a) Montrer que l'équation de la trajectoire pour $x > l/2$ est donnée par : $y = \frac{2eV_p l}{m d v_0^2} x$.
- Q17 (b) En déduire que l'ordonnée du spot sur l'écran est : $y_s = \frac{V_p}{V_0} \times \frac{lD}{d}$.
- Q18 (c) Faire l'application numérique pour y_s .

B. Étude numérique

Pour savoir si la modélisation précédente est pertinente, on va envisager une détermination numérique de la trajectoire de l'électron. Pour cela, on place le condensateur de déviation dans une enceinte carrée au potentiel nul de côté $L = 10,0$ cm, le centre du condensateur étant à 3,0 cm du bord gauche de l'enceinte (figure 3 page 5). Les autres caractéristiques électriques et géométriques sont les mêmes que précédemment. L'origine des axes est prise en bas à gauche.

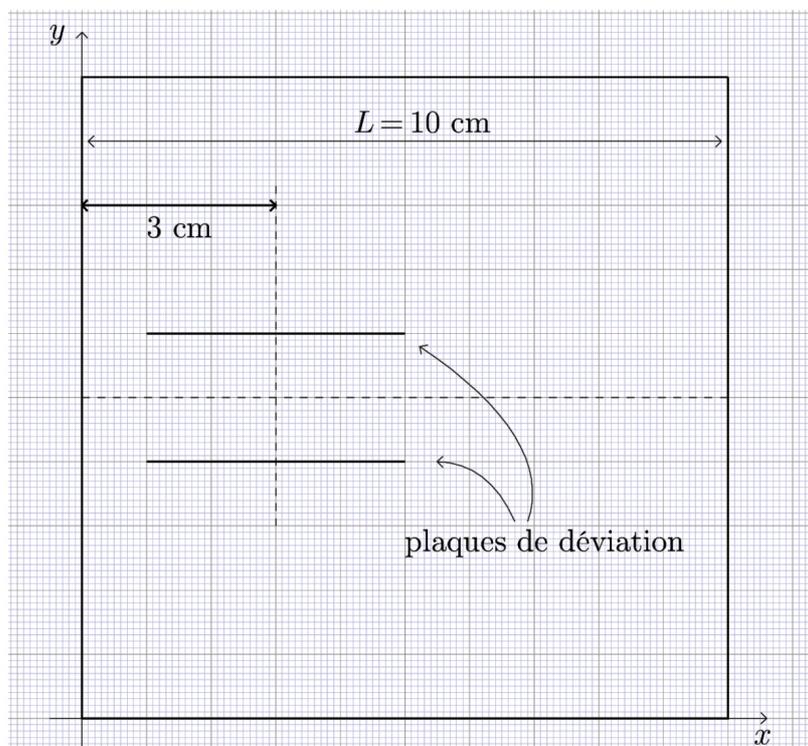


FIGURE 3 – Modélisation des plaques de déviation dans l'enceinte

La résolution numérique se déroule alors en deux étapes :

- calcul du potentiel et du champ électrique par une méthode numérique, non abordée dans ce sujet car relevant du programme de deuxième année,
- calcul de la trajectoire de l'électron à l'aide de la méthode d'Euler.

Le programme permettant la résolution de ce problème commence ainsi :

$$L = 0.100 ; N = 100 ; h = L/N$$

$$V_0 = 950 ; V_p = 180$$

$$m = 9.11e-31 ; e = 1.60e-19$$

On suppose définies deux fonctions $val_Ex(x, y)$ et $val_Ey(x, y)$ permettant de calculer les valeurs des composantes du champ électrique pour le point M de coordonnées (x, y) . Par rapport à la partie précédente, on ne suppose donc plus que le champ est uniforme dans le condensateur et nul en dehors.

- Q19 1. Montrer que les équations permettant de décrire le mouvement de l'électron par la méthode d'Euler sont les suivantes, avec δt comme petit incrément temporel et $\delta x, \delta v_x, \delta y, \delta v_y$ les variations pendant δt des grandeurs x, v_x, y, v_y :

$$\begin{cases} \delta x = v_x \delta t & \delta y = v_y \delta t \\ \delta v_x = -\frac{e}{m} E_x(x, y) \delta t & \delta v_y = -\frac{e}{m} E_y(x, y) \delta t \end{cases}$$

- Q20 2. Compte tenu du changement de la position d'origine du repère (imposée par la résolution numérique donnant le champ électrique, figure 3), quelles sont les conditions initiales du mouvement de l'électron ?
Déterminer δt pour calculer environ 200 points successifs le long de la trajectoire. Faire l'application numérique.

- Q21 3. En tenant compte des réponses aux questions précédentes, compléter le code d'initialisation des variables de la simulations (parties ***** dans le code suivant) :

```
Npts = 200 # nombre de points pour le tracé de la trajectoire
v0 = ***** # vitesse initiale de l'électron
dt = ***** # incrément temporel

# tableaux des coordonnées x et y de l'électron
lx = np.zeros(Npts) ; ly = np.zeros(Npts)
# tableaux des vitesses en x et en y
lvx = np.zeros(Npts) ; lvy = np.zeros(Npts)
# conditions initiales
lx[0] = ***** ; ly[0] = *****
lvx[0] = ***** ; lvy[0] = *****
```

- Q22 4. Écrire les lignes de code implémentant la boucle de remplissage des tableaux lx, ly, lvx, lvy selon la méthode d'Euler.

C. Comparaison théorie/simulation

La figure 4 montre le résultat de la simulation précédente. On y voit le réseau de courbes équipotentielles (c'est-à-dire des courbes pour lesquelles $V = cte$, orthogonales au champ électrique), ainsi que deux trajectoires 1 et 2, l'une étant associée au calcul théorique, l'autre à la simulation numérique. Chaque trajectoire est constituée de 200 points de calcul séparés d'une durée δt .

- Q23 1. Reproduire sommairement sur la copie la figure 4, y ajouter le tracé du champ électrique en quelques points de la zone de déviation.

Identifier, en le justifiant, chaque trajectoire. Expliquer pourquoi la trajectoire **1** est plus courte que la **2**.

À votre avis, peut-on se contenter de l'étude théorique pour prévoir le point d'impact de l'électron sur l'écran? (On attend une réponse chiffrée.)

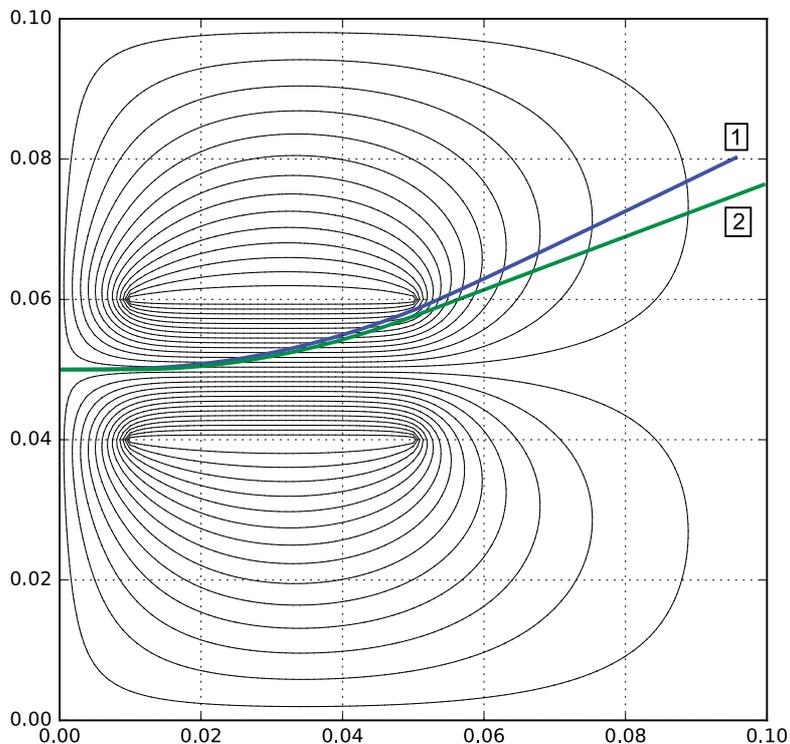


FIGURE 4 – Tracé dans la zone de déviation de quelques courbes équipotentielles, des trajectoires de l'électron (théorique et simulée numériquement).

III. AUTOUR D'ITER

Les données suivantes pourront être utiles :

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$;

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;

Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$;

Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

Le projet ITER est un projet international destiné à montrer la faisabilité scientifique et technique de la fusion thermonucléaire contrôlée. Le 28 juin 2005, les pays engagés dans le projet ITER, c'est-à-dire les 25 pays de l'Union Européenne, le Japon, la Russie, les États-Unis, la Chine et la Corée du Sud, ont décidé officiellement de construire le réacteur expérimental ITER en France, à Cadarache (Bouches-du-Rhône). L'Inde a rejoint le projet en décembre 2005. La Suisse et le Brésil pourraient faire de même dans l'avenir. La durée de la construction du réacteur sera de 10 ans. L'exploitation du réacteur proprement dit devrait s'étaler sur environ 20 ans. Le coût total du projet a été estimé à 10 milliards d'euros.

Le but du problème dont est tiré cette partie était d'examiner, de manière très simplifiée, certains aspects de la fusion thermonucléaire contrôlée. Dans ce sujet, nous n'avons extrait que les parties sur la fusion et le confinement du plasma.

A. Autour de la fusion thermonucléaire

L'une des difficultés que l'on rencontre pour obtenir une réaction de fusion est due à la répulsion électrostatique entre les deux noyaux positifs de deutérium et de tritium. Pour fusionner, les deux noyaux doivent s'approcher suffisamment près l'un de l'autre, à des distances de l'ordre de $r_0 = 10^{-15} \text{ m}$.

- Q24 1. Considérons une charge ponctuelle, de charge e , immobile en un point O de l'espace et une deuxième charge e en un point M de l'espace situé à la distance $OM = r$. Déterminer l'énergie potentielle E_p liée à l'interaction électrostatique. On prendra $E_p = 0$ à l'infini.
- Q25 2. On considère toujours une charge ponctuelle e immobile en O . Une autre charge ponctuelle, portant la même charge e , se trouve au point M . Son vecteur vitesse initial est : $\vec{v}_M(t=0) = \vec{v}_0 = -v_0 \vec{u}_r$ où $v_0 > 0$ et \vec{u}_r est le vecteur unitaire $\vec{u}_r = \frac{OM}{r}$. En d'autres termes, sa vitesse initiale est dirigée vers le point O . Cette particule a une masse m . On néglige toute force gravitationnelle. Exprimer l'énergie mécanique de cette particule au point M en fonction de m, r , et de constantes fondamentales.
- Q26 3. On suppose que la distance r est initialement très grande (« infinie »). Quelle doit être l'énergie cinétique initiale minimale E_{c_0} de la particule en M pour pouvoir se rapprocher de O à une distance inférieure à r_0 ?
- Q27 4. On admet qu'on peut définir la température T à partir de l'énergie cinétique initiale E_{c_0} à partir de la relation $kT = E_{c_0}$ où k est la constante de Boltzmann. Calculer numériquement la température minimale qui permet la réaction de fusion. On donne : $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$; $r_0 = 10^{-15} \text{ m}$.

En réalité, pour diverses raisons qui sortent du cadre de la physique classique, on peut obtenir la réaction de fusion nucléaire pour des températures nettement moins élevées que l'estimation précédente, de l'ordre de 2.10^8 K . À une telle température, la matière est à l'état de plasma, c'est-à-dire de gaz ionisé ; le milieu est donc un mélange de noyaux et d'électrons libres. Pour réaliser

la fusion dite thermonucléaire contrôlée, le principe retenu par ITER est celle d'un confinement magnétique du plasma.

B. Mouvement dans un champ magnétique

Les particules constituant le plasma étant chargées, elles subissent l'action d'un champ magnétique. On commence par étudier le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme.

Le référentiel d'étude, supposé galiléen, est muni d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Le champ magnétique \vec{B} est uniforme, stationnaire et dirigé selon Oz : $\vec{B} = B\vec{u}_z$ où $B > 0$. La particule étudiée, de masse m , porte une charge $q > 0$. On pourra introduire, dans la suite du problème, la fréquence cyclotron $\omega_0 = \frac{qB}{m}$ (qui est en réalité une pulsation). On néglige le poids de la particule.

- Q28 1. La particule étudiée se trouve initialement en O avec une vitesse initiale colinéaire à \vec{B} : $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$ avec $v_0 > 0$. Déterminer le mouvement de la particule (trajectoire, position, vitesse).
2. La particule étudiée a maintenant la vitesse initiale : $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_y$ avec $v_0 > 0$. Les composantes de la vitesse \vec{v} de la particule selon Ox , Oy et Oz sont notées respectivement v_x , v_y et v_z . En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer les expressions de $\frac{dv_x}{dt}$, $\frac{dv_y}{dt}$ et $\frac{dv_z}{dt}$ en fonction de v_x , v_y et ω_0 .
- Q29
- Q30 3. En déduire que v_x et v_y vérifient les équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{d^2v_x}{dt^2} + \omega_0^2v_x = 0 \\ \frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega_0^2v_y = 0 \end{cases}$$

- Q31 4. Résoudre complètement ces équations et trouver les expressions de v_x et v_y en fonction du temps.
5. Intégrer les expressions précédentes et déterminer les coordonnées x , y et z de la particule en fonction du temps. On donne la position initiale de la particule :
- Q32

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{v_0}{\omega_0} \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

- Q33 6. Montrer que la trajectoire de la particule est un cercle contenu dans le plan Oxy dont on précisera le centre et le rayon.
- Q34 7. Faire un schéma de la trajectoire dans le plan Oxy montrant clairement le sens du mouvement de la particule.
- Q35 8. On considère maintenant une particule dont la vitesse initiale est :

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v_{\perp} \\ v_z = v_{\parallel} \end{cases}$$

où v_{\perp} et v_{\parallel} sont des grandeurs positives.

Justifier que la trajectoire de la particule est une hélice dont on exprimera le pas h en fonction de v_{\parallel} et ω_0 .

IV. ÉLECTROCINÉTIQUE

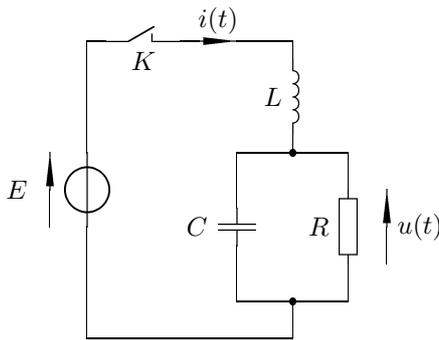


Figure 1

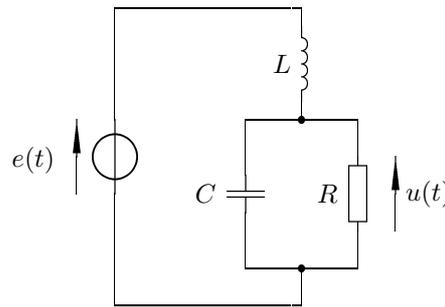


Figure 2

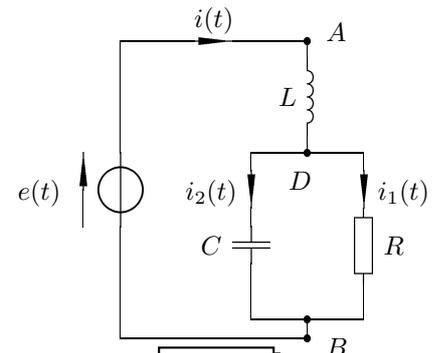


Figure 3

A. Du régime sinusoïdal forcé au régime transitoire.

On considère le circuit représenté ci-dessus, alimenté par une source de tension de force électromotrice instantanée sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω . L'interrupteur K est fermé depuis longtemps. $u(t)$ est la tension aux bornes du resistor (figure 2).

On associe à $e(t)$ le complexe $\underline{e}(t) = \sqrt{2}E_0.e^{j\omega t}$ et à la tension $u(t)$ le complexe $\underline{u}(t)$.

- Q36 1. En utilisant la formule des ponts diviseurs de tension, établir la relation entre $\underline{e}(t)$ et $\underline{u}(t)$.
 2. Écrire la relation précédente sous la forme

$$D_2(j\omega)^2 \underline{u}(t) + D_1(j\omega) \underline{u}(t) + D_0 \underline{u}(t) = N_0 \underline{e}(t)$$

Q37 On donnera les expressions de D_2 , D_1 , D_0 et N_0 .

Q38 3. En déduire l'équation différentielle liant $u(t)$ à $e(t)$.

B. Étude en régime sinusoïdal forcé

On nomme AB le dipôle précédent, toujours alimenté par la tension $e(t) = \sqrt{2}E_0 \cos \omega t$ (Figure 3).

- Q39 1. Montrer que si R est supérieure à une valeur que l'on précisera, en se plaçant à une certaine pulsation $\omega = \omega_0$ que l'on exprimera en fonction des données, le dipôle AB est équivalent à un résistor de résistance $R_{eq} = \frac{R}{1+R^2C^2\omega_0^2}$.
 Q40 2. Calculer ω_0 sachant que $R = 100 \Omega$, $C = 33,3 \mu\text{F}$ et $L = 120 \text{ mH}$.
 Q41 3. On se place dorénavant à $\omega = \omega_0$ et on donne $R_{eq} = 36,0 \Omega$. La valeur efficace de la force électromotrice du générateur est $E_0 = 180 \text{ V}$. Calculer la valeur efficace de l'intensité $i(t)$ du courant dans la bobine ainsi que sa phase à l'origine φ_i .
 Q42 4. Calculer les valeurs efficaces et les phases à l'origine des différences de potentiel $u_{AD}(t)$ et $u_{DB}(t)$.
 Q43 5. Calculer les valeurs efficaces des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

I. SYSTÈME MASSE-RESSORT

ESTP 1992

A. Tension du ressort.

1. On peut décomposer $\vec{P}\Omega = \vec{P}\vec{O} + \vec{O}\Omega = -R\vec{e}_r -$

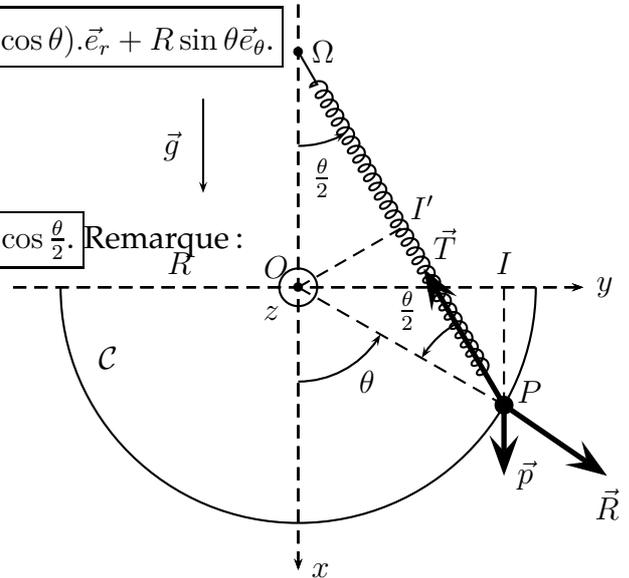
Q1 $R\vec{e}_x$ avec $\vec{e}_x = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$ d'où $\vec{P}\Omega = -R(1 + \cos\theta)\vec{e}_r + R\sin\theta\vec{e}_\theta$

2. $P\Omega^2 = \vec{P}\Omega \cdot \vec{P}\Omega = R^2(1 + \cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta =$
 $R^2[1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta] = R^2(2 + 2\cos\theta) =$
 $2R^2(1 + \cos\theta) = 4R^2\cos^2\frac{\theta}{2}.$

Q2 De plus, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ et $P\Omega = 2R\cos\frac{\theta}{2}$. Remarque :
 on a sur la fig $P\Omega = 2PI' = 2R\cos\frac{\theta}{2}$.

3. \vec{T} a pour norme $k|P\Omega - l_0|$ et est dirigée de P vers Ω si $P\Omega - l_0 > 0$. On en déduit $\vec{T} =$
 $+k(P\Omega - l_0) \cdot \frac{\vec{P}\Omega}{P\Omega}$ et $\vec{u} = \frac{\vec{P}\Omega}{P\Omega} = -\cos\frac{\theta}{2}\vec{e}_r + \sin\frac{\theta}{2}\vec{e}_\theta$.

Q3 $\vec{T} = k(2R\cos\frac{\theta}{2} - l_0) \cdot (-\cos\frac{\theta}{2}\vec{e}_r + \sin\frac{\theta}{2}\vec{e}_\theta)$



B. Mise en équation.

Q4 1. $\vec{v} = \vec{v}(P/\mathcal{R}) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ $\vec{a} = \vec{a}(P/\mathcal{R}) = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

Q5 2. On applique la relation fondamentale de la dynamique au système ponctuel perle dans le référentiel d'étude galiléen. Il est soumis à son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\vec{e}_r - mg\sin\theta\vec{e}_\theta$, à la tension \vec{T} du ressort (exprimée ci-dessus) et à la réaction \vec{N} du support cercle. \vec{N} est normale au cercle car il n'y a pas de frottements, cad elle est dans le plan (\vec{e}_r, \vec{e}_z) , elle n'a pas de composante selon \vec{e}_θ .

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$ Si l'on projette selon \vec{e}_θ , on obtient l'équation différentielle du mouve-

ment : $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + k(2R\cos\frac{\theta}{2} - l_0)\sin\frac{\theta}{2}$

C. Étude d'équilibres possibles

1. Le poids \vec{p} dérive de $E_{p,pes} = -mgx + Cte$ et \vec{T} dérive de $E_{p,él} = \frac{1}{2}k(\Omega P - l_0)^2$.

Par contre, \vec{R} ne travaille pas et ne dérive d'aucune énergie potentielle.

Conclusion : seules \vec{p} et \vec{T} sont des forces conservatives, \vec{R} ne travaille pas. Le système est conservatif.

Q6

2. On a au total $E_p = E_{p,pes} + E_{p,él}$ avec $x = R\cos\theta$ et $\Omega P = 2R\cos\frac{\theta}{2}$ d'où

$E_p = -mgR\cos\theta + \frac{1}{2}k(2R\cos\frac{\theta}{2} - l_0)^2 + Cte$ (E_p est définie à une constante près, on peut

Q7

prendre $Cte = 0$ sans que cela ne modifie le reste du problème).

Q8

3. Par définition, $E_m = E_p + E_c = -mgR\cos\theta + \frac{1}{2}k(2R\cos\frac{\theta}{2} - l_0)^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$ car $v = R\dot{\theta}$.

4. La seule force non conservative (\vec{R}) ne travaille pas donc $\frac{dE_m}{dt} = P_{nc} = 0$ soit
 $+mgR\dot{\theta} \sin \theta - k(2R \cos \frac{\theta}{2} - l_0)\dot{\theta}R \sin \frac{\theta}{2} + mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$ et après simplification par $\dot{\theta} \neq 0$, on

Q9

retrouve l'équation du mouvement en θ : $mR\ddot{\theta} + mg \sin \theta - kR(2R \cos \frac{\theta}{2} - l_0) \sin \frac{\theta}{2} = 0$.

5. On a un équilibre possible aux positions θ_e telles que $\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \iff mgR \sin \theta_e - k(2R \cos \frac{\theta_e}{2} - l_0)R \sin \frac{\theta_e}{2} = 0$ et $\sin \theta_e = 2 \sin \frac{\theta_e}{2} \cos \frac{\theta_e}{2}$ soit $2mg \sin \frac{\theta_e}{2} \cos \frac{\theta_e}{2} - k(2R \cos \frac{\theta_e}{2} - l_0) \sin \frac{\theta_e}{2} = 0$. La première solution correspond au cas $\theta_e = 0 = \theta_0$. Sinon, l'équation précédente se simplifie et $2mg \cos \frac{\theta_e}{2} - 2kR \cos \frac{\theta_e}{2} + kl_0 = 0$ soit $\theta_e = \pm 2 \arccos \frac{kl_0}{2(kR - mg)}$. Ces deux autres solutions $\pm\theta_1$ sont définies si et seulement si $kl_0 \leq 2mg - 2kR \iff mg \geq k(R + \frac{1}{2}l_0)$: l'arcos doit être défini.

Q10

6. On cherche à obtenir $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \iff 0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4} \iff 1 \geq \cos \frac{\theta}{2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{\sqrt{2}}{2} \leq$

Q11

$$\frac{kl_0}{2(kR - mg)} \leq 1 \iff \sqrt{2} \left[R - \frac{mg}{k} \right] \leq l_0 \leq 2 \left[R - \frac{mg}{k} \right].$$

Physiquement, cela signifie que si la longueur à vide est trop faible, $l_0 < \sqrt{2}R$ et il n'y a pas d'équilibre pour $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ alors que si l_0 est trop grande, le point P repose au fond de la cuvette ($\theta = 0$).

L'application numérique donne : $13,8 \text{ cm} \leq l_0 \leq 19,6 \text{ cm}$.

7. Sur le graphe de l'énoncé,

- ★ La courbe ① correspond à deux états d'équilibre stables $\pm\theta_1$ et $\theta = 0$ instable : $13,8 \text{ cm} \leq l_0 \leq 19,6 \text{ cm}$.
- ★ Pour ② $l_0 \leq 13,8 \text{ cm}$ puisque le seul état d'équilibre est $\theta = 0$ instable.
- ★ Enfin, ③ correspond $l_0 \geq 19,6 \text{ cm}$ puisque le seul état d'équilibre est $\theta = 0$ stable.

Q12

II. MOUVEMENT DANS UN TUBE D'OSCILLOSCOPE

A. Étude physique

1. Système : l'électron, référentiel : celui de l'énoncé, galiléen, bilan des forces : force électrique $q\vec{F}$, conservative dérive de $E_p = qV$; le poids \vec{P} est négligé d'après l'énoncé.

Le système est un point, étudié dans un référentiel galiléen, on peut utiliser le théorème de l'énergie mécanique : $E_{m,f} - E_{m,i} = W_{i \rightarrow f,nc}$. Le travail des forces non conservatives est nul puisque la seule force exercée est conservative.

L'énergie mécanique se conserve donc, on utilise cela entre le moment i où l'électron est émis à la cathode ($E_c = 0$; $E_p = -e \times 0$) et l'instant f où il atteint le potentiel V_0 ($E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$; $E_p = (-e) \times V_0$).

- Q13 Cela donne $E_{m,f} - E_{m,i} = W_{i \rightarrow f,nc} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - eV_0 - 0 - 0 = 0$ d'où $v_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$. Numériquement on trouve $1,86 \times 10^7 \text{ m/s}$. On peut donc commenter en disant que l'électron est non relativiste et la mécanique classique s'applique sans problème.

- Q14 2. Par définition $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$ (A et B des points quelconques). Si on se place dans le condensateur, \vec{E} étant uniforme, on peut le sortir de l'intégrale et on trouve $V_B - V_A = -\vec{E} \cdot \vec{AB}$. On en déduit en prenant A et B sur les 2 plaques : $\vec{E} = -\frac{2V_p}{d}\vec{u}_y$. Remarque : \vec{E} est bien de sens opposé à la tension ($U = V_p - (-V_p)$) comme sur le schéma de l'énoncé.

- Q15 3. Le pfd donne avec pour origine des temps le moment où l'on pénètre dans le condensateur :

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = \frac{2eV_p}{d} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = v_0 t - \frac{l}{2} \\ y = \frac{eV_p}{md} t^2 \end{array} \right. \Rightarrow t = \frac{x + \frac{l}{2}}{v_0} \Rightarrow y = \frac{eV_p}{mdv_0^2} \left(x + \frac{l}{2}\right)^2$$

4. (a) Puisque le champ électrique est nul en dehors du condensateur, il n'y a plus de force appliquée et l'électron a donc un mouvement rectiligne uniforme.

On a donc $y(x > l/2) = y(l/2) + y'(l/2) \times (x - l/2)$. Avec $y'(x = l/2)$ qui peut se trouver grâce à la question précédente.

En remplaçant $y(x) = \frac{eV_p}{mdv_0^2} l^2 + 2\frac{eV_p}{mdv_0^2} \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\right) \times (x - l/2)$ ce qui donne finalement la

- Q16 formule proposée par l'énoncé : $y = 2\frac{eV_p}{mdv_0^2} l \times x$.

- Q17 (b) Et donc l'ordonnée du spot sur l'écran est : $y(x = D) = \frac{V_p}{V_0} \times \frac{lD}{d}$.

- Q18 (c) Numériquement on trouve $2,65 \text{ cm}$.

B. Étude numérique

1. Dans la méthode d'Euler, on approxime $f(t + dt) \simeq f(t) + dt \times f'(t)$ (ce qui revient à faire l'approximation que le taux d'accroissement et la dérivée sont égaux si dt est suffisamment faible). Avec les notations de l'énoncé, cela s'écrirait $\delta f = \delta t \times f'(t)$

On applique le PFD à l'électron : $m\vec{a}(t) = -e\vec{E}$ sachant que ce que l'on appelle \vec{E} est le champ à la position de l'électron, c'est à dire $\vec{E} = \vec{E}(x(t), y(t))$ où $x(t), y(t)$ sont les coordonnées de l'électron à l'instant t .

D'après le PFD : $m\ddot{x} = -eE_x(x,y)$ et $m\ddot{y} = -eE_y(x,y)$. Pour pouvoir appliquer la méthode d'Euler, on transforme chaque équation différentielle d'ordre 2 en deux équations d'ordre 1 en introduisant v_x et v_y .

Q19 Cela donne :

$$\begin{cases} m\dot{x} = v_x \\ m\dot{v}_x = -\frac{e}{m}E_x(x,y) \\ m\dot{y} = v_y \\ m\dot{v}_y = -\frac{e}{m}E_y(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x = \dot{x} \times \delta t = v_x \delta t & \delta y = v_y \delta t \\ \delta v_x = \dot{v}_x \times \delta t = -\frac{e}{m}E_x(x,y) \delta t & \delta v_y = -\frac{e}{m}E_y(x,y) \delta t \end{cases}$$

2. Les 4 conditions initiales sont les valeurs de x, y, v_x, v_y à $t = 0$. Lorsque l'on entre dans la zone de déviation à $t = 0$, les valeurs sont : $x = 0; y = L/2; v_x = v_0; v_y = 0$.

Si on veut environ 200 points pour le calcul, il faut que le temps total soit tel que l'électron parcourt la distance de la zone de déviation pendant ce temps. Or la vitesse de l'électron est proche de v_0 , il faut donc que $v_0 \times T = L$ d'où $L \simeq v_0 \times 200\delta t$ et donc

Q20

$$\delta t \simeq \frac{L}{200v_0} \simeq 2,72 \times 10^{-11} \text{ s}$$

Q21

3. Code :

```
1 Npts = 200
2 v0 = math.sqrt(2 * e * V0/m) #ou **0.5 ou np.sqrt ou la valeur
   numérique trouvée, mais c'est moins bien car ne s'adapte pas
3 dt = L / v0 / Npts #ou la valeur numérique, mais moins bien.
4 lx[0] = 0 ; ly[0] = L/2
5 lvx[0] = v0 ; lvy[0] = 0
```

Q22

4. Écrire les lignes de code implémentant la boucle de remplissage des tableaux lx, ly, lvx, lvy selon la méthode d'Euler.

```
1 for i in range(Npts-1):
2     lx[i+1] = lx[i] + lvx[i] * dt
3     lvx[i+1] = lvx[i] - e/m * val_Ex(lx[i], ly[i]) * dt
4     ly[i+1] = ly[i] + lvy[i] * dt
5     lvy[i+1] = lvy[i] - e/m * val_Ey(lx[i], ly[i]) * dt
```

C. Comparaison théorie/simulation

1. Il suffit de tracer un champ perpendiculaire aux équipotentielles en quelques points, partant du haut vers le bas vu que l'électron est dévié vers le haut.

$\vec{F} = -e\vec{E}$, la charge étant négative, la force est opposée au champ \vec{E} , on a donc une légère déviation vers le haut avant d'entrer dans le condensateur, puis le champ est quasiment uniforme et donc la trajectoire est quasi-parabolique comme dans l'étude théorique et enfin en dehors du condensateur, dans le cas numérique, la déviation continue légèrement mais l'électron est surtout freiné puisque le champ est presque horizontal et vers la droite.

Q23

La trajectoire (1) est donc la numérique car elle est plus déviée et un peu plus freinée (va moins loin) et la (2) est la trajectoire "théorique". Si on regarde de façon quantitative, on trouve d'ailleurs que la déviation de la courbe (1) est de plus de 3 cm (on part de 0,05 et on arrive au dessus de 0,08 sur la figure) alors que la courbe (2) semble bien avoir une déviation de 2,65 cm comme calculée précédemment.

Comme dit plus haut, après le condensateur, le champ ressenti par l'électron est vers la droite et la force est donc vers la gauche. Ainsi la vitesse de l'électron dans le calcul numérique est plus faible que dans le cadre théorique et il va donc moins loin. La durée de l'expérience et le pas de temps étant choisis pour que l'étude théorique arrive pile en bord de cadre à la fin de l'étude, la trajectoire "numérique" ne va elle pas jusqu'au bout.

La différence entre la position "théorique" et "numérique" est clairement visible à l'œil nu. En terme de pourcentage, on passe d'une déviation de 2,65 cm pour l'étude théorique à environ 3,5 cm si on prolonge la courbe (1). L'écart entre les deux est donc de presque 40% en plus ! Si on se sert de cela pour faire des mesures de tension, la précision paraît trop faible et l'étude théorique n'est pas suffisante pour la majorité des besoins (dans le cadre des valeurs numériques choisies ici, on peut envisager que pour des tensions plus faible, l'écart soit moins notable).

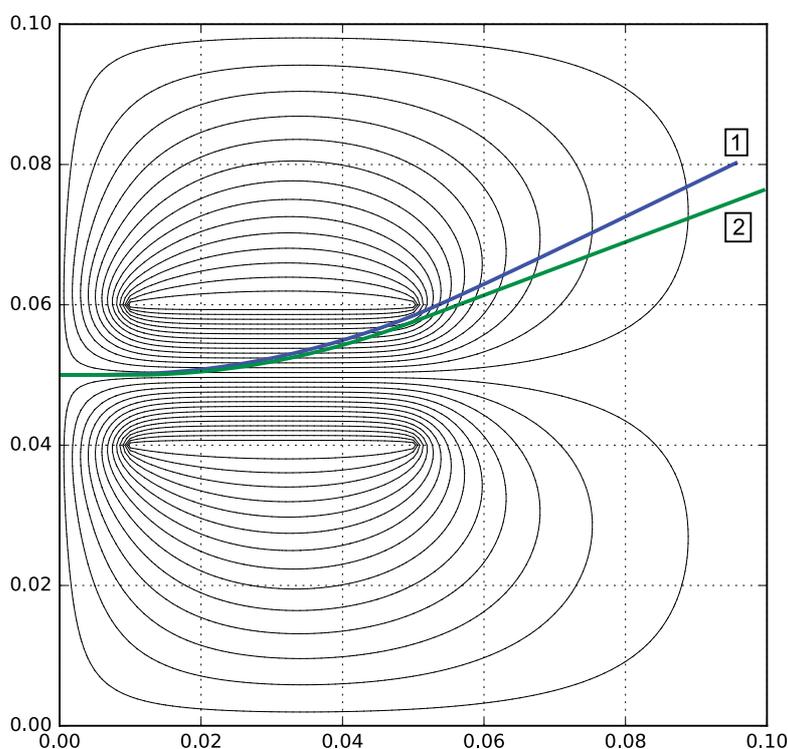


FIGURE 1 – Tracé dans la zone de déviation de quelques courbes équipotentielles, des trajectoires de l'électron (théorique et simulée numériquement)

III. AUTOUR D'ITER

ATS 2007

A. Autour de la fusion thermonucléaire

- Q24 1. Question traitée en cours, à savoir faire. Par définition des énergie potentielle $dE_p = -\delta W = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot (dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi)$ soit $\frac{dE_p}{dr} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. En primitivant : $E_p(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + cte$ et on prend $cte = 0$ pour satisfaire la contrainte demandée par l'énoncé ($E_p(r \rightarrow \infty) = 0$). Remarque, on obtient bien un profil d' E_p décroissant ce qui correspond à une force répulsive.
- Q25 2.
$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$
- Q26 3. D'après le théorème de l'énergie mécanique (référentiel galiléen, point matériel), $E_m(t) - E_m(t=0) = W_{nc} = 0$ (avec t un instant quelconque). Pour se rapprocher à une distance inférieure à r_0 , il faut déjà être capable d'arriver en r_0 avec une vitesse non nulle (ou nulle dans le pire des cas), on prend pour t l'instant où l'on arrive en r_0 $E_m(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \geq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$. Or d'après le TEM vu plus haut $E_m(t) = E_m(t=0)$ d'où $\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(r \rightarrow \infty)} \geq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 \geq \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$
- Q27 4. D'après l'énoncé $T = E_{c0}/k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 k r_0} = 2 \times 10^{10} \text{ K}$ (1 C.S. à cause de r_0)

B. Mouvement dans un champ magnétique

Système : la particule ; référentiel : terrestre, galiléen ; bilan des forces : force de Lorentz $\vec{F}_L = q\vec{v}(t) \wedge \vec{B} = q(v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z) \wedge B\vec{u}_z = qB(-v_x\vec{u}_y + v_y\vec{u}_x + \vec{0})$.

Attention, il faut bien faire le produit vectoriel avant d'envisager de projeter. Le produit vectoriel a la propriété de "mélanger" les vecteurs, c'est-à-dire que l'on va retrouver du v_x selon \vec{u}_y , il faut donc être prudent. La projection du PFD donne donc

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qBv_y \\ m\ddot{y} = -qBv_x \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

- Q28 1. La vitesse initiale étant selon z , vu les équations ci-dessus, on a à $m\dot{v}_x(t=0) = 0$ et donc d'après la méthode d'Euler, à instant infiniment plus court plus tard, v_x n'a pas changé et est toujours nul. De même pour v_y . Ainsi, un peu plus tard, la vitesse n'est à nouveau que selon \vec{u}_z . Donc on va avoir un mouvement rectiligne selon z et la force est nulle. Le mouvement est rectiligne uniforme ; $x(t) = y(t) = 0 = v_x = v_y$; $v_z(t) = v_0$; $z(t) = v_0 t$.

On peut aussi justifier en disant que le mouvement rectiligne uniforme ci-dessus est solution des équations différentielles et vérifie les conditions initiales, et par unicité de la solution (problème de Cauchy), c'est donc la solution cherchée.

On peut aussi justifier en disant que la partie magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas, donc $v = cte = v_0$, mais si on regarde la résolution de la 3e équation (selon z), on trouve $\forall t; v_z = v_0$. Mais puisque $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, on peut en déduire que $\forall t; v_x^2 + v_y^2 = 0$, soit $v_x = v_y = 0$ et on obtient un mouvement rectiligne uniforme.

- Q29 2. cf ci-dessous, 2e accolade

Q30 3. D'après le pfd écrit plus haut :

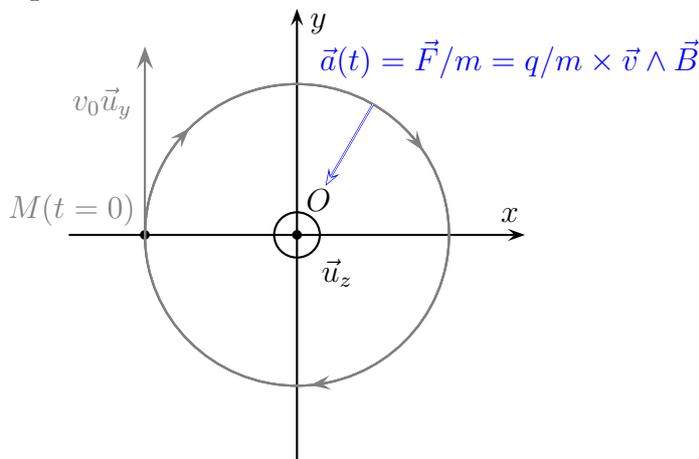
$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qBv_y \\ m\dot{v}_y = -qBv_x \\ m\dot{v}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = \omega_0 v_y (1) \\ \dot{v}_y = -\omega_0 v_x (2) \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{v}_x = \omega_0 \dot{v}_y = -\omega_0^2 v_x & \text{on dérive et on substitue grâce à (2)} \\ \ddot{v}_y = -\omega_0 \dot{v}_x = -\omega_0^2 v_y & \text{grâce à (1)} \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

Q31 4. Il s'agit d'équations d'oscillateurs harmoniques et donc $v_x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$ et de même pour v_y . Pour résoudre complètement il faut des conditions initiales sur $v_x, \dot{v}_x, v_y, \dot{v}_y$. D'après l'énoncé $v_x(t = 0) = 0$ d'où $C_1 = 0$ et $v_y(t = 0) = 0$ donc d'après le PFD $\dot{v}_x(t = 0) = \omega_0 v_0$ (grâce à l'équation (1)). On en déduit $C_2 = v_0$. On procède de même pour v_y et on trouve $v_x = v_0 \sin(\omega_0 t)$ et $v_y = v_0 \cos(\omega_0 t)$.

Q32 5. La plus simple à intégrer est $\dot{v}_z = 0 \Rightarrow z = ct = 0$. Selon $x : x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + ct = -\frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t)$ d'après les C.I.; selon $y : y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ (qui vaut bien 0 à $t = 0$).

Q33 6. Le mouvement est plan car $z = 0$. Si on calcule $x^2 + y^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 \times (\cos^2 + \sin^2) = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$, on trouve une constante, on a donc un cercle de centre O et de rayon $\frac{v_0}{\omega_0}$.

Q34 7. Schéma de la trajectoire dans le plan Oxy montrant clairement le sens du mouvement de la particule.



Remarque : on peut calculer la force avec le produit vectoriel pour vérifier qu'elle est bien vers l'intérieur des trajectoires. Cela peut être ce qui donne le sens du mouvement même si ici on peut se servir de \vec{v}_0 dont on sait qu'il est selon \vec{u}_y

8. On considère maintenant une particule dont la vitesse initiale est :

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v_{\perp} \\ v_z = v_{\parallel} \end{cases}$$

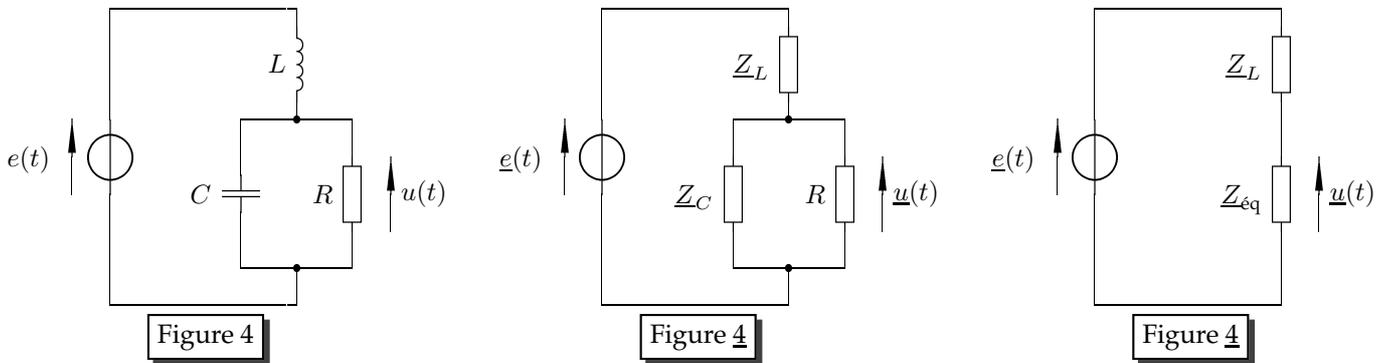
Q35 On peut reprendre les calculs précédents en observant que le mouvement selon z et celui dans le plan Oxy sont indépendants. C'est donc une combinaison de la première question (translation rectiligne uniforme selon z) et des suivantes (cercle dans le plan Oxy), cela correspond donc bien à une hélice de pas constant. Il suffit de remplacer v_0 par v_{\parallel} dans la première question et par v_{\perp} dans les suivantes.

Dans le plan Oxy , la particule fait un tour en $T = 2\pi/\omega_0$ et donc pendant ce temps elle monte de $h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi}{\omega_0} v_{\parallel}$.

IV. ÉLECTROCINÉTIQUE

A. Du régime sinusoïdal forcé au régime transitoire.

$$\underline{e}(t) = \sqrt{2}E_0 \cdot e^{j\omega t} \text{ et } \underline{u}(t).$$



1. Figure ci-dessus : après passage à l'équivalent en régime sinusoïdal forcé, on se ramène à un pont diviseur de tension en transformant associant R et Z_C en $\underline{Y}_{\text{éq}} = \underline{Y}_C + \frac{1}{R} = jC\omega + \frac{1}{R}$
 La formule des ponts diviseurs de tension donne

$$\underline{u}(t) = \frac{Z_{\text{éq}}}{Z_{\text{éq}} + Z_L} \cdot \underline{e}(t) = \frac{1}{1 + \underline{Y}_{\text{éq}} \cdot Z_L} \cdot \underline{e}(t) = \frac{1}{1 + (jC\omega + \frac{1}{R})jL\omega} \cdot \underline{e}(t) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L\omega}{R}} \cdot \underline{e}(t)$$

Q36

2. La relation précédente s'écrit

$$\underline{u}(t) - LC\omega^2 \cdot \underline{u}(t) + j\omega \frac{L}{R} \underline{u}(t) = \underline{e}(t) \Rightarrow D_2(j\omega)^2 \underline{u}(t) + D_1(j\omega) \underline{u}(t) + D_0 \underline{u}(t) = N_0 \underline{e}(t)$$

Q37

avec $D_2 = LC$, $D_1 = \frac{L}{R}$, $D_0 = 1$ et $N_0 = 1$.

3. En régime sinusoïdal forcé, une multiplication par $j\omega$ correspond à une dérivation par rapport au temps. Ici

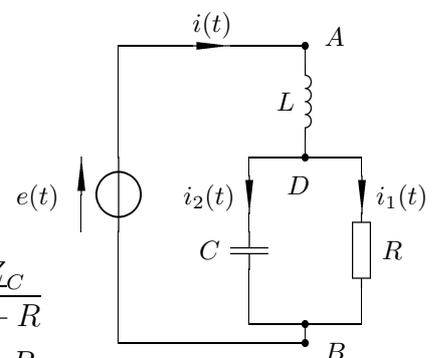
Q38

$$LC \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du(t)}{dt} + u(t) = e(t)$$

B. Étude en régime sinusoïdal forcé

On nomme AB le dipôle précédent, toujours alimenté par la tension $e(t) = \sqrt{2}E_0 \cos \omega t$. Figure ci-contre.

1. Sur la figure,



$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{AD} + \underline{Z}_{DB} = \underline{Z}_L + \frac{R \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R}$$

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_L + \frac{R}{1 + \underline{Y}_C \cdot R} = jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

et $\underline{Z}_{AB} = R_{\text{eq}} = \frac{R}{1 + R^2 C^2 \omega_0^2}$ pour $\omega = \omega_0$ tel que

$$jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega} = \frac{R}{1 + R^2 C^2 \omega_0^2} \Rightarrow (jL\omega_0 - LRC\omega_0^2 + R)(1 + R^2 C^2 \omega_0^2) = R + jR^2 C\omega_0$$

Pour que ces complexes soient égaux, il faut que leurs parties imaginaires soient égales,

Q39 c'est à dire $L\omega_0 + LR^2C^2\omega_0^3 = R^2C\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{R^2C - L}{LR^2C^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2C^2}}$.

On remarque que ω n'est définie que si $R^2C - L > 0 \Rightarrow R > \sqrt{\frac{L}{C}}$

Q40 2. L'application numérique donne $\omega_0 \simeq 400 \text{ rad.s}^{-1}$.

3. Comme $\omega = \omega_0$, on a $Z_{AB} = R_{\text{éq}} = \frac{R}{1+R^2C^2\omega_0^2}$ et $E_0 = R_{\text{éq}}I$ d'où $I = \frac{(1+R^2C^2\omega_0^2)E_0}{R} = I.e^{j\varphi_i}$ avec

Q41 $I = |I| = \frac{(1+R^2C^2\omega_0^2)E_0}{R} \simeq 5 \text{ A}$ et $\varphi_i = \arg(I) = 0$.

4. On a ensuite $\underline{U}_{AD} = jL\omega I = \frac{jL\omega E_0}{R}(1 + R^2C^2\omega^2)$ et d'où $U_{AD} = L\omega \cdot I = 240 \text{ V}$ et $\varphi_{AD} = \frac{\pi}{2}$.

De même, $\underline{U}_{DB} = Z_{DB}I = \frac{R}{1+jRC\omega}I = \frac{E_0}{1+jRC\omega}(1+R^2C^2\omega^2)$ d'où $U_{DB} = \frac{R}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}} \cdot I = 300 \text{ V}$

Q42 et $\varphi_{DB} = -\arctan(RC\omega) \simeq -53^\circ$ soit $-0,93 \text{ rad}$.

Remarque : on a $E_0 \neq U_{AB} = U_{AD} + U_{DB}$.

5. Toujours en utilisant la loi d'Ohm généralisée, $I_1 = \frac{U_{DB}}{R} = \frac{E_0}{R+jR^2C\omega}(1 + R^2C^2\omega^2)$ soit

Q43 $I_1 = \frac{U_{DB}}{R} = 3 \text{ A}$ et $I_2 = jC\omega \cdot U_{DB} = \frac{C\omega E_0}{1+jRC\omega}(1 + R^2C^2\omega^2)$ soit $I_2 = C\omega U_{DB} = 4 \text{ A}$.