

Conseils :

- Ce devoir comporte 3 exercices indépendants.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **ré-daction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).

Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.

- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices est autorisé**.

I. ÉTUDE DU FLASH D'UN APPAREIL PHOTO

Cet exercice concerne une modélisation du fonctionnement électrique d'un flash d'appareil photo. Pour simplifier l'étude au maximum, on s'intéressera à un flash d'appareil photo jetable à pellicule pour enfants.

Le schéma électrique global est représenté figure 1. Il fait intervenir des composants que vous connaissez bien, comme une batterie, des résistances, des condensateurs, et d'autres que vous connaissez moins comme une diode, un transistor ou des transformateurs.

Le fonctionnement d'un flash électronique repose sur la génération d'un éclair lumineux dans un tube de quartz translucide, noté « flash tube », dans lequel on a placé un gaz raréfié, le xénon. Ce tube est délimité par deux électrodes reliées à un condensateur C_2 chargé sous quelques centaines de volts. Lorsque le xénon est ionisé, il devient conducteur et le condensateur peut se décharger dans le gaz, créant ainsi un éclair lumineux très intense et d'une durée très brève.

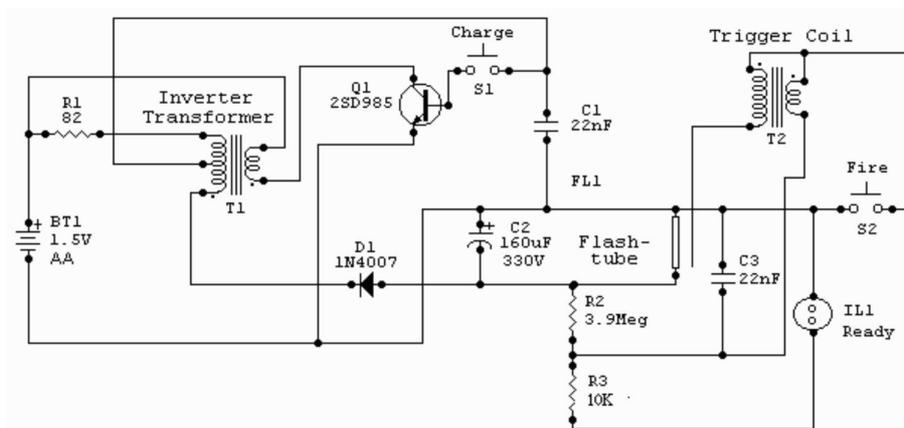
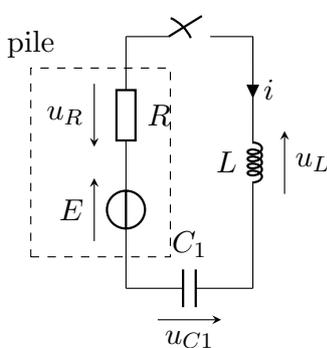


FIGURE 1 – Schéma global du circuit d'alimentation du flash d'un appareil photo

Le circuit peut être décomposé en plusieurs blocs que nous allons étudier successivement. L'objectif est d'amplifier la tension fournie par une pile de 1,5 V en une tension de 300 V. Cela se fait par l'intermédiaire du transformateur T1, dont le fonctionnement requiert une tension sinusoïdale.

A. Obtention d'une tension quasi-sinusoïdale à partir d'une tension continue



La production d'une tension sinusoïdale est assurée par un bloc fonctionnel équivalent à l'association série d'un condensateur de capacité $C_1 = 25 \text{ nF}$ et d'une bobine d'inductance $L = 36 \text{ mH}$, alimentée par une pile de f.é.m. $E = 1,5 \text{ V}$ constante et de résistance interne R . La bobine modélise en fait le primaire d'un transformateur, ce qui ne change rien à l'étude.

À l'instant initial $t = 0$ où le flash doit se déclencher, le condensateur est déchargé ($u_{C1}(0) = 0$) et l'interrupteur est actionné afin de fermer le circuit.

- Q1 1. Donner sans calcul mais en justifiant la valeur de la tension u_R aux bornes de la résistance juste après la fermeture de l'interrupteur. En déduire la valeur de la tension u_L aux bornes de la bobine à ce même instant.

- Q2 2. Montrer que la tension u_L vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_L}{dt} + \frac{1}{LC_1} u_L = 0. \quad (1)$$

- Q3 3. Écrire cette équation sous forme canonique et définir la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q des oscillations.
- Q4 4. Démontrer que la tension u_L présente des oscillations seulement si la résistance interne de la pile est telle que

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C_1}}. \quad (2)$$

On suppose par la suite que R vérifie cette condition.

- Q5 5. Exprimer en fonction de ω_0 et Q , puis des données de l'énoncé, la pseudo-pulsation notée ω de la tension $u_L(t)$. Définir un temps caractéristique d'amortissement τ à exprimer en fonction de ω_0 et Q puis des données de l'énoncé.
- Q6 6. Écrire en fonction de ω et τ l'expression des solutions de l'équation différentielle déterminée à la question 2 en faisant intervenir deux constantes A et B dépendant des conditions initiales qu'on ne cherchera pas à déterminer. Quelle est la dimension de ces deux constantes?
- Q7 7. Justifier la condition initiale juste après fermeture de l'interrupteur

$$\frac{du_L}{dt}(0) = -\frac{RE}{L} \quad (3)$$

- Q8 8. En vous appuyant sur les deux conditions initiales, dessiner qualitativement l'allure de la tension $u_L(t)$. Vous ferez apparaître sur la figure la pseudo-période T des oscillations et le temps caractéristique d'amortissement τ .
- Q9 9. Pour le fonctionnement du flash, les oscillations de u_L sont considérées de qualité suffisante lorsque leur amortissement au bout de cinq pseudo-périodes est de moins de 10%. En faisant l'approximation que $\omega \simeq \omega_0$ si l'amortissement est faible, déterminer la valeur maximale de la résistance interne de la pile permettant de vérifier ce critère. Justifier par un ordre de grandeur qu'il est réalisable.

B. Alimentation du flash

Comme déjà mentionné, la bobine précédente est en réalité le primaire d'un transformateur, dont le secondaire est modélisable par une seconde bobine, d'inductance beaucoup plus importante. Ces deux enroulements sont liés magnétiquement par un noyau en fer doux.

Ce dispositif permet de fournir, à partir de la tension alternative $u_L(t)$, de pulsation ω et d'amplitude $U_m \simeq E$ aux bornes du primaire, une tension alternative sinusoïdale $u'(t)$, de pulsation ω et d'amplitude $U'_m = k U_m$ aux bornes du secondaire, avec $k \simeq 200$ pour le flash étudié. La tension variable ainsi produite aux bornes du secondaire est ensuite traitée par un montage redresseur produisant une tension constante $E' = U'_m \simeq 200 E$.

L'ensemble est modélisable par un générateur de Thévenin de f.é.m. E' et de résistance interne R' , comme représenté figure 2.

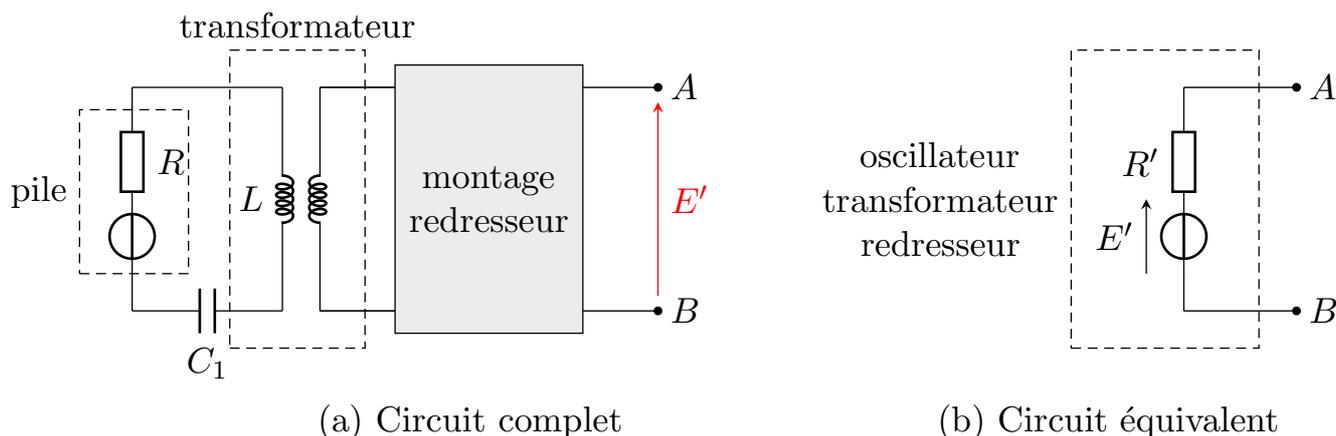
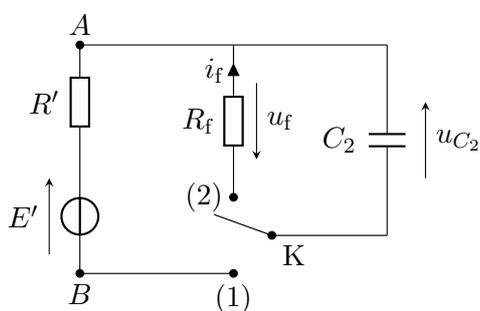


FIGURE 2 – Schéma équivalent au circuit d'alimentation du flash



Ce dipôle AB permet d'alimenter le flash. Lorsque l'interrupteur K est en position (1), un condensateur de capacité C_2 est chargé par le dispositif. Dès que la charge du condensateur a pratiquement atteint sa valeur maximale, ce qui correspond à une tension $u_{C_2} = E'$, le flash est prêt à fonctionner. Lorsque le flash se déclenche à l'instant $t = 0$, l'interrupteur K passe en position (2) et permet la décharge du condensateur dans le résistor R_f modélisant le flash, ce qui provoque l'émission d'un éclair lumineux.

- Q10 1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i_f traversant le flash pour $t \geq 0$.
- Q11 2. Résoudre cette équation différentielle pour exprimer $i_f(t > 0)$ et tracer l'allure de i_f pour tout t .
- Q12 3. Exprimer l'énergie stockée initialement dans le condensateur.
- Q13 4. Évaluer (en ordre de grandeur) la puissance libérée par le flash (en Watt) pendant une durée de 0,1 s en prenant la valeur de la capacité donnée dans la notice technique.
- Q14 5. Proposer une méthode expérimentale permettant de déterminer la résistance R' du générateur de Thévenin équivalent au circuit d'alimentation du flash.

II. ÉTUDE D'UN MONTAGE ACTIF

On cherche à récupérer la valeur moyenne (harmonique de fréquence nulle) d'un signal $v_E(t)$ quelconque. On utilisera pour ce faire un filtre passe-bas de fréquence de coupure faible de façon à filtrer toutes les harmoniques non nulles de $v_E(t)$.

Les différentes parties de ce problème sont indépendantes.

Les amplificateurs linéaires intégrés utilisés sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

A. Montage de base

Alimenté par une tension d'entrée v_E , le montage amplificateur représenté ci-dessous à gauche délivre une tension de sortie v_S .

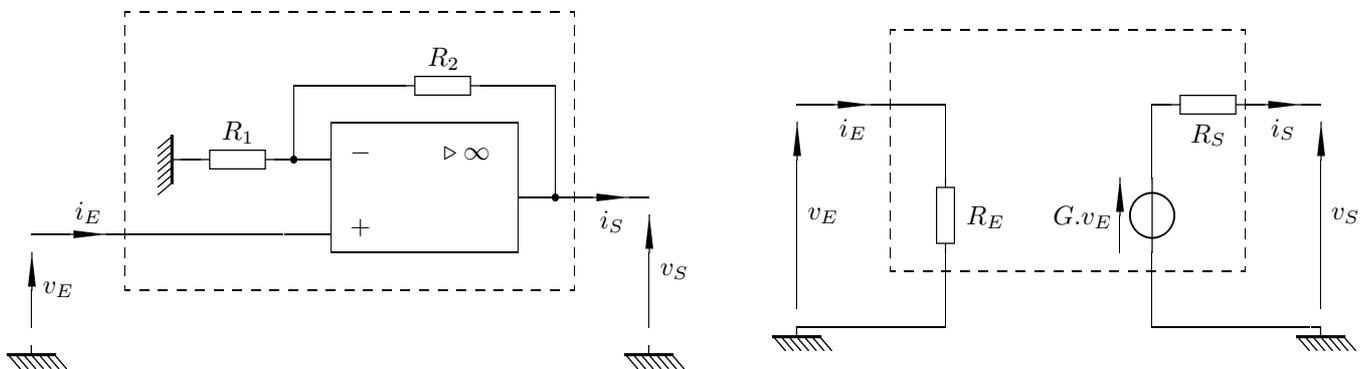


FIGURE 1 – Montage amplificateur (à gauche) et sa modélisation (à droite).

- Q15 1. Qu'appelle-t-on amplificateur linéaire intégré "idéal"? Que vaut le courant d'entrée i_E ?
- Q16 2. Que signifie l'expression "fonctionnement en régime linéaire"? À quelle condition cela est-il possible?
- Q17 3. Calculer le rapport $G = \frac{v_S}{v_E}$.
- Q18 4. On suppose v_E sinusoïdale. Tracer l'allure de v_E et v_S pour $R_1 = R_2 = 100 \text{ k}\Omega$.
5. La figure 1 ci-dessus à droite représente de manière symbolique l'amplificateur de tension équivalent au circuit de la figure 1 ci-dessus à gauche.
 G est le gain déterminé dans la question précédente.
- Q19 En déduire la résistance d'entrée R_E et la résistance de sortie R_S de cet amplificateur.

B. Montage complet et fonction de transfert

On considère le circuit de la figure 2 ci-dessous contenant deux **amplificateurs de tension** tels que celui représenté figure 1, l'un de gain $G_1 = \frac{v_2}{v_1} = 1$ et l'autre de gain $G_2 = \frac{v_S}{v_3}$ réglable et légèrement inférieur à 2 pour le moment. On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Ce circuit est alimenté par une tension sinusoïdale $v_E = V_E \cos \omega t$ de pulsation ω variable.

On notera $\underline{v}_E = V_E \cdot \exp(j\omega t)$ la grandeur complexe représentant v_E .

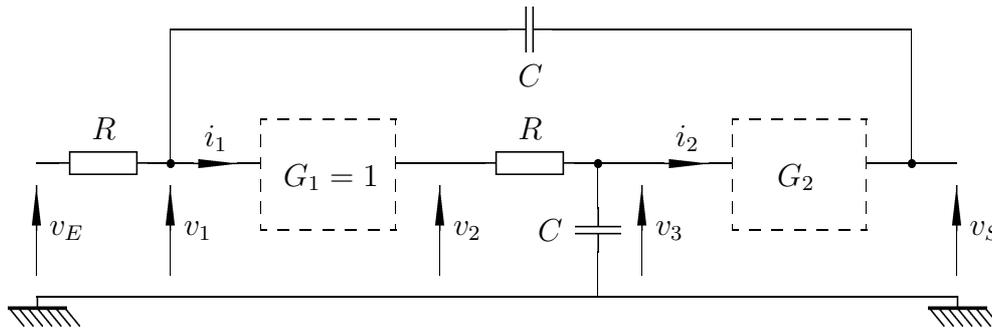


FIGURE 2 – Montage complet

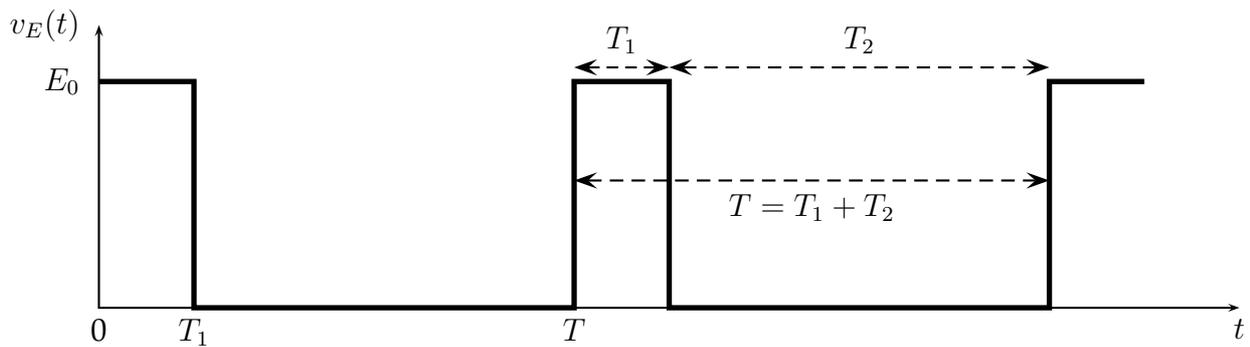
- Q20 1. Quel montage classique permet d'obtenir le premier amplificateur ($G_1 = 1, i_1 = 0$)? Le nommer et faire un schéma
- Q21 2. Quelle est la valeur de i_2 ?
En déduire la relation liant les tensions complexes \underline{v}_3 et \underline{v}_2 , R , C et ω .
- Q22 3. Représenter le circuit équivalent au montage représenté figure 2 ci-dessus en basses fréquences et en hautes fréquences, déterminer v_s dans chaque cas et en déduire la nature probable du filtre ainsi constitué.
4. Déterminer la fonction de transfert du filtre obtenu : rapport $\underline{H}(j\omega)$ entre les tensions complexes de sortie \underline{v}_S et d'entrée \underline{v}_E en fonction de G_2 et du rapport $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

- Q23 On donnera H_0 et l'acuité ou facteur de surtension Q de la résonance en fonction de G_2 .
- Q24 Comment peut-on faire varier facilement cette acuité?
- Q25 5. Calculer le module G de $\underline{H}(j\omega)$ en fonction de x , Q et H_0 .
- Q26 6. Déterminer la valeur maximale G_{\max} de G .
Pour quelle valeur de la pulsation est-elle atteinte?
- Q27 7. On suppose $R = 100 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ et $G_2 = 1,8$. Quelles sont les valeurs de Q et G_{\max} ?
- Q28 8. Tracé des diagrammes de Bode
(a) Donner l'expression du gain en décibel et de la phase.
(b) Tracer les diagrammes asymptotiques associés, en justifiant (on tracera en fonction de $\log(x)$).
- Q29 (c) Sur les mêmes graphiques avec une couleur différente, tracer la courbe réelle, justifier.
- Q30 9. Que se passe-t-il si on règle $G_2 = 2,2$. Justifier.
- Q31 10. Quelle valeur doit-on donner à G_2 pour obtenir $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$?
Quel est l'intérêt de ce réglage?
- Q32 Tracer l'allure du nouveau diagramme de Bode en gain obtenu.

C. Application

Le circuit est maintenant alimenté par une tension $v_E(t)$ rectangulaire périodique de période $T = 1 \text{ ms}$, de rapport cyclique $\alpha = \frac{T_1}{T} = 0,2$ et d'amplitude $E_0 = 1 \text{ V}$ représentée figure 3.

FIGURE 3 – Tension $v_E(t)$ appliquée à l'entrée du filtre.

- Q33
1. Donner l'expression littérale puis calculer la valeur moyenne $\langle v_E \rangle$ de $v_E(t)$.
 2. On applique la tension $v_E(t)$ ci-dessus à l'entrée du montage représenté sur la figure 3. Compte-tenu des valeurs numériques, quelle tension de sortie v_S va-t-on mesurer à la sortie?
- Q34

III. ATTRACTION GRAVITATIONNELLE

On considère dans ce problème que la Terre possède une répartition de masse à symétrie sphérique de centre O de masse M_T et de rayon R_T . On pourra donc considérer que le champ gravitationnel créé par la Terre en un point M , situé à une distance du centre de la Terre $r \geq R_T$, est identique à celui créé par une masse ponctuelle M_T placée en O .

A. Préliminaires

On se place en un point M de l'espace, situé à une distance r du centre de celle-ci avec $r \geq R_T$. On notera \mathcal{G} la constante de gravitation universelle.

- Q35 1. Rappeler l'expression du champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ créé par la Terre en un point M de l'espace. On exprimera $\vec{g}(M)$ en fonction de \mathcal{G} , M_T , r et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.
Représenter le vecteur $\vec{g}(M)$ et le vecteur unitaire sur un schéma.
- Q36 2. En déduire l'expression de $\vec{g}_0(M)$ le champ de gravitation à la surface de la Terre en fonction de \mathcal{G} , M_T et R_T . Justifier.

B. Satellite en mouvement autour de la Terre

On étudie le mouvement autour de la Terre d'un satellite S de masse m placé dans le champ gravitationnel terrestre.

On néglige les frottements.

On se place dans le référentiel considéré comme galiléen qui a pour origine le centre de la Terre et ses trois axes dirigés vers trois « étoiles fixes » .

- Q37 3. Quel est le nom de ce référentiel ?
- Q38 4. Déterminer l'expression de la force \vec{f} à laquelle le satellite S est soumis. On exprimera \vec{f} en fonction de m , \mathcal{G} , M_T , r et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.
- Q39 5. Déterminer de même l'expression de la force \vec{f}' à laquelle la Terre est soumise de la part du satellite. Justifier.
- Q40 6. En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que le mouvement du satellite S est nécessairement plan. Justifier précisément.
Sachant qu'à l'instant $t = 0$ le satellite se trouve au point M_0 et a une vitesse \vec{v}_0 , préciser le plan dans lequel se fait le mouvement.

Dans la suite de cette partie, on se placera dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon r et d'altitude h autour de la Terre et on utilisera les coordonnées cylindriques.

L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, un point quelconque de l'espace étant repéré par ses coordonnées (r, θ, z) .

Le plan dans lequel se fait le mouvement du satellite est le plan du repère cylindrique contenant l'origine O du repère (le point O étant le centre de la Terre) et les vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

- Q41 7. En justifiant par un schéma, établir le lien entre h et r .
- Q42 8. Rappeler les expressions des vecteurs position \vec{OM} , vitesse \vec{v} et accélération \vec{a} .
- Q43 9. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que la norme \vec{v} de la vitesse du satellite S est nécessairement constante au cours du mouvement et déterminer son expression en fonction de \mathcal{G} , M_T et r .

- Q44 10. Déterminer l'expression de la période T du mouvement de rotation de S autour de la Terre en fonction de v et de r , puis en fonction de \mathcal{G} , M_T et de r . En déduire la troisième loi de Képler.
- Q45 11. Indiquer une méthode pour déterminer la masse de la Terre. Donner sans justification l'ordre de grandeur de la masse de la Terre.
- Q46 12. Un autre satellite S' de masse m' en orbite circulaire autour de la Terre a une trajectoire de rayon r égal au rayon de la trajectoire de S . Les deux satellites tournent dans le même plan et dans le même sens. S et S' risquent-ils de se heurter au cours de leur mouvement? Justifier.

C. Étude énergétique

La force à laquelle le satellite S est soumis dérive d'une énergie potentielle E_p telle que E_p peut s'écrire sous la forme $E_p = -\frac{\alpha}{r}$ avec α une constante positive. On prend par convention une énergie potentielle nulle à l'infini.

Sauf mention contraire, on ne se limitera pas dans cette partie à un mouvement circulaire, mais on se placera dans le cas d'un mouvement quelconque du satellite S autour de la Terre

On notera C la grandeur $r^2\dot{\theta}$.

- Q47 13. Montrez que C est une constante que l'on appellera la constante des aires.
- Q48 14. À partir de la définition de l'énergie potentielle, démontrer la formule proposée par l'énoncé pour E_p et en déduire l'expression de α en fonction des données du problème.
- Q49 15. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite S en fonction de $m, r, \dot{r}, \dot{\theta}$ et α .
- Q50 16. En déduire l'expression de l'énergie potentielle effective du satellite en fonction de m, C, r et α . Donner l'allure de la représentation graphique de l'énergie potentielle effective en fonction de r .
- Q51 17. En exploitant cette courbe, indiquer en fonction de la valeur de l'énergie mécanique s'il s'agit d'un état de diffusion ou d'un état lié. Justifier brièvement la réponse.
- Q52 18. Déterminer l'énergie mécanique $E_{m,c}$ associée à une trajectoire circulaire de rayon r_c en fonction de r_c, m, \mathcal{G} et M_T .
- Q53 19. Définir et déterminer la première vitesse cosmique v_1 en fonction de R_T, \mathcal{G} et M_T . Donner sans justification son ordre de grandeur.

I. ÉTUDE DU FLASH D'UN APPAREIL PHOTO

d'après Centrale TSI 2006 et concours fac 2008

A. Obtention d'une tension quasi-sinusoïdale à partir d'une tension continue

1. Le courant i traversant la résistance est aussi celui qui traverse la bobine : il doit donc être continu à l'instant $t = 0$. À $t = 0^-$, le circuit est ouvert donc $i(0^-) = 0$, et ainsi $i(0^+) = 0$. On en déduit $u_R(0^+) = R i(0^+) = 0$.

Appliquons maintenant la loi des mailles à $t = 0^+$, juste après fermeture de l'interrupteur,

$$E = u_R(0^+) + u_L(0^+) + u_{C1}(0^+) = 0 + u_L(0^+) + 0 \quad (4)$$

car le condensateur est supposé déchargé à $t = 0^-$ et la tension à ses bornes est continue.

Q1

Ainsi, $u_L(0^+) = E$.

Justifiez vos affirmations, même pour $t = 0^-$.

2. Établissons l'équation différentielle pour $t > 0$, après fermeture de l'interrupteur. D'après la loi des mailles, $E = u_R + u_L + u_{C1}$. Il faut exprimer u_R et u_{C1} en fonction de u_L par l'intermédiaire des lois de comportement et de l'intensité du courant i . Il faut pour cela dériver par rapport au temps cette relation,

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{du_{C1}}{dt} = 0. \quad (5)$$

D'après les lois de comportement, $R \frac{di}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{i}{C_1} = 0$.

Enfin, d'après la loi de comportement de la bobine, $u_L = L \frac{di}{dt}$ soit $\frac{di}{dt} = \frac{u_L}{L}$.

Pour faire apparaître u_L dans la relation, il est nécessaire de la dériver à nouveau, soit

$$R \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{1}{C_1} \frac{di}{dt} = 0 \quad (6)$$

Q2

ce qui conduit enfin à $\frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_L}{dt} + \frac{1}{LC_1} u_L = 0$.

*Il est possible d'utiliser la notation \int pour parler de primitive en écrivant $i = \frac{1}{L} \int u_L$.
Toutefois je n'aime pas cette notation (qui cache des constantes).*

Attention, u_L demandé et non u_C . La relation $i = C \frac{du}{dt}$ est valable pour u_C mais pas pour u_L .

3. Par identification avec la forme canonique d'une équation différentielle du second ordre,

Q3

$\frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_L}{dt} + \omega_0^2 u_L = 0$, on déduit $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC_1}$ soit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} \Rightarrow$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_1}}.$$

4. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle obtenue s'écrit

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0. \quad (7)$$

Les solutions de l'équation différentielle présentent un comportement oscillant si les racines de l'équation caractéristique sont complexes, c'est-à-dire si son discriminant Δ est strictement négatif,

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0 \quad \text{soit} \quad \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0 \quad (8)$$

Q4

Le discriminant est du signe du second terme du produit. Ce second terme est négatif pour des valeurs élevées du facteur de qualité, précisément pour

$$Q > \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_1}} > \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C_1}}}. \quad (9)$$

5. Si le discriminant est négatif, les racines de l'équation caractéristique valent

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 \left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (10)$$

On sait alors que la pseudo-pulsation est la partie imaginaire des racines et le taux d'amortissement l'opposé de leur partie réelle,

$$\boxed{\beta = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (11)$$

Q5

En remplaçant les paramètres caractéristiques par leurs expressions, on aboutit à

$$\boxed{\beta = \frac{R}{2L} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C_1}{4L}} = \sqrt{\frac{1}{LC_1} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (12)$$

Q6

6. Comme l'équation différentielle est homogène, il n'y a pas de solution particulière à chercher (en d'autres termes cette solution particulière est nulle), et ainsi

$$\boxed{u_L(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-\beta t}} \quad (13)$$

où A et B sont deux constantes **homogènes à une tension**.

7. D'après la loi des mailles, pour tout $t > 0$ (interrupteur fermé), $E = u_R + u_L + u_{C_1}$. Ainsi, pour tout $t > 0$, $\frac{du_L}{dt} = -\frac{du_R}{dt} - \frac{du_{C_1}}{dt} = -R\frac{di}{dt} - \frac{i}{C_1}$.

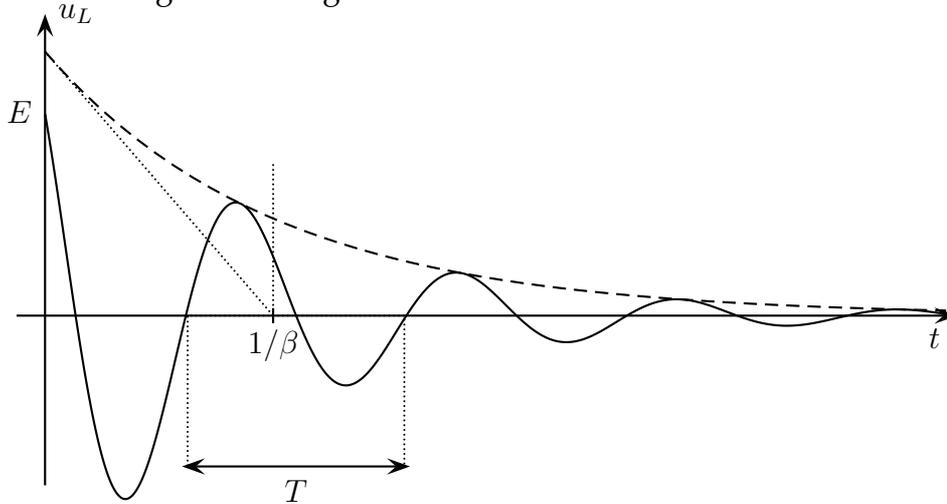
Or la dérivée de l'intensité est directement reliée à la tension aux bornes de la bobine, donc $\frac{du_L}{dt} = -\frac{R}{L}u_L - \frac{i}{C_1}$. Cette relation est vraie pour tout $t > 0$, et demeure donc vraie dans la limite où t tend vers zéro en restant positif. On en déduit $\frac{du_L}{dt}(0^+) = -\frac{R}{L}u_L(0^+) - \frac{i(0^+)}{C_1}$..

Q7

Les résultats des premières questions donnent alors

$$\boxed{\frac{du_L}{dt}(0^+) = -\frac{RE}{L}}. \quad (14)$$

- Q8 8. La solution particulière est 0, la courbe tend donc vers 0 de façon exponentielle. L'enveloppe ne touche pas la courbe en $t = 0$ à cause de la tangente à l'origine qui est non nulle et négative. $1/\beta$ peut se trouver soit en regardant $0,37 \times$ la valeur en 0 de l'enveloppe, soit en regardant la tangente à l'origine.



9. L'amplitude instantanée des oscillations est proportionnelle à $e^{-t/\tau}$. Par ailleurs, si l'amplitude décroît lentement, c'est que l'amortissement est faible et on peut faire l'approximation $T \simeq T_0$ comme suggéré par l'énoncé. La valeur maximale autorisée du taux d'amortissement des oscillations est celle pour laquelle $\exp(-5T_0/\tau) = 0,9 \exp(-0/\tau) = 0,9$. Ainsi, en prenant le logarithme, $-5T_0/\tau = \ln 0,9$. Remplaçons maintenant T_0 et τ par leurs expressions, $-5\omega_0 T_0 / (2Q) = \ln 0,9$, pour obtenir finalement la valeur maximale de la résistance,

Q9
$$R_{\max} = -\frac{1}{5\pi} \sqrt{\frac{L}{C_1}} \ln 0,9 \simeq 8 \Omega .$$

L'ordre de grandeur de la résistance interne d'une pile est de quelques ohms, a priori inférieure à la valeur maximale autorisée ou du même ordre de grandeur. Les oscillations obtenues sont donc de bonne qualité.

Pour ce genre de calcul, vous avez tout intérêt à simplifier le résultat analytique avant de faire l'application numérique. Cela vous fait/ferait du bien de ne pas avoir la calculatrice!

B. Alimentation du flash

1. Plaçons-nous à $t > 0$ où l'interrupteur K est en position 2. D'après la loi des mailles, $u_f + u_{C_2} = 0$.

Lorsque l'interrupteur est en position 2, le dipôle AB est dans une branche ouverte et n'est parcouru par aucun courant. Ainsi, le même courant i_f traverse R_f et C_2 , et en particulier $i_f = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt}$. Pour l'introduire dans la relation issue de la loi des mailles, il faut donc la dériver, ce qui donne $\frac{du_f}{dt} + \frac{du_{C_2}}{dt} = 0$ soit en remplaçant par les lois de comportement,

Q10

$$R_f \frac{di_f}{dt} + \frac{1}{C_2} i_f = 0 . \tag{15}$$

2. Écrivons cette équation sous forme canonique,

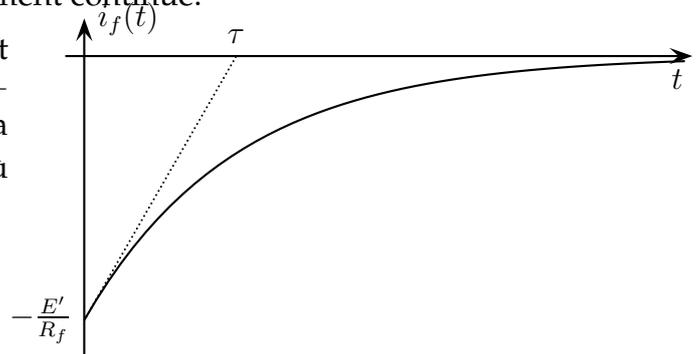
$$\frac{di_f}{dt} + \frac{1}{\tau} i_f = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{R_f C_2} . \tag{16}$$

L'équation est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à chercher, et ses solutions s'écrivent sous la forme $i_f(t) = Ae^{-t/\tau}$, où A est une constante à déterminer à partir des conditions initiales. Déterminons $i_f(0^+)$. D'après l'énoncé, la tension aux bornes de C_2 à l'instant initial vaut E' , et elle est forcément continue.

Q11

D'après la loi des mailles, on en déduit $u_f(0^+) + u_{C_2}(0^+) = 0$ soit $R_f i_f(0^+) + E' = 0$ d'où $i_f(0^+) = -\frac{E'}{R_f}$. D'après la forme des solutions, $i_f(0^+) = A$, d'où finalement

$$i_f(t) = -\frac{E'}{R_f} e^{-t/\tau}$$



Q12

3. L'énergie initialement stockée dans le condensateur vaut

$$\mathcal{E}_C(0) = \frac{1}{2} C_2 u_{C_2}(0)^2 = \frac{1}{2} C_2 E'^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{E}_C(0) = 20\,000 C_2 E'^2} \quad (17)$$

Q13

4. L'énergie est de $\mathcal{E}_C(0) = 20\,000 C_2 E'^2$, si on considère la puissance moyenne (ou que l'on suppose que la puissance est constante), alors l'énergie étant délivrée pendant un temps δt , la puissance est $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{E}_C(0)}{\delta t}$, soit numériquement $\mathcal{P} = 2 \times 10^5 \times 160 \times 10^{-6} \times 1,5^2 = 2 \times 16 \times 2,25 \simeq \boxed{72 \text{ W}}$.

Q14

5. Expérimentalement, la résistance interne r étant une modélisation du générateur, il n'est pas possible d'utiliser un ohmmètre. La technique usuelle est de mettre une charge en sortie (brancher une résistance) et de regarder l'évolution de la tension en fonction de la charge. (voir les TP pour le schéma)

- (a) Faire une mesure en sortie ouverte pour mesurer la f.é.m. E . En effet, $i = 0$, d'où $u_G = E - ri = E$.
- (b) On met une résistance variable R en sortie, un pont diviseur de tension : $u_G = \frac{R}{r+R} E$. On fait varier R jusqu'à obtenir $u_G = E/2$ auquel cas r .

II. ÉTUDE D'UN MONTAGE ACTIF.

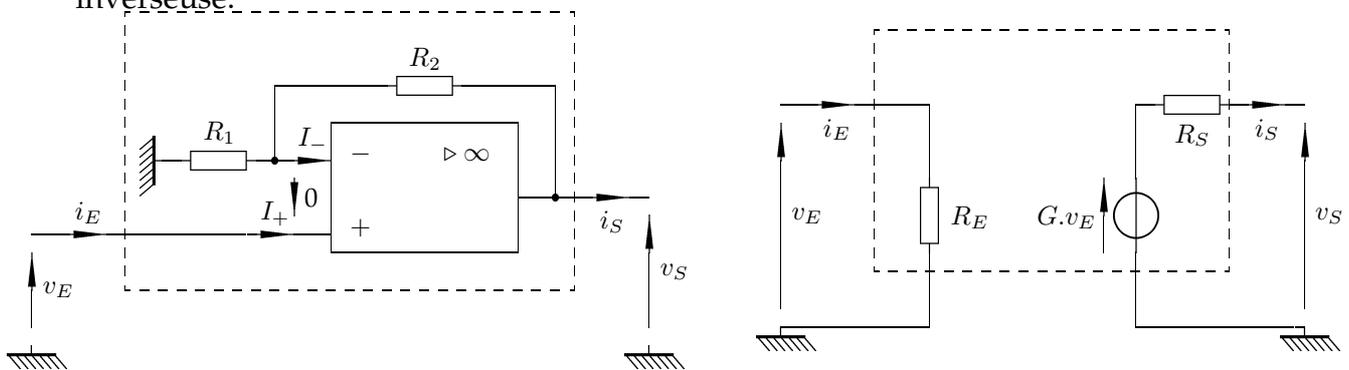
D'après Centrale – Sup'Elec TSI 2003

A. Montage de base

- Q15 1. Un ALI "idéal" est un ALI pour lequel la tension différentielle d'entrée $\epsilon = v_+ - v_- = 0$ est nulle en régime linéaire et les courants d'entrée (entrée inverseuse et non-inverseuse) sont également nuls. Ainsi le courant d'entrée i_E est nul.

Rem : les caractéristiques de l'ALI réel seront vues en deuxième année en PSI.

- Q16 2. L'expression "régime linéaire" pour l'ALI idéal correspond à $\epsilon = v_+ - v_- = 0$ pour l'ALI idéal. Cela est possible à condition d'avoir une boucle de rétroaction de la sortie vers l'entrée inverseuse.



3. Pour déterminer G , on applique un diviseur de tension aux bornes de R_1 (qui est bien en série avec R_2 car $i_- = 0$) : $v_- = \frac{R_1}{R_1+R_2}v_E$. Or $v_- = v_E$ d'où l'expression de G :

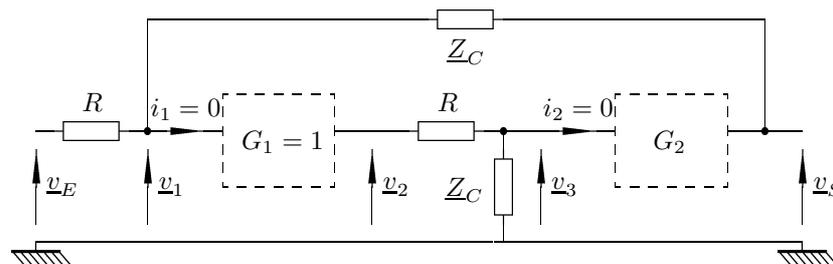
Q17 $G = \frac{v_S}{v_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$: il s'agit du montage amplificateur de tension non inverseur.

Rem : On pouvait aussi appliquer la loi des noeuds en termes de potentiels ou le théorème de Millman pour faire plus compliqué.

- Q18 4. Pour ces valeurs, on a un gain de 2. v_s et v_e sont en phase avec un rapport d'amplitude de 2.
5. Sur la figure ci-dessus à droite $v_E = v_E \cdot i_E$ avec i_E nul et $v_E \neq 0$, on en déduit que si l'ALI est idéal, R_E est infini. À la sortie, une loi des maille donne $G \cdot v_E - R_S \cdot i_S - v_S = 0 \Rightarrow v_S =$

- Q19 $G \cdot v_E - R_S \cdot i_S$. Or, par définition de G , $v_S = G \cdot v_E$, on en déduit $R_S = 0$ car i_S n'est pas nul.

B. Montage complet et fonction de transfert



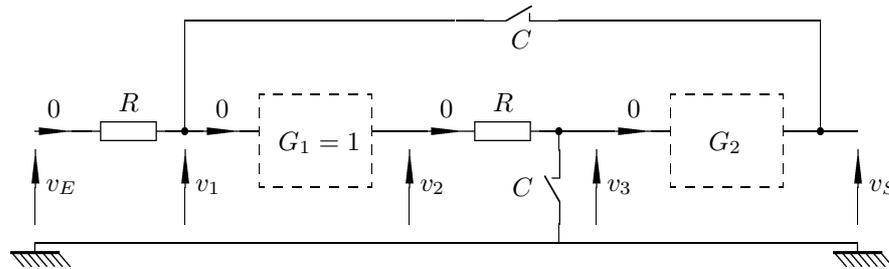
- Q20 1. Le montage classique permettant d'obtenir le l'amplificateur de gain $G_1 = 1$ et une impédance d'entrée infinie ($i_1 = \frac{v_1}{R_e} = 0$ est le montage suiveur pour lequel on retire R_1 ($R_1 \rightarrow \infty$) et on replace R_2 par un fil ($R_2 \rightarrow 0$).

2. Comme on reprend un montage amplificateur non inverseur, d'impédance d'entrée infinie, $i_2 = 0$. Le résistor R et le condensateur d'impédance Z_C sont donc parcourus par le même courant, on est en présence d'un pont diviseur de tension d'où

Q21

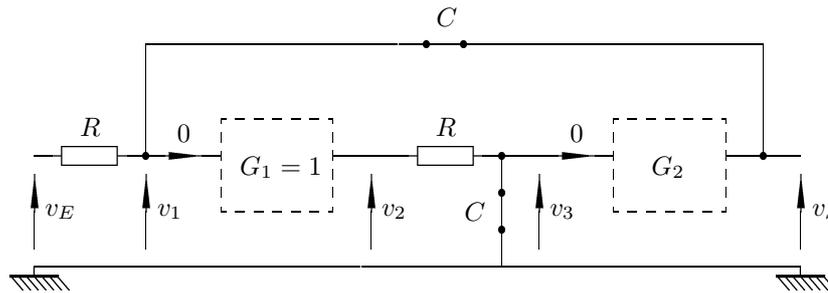
$$v_3 = \frac{Z_C v_2}{Z_C + R} = \frac{v_2}{1 + RY_C} \Rightarrow v_3 = \frac{v_2}{1 + jRC\omega}$$

3. En basses fréquences, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, d'où le circuit équivalent ci-dessous :



On remarque alors que les courants qui traversent les résistors sont nuls d'où $v_1 = v_E$, $v_2 = G_1 v_1 = v_E$. Puis $v_3 = v_2 = v_1$ et comme $v_S = G_2 v_3$, on a au final $v_S = G_2 v_E > v_E$.

En hautes fréquences, un condensateur est équivalent à un interrupteur fermé, d'où le circuit équivalent ci-dessous :



Q22

On a alors immédiatement $v_3 = 0$ et $v_S = G_2 v_3 = 0$.

On en déduit que le circuit constitué est certainement un filtre **passé bas** (du second ordre).

4. Fonction de transfert H : par application de la loi des nœuds en terme de potentiels (ou directement le théorème de Millman) au nœud de potentiel v_1 :

$$\frac{v_e - v_1}{R} + \frac{v_s - v_1}{Z_C} + 0 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{v_e + jRC\omega v_s}{1 + jRC\omega} = \frac{v_e + jxv_s}{1 + jx} = v_2$$

Q23

Par ailleurs (question 2.), $v_3 = \frac{v_2}{1 + jRC\omega} = \frac{v_2}{1 + jx} = \frac{v_e + jxv_s}{(1 + jx)^2}$ et enfin

$$v_s = G_2 \cdot v_3 = \frac{G_2 \cdot v_e + jG_2 x v_s}{(1 + jx)^2} \Rightarrow (1 + jx)^2 \cdot v_s = G_2 \cdot v_e + jG_2 x v_s \Rightarrow v_s(1 + 2jx - x^2 - jG_2 x) = G_2 \cdot v_e$$

$$\underline{H} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{G_2}{1 - x^2 + j(2 - G_2)x} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad \text{avec} \quad H_0 = G_2 \text{ et } Q = \frac{1}{2 - G_2}.$$

On retrouve bien la fonction de transfert d'un Filtre passe-bas du second ordre.

Pour faire varier facilement Q , on modifie la valeur de G_2 , par exemple en plaçant un résistor de résistance R_2 variable quand on construit l'amplificateur de gain G_2 .

Q24

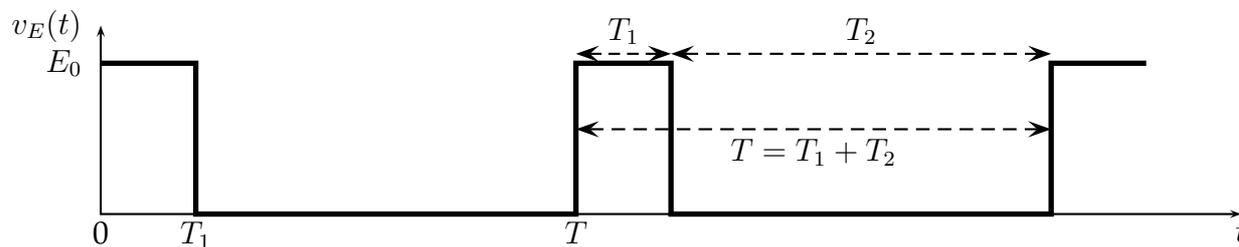
- Q25 5. On calcule ensuite $G = |\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$.
6. G passe par un maximum quand $(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ est minimum car le numérateur est constant, c'est à dire pour x tel que $\frac{d}{dx}((1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}) = 0 \iff 2x[-2(1-x^2) + \frac{1}{Q^2}] = 0$ soit quand $x = 0$ c'est à dire en basses fréquences, soit, si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (condition de surtension) $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \simeq 1$ car G_2 proche de 2 donc Q est grand. On en déduit que G est maximum
- Q26 pour $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \simeq \omega_0$ et on a alors $G = G_{\max} \simeq \frac{G_0}{\sqrt{1/Q^2}}$ soit $G_{\max} \simeq QH_0 = \frac{G_2}{2-G_2}$.
- Q27 7. Avec les valeurs numériques suivantes, $R = 100 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ et $G_2 = 1,8$ on calcule $\omega_0 = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $H_0 = 1,8$, $Q = 5$ et $G_{\max} \simeq QH_0 = 9$.
8. Le gain en décibels est $G_{\text{dB}} = 20 \log G = 20 \log H_0 - 10 \log[(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}]$ alors que la phase est $\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(\frac{H_0}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}) = 0 - \arg(1-x^2+j\frac{x}{Q})$
- Q28 $\Rightarrow \tan \varphi = -\frac{x}{Q(1-x^2)}$ avec $\sin \varphi < 0$ soit $-\pi \leq \varphi \leq 0$.
- Q29 Tracé asymptotique des diagrammes de Bode (ci-après) :
- En basses fréquences : $x \ll 1 \Rightarrow \log x \leq -1$, $\underline{H}(j\omega) \simeq H_0$ et immédiatement, $G_{\text{dB}} \simeq 20 \log G_0 = 20 \log 1,8 \simeq 5,1 \text{ dB}$ d'où une asymptote horizontale en $G_{\text{dB}} = 5,1 \text{ dB}$. De même, $\underline{H} \simeq H_0$ réel positif $\varphi = \arg H_0 \simeq 0$.
 - En hautes fréquences : $x \gg 1 \Rightarrow \log x \geq 1$, $\underline{H}(j\omega) \simeq -\frac{H_0}{x^2}$ d'où $G_{\text{dB}} \simeq 20 \log G_0 - 10 \log x^4 = 20 \log 1,8 - 40 \log x \simeq 5,1 - 40 \log x \text{ dB}$ d'où une asymptote qui coupe l'axe vertical en $G_{\text{dB}} = 5,1 \text{ dB}$ et admet une pente de -40 dB/décade . De même, $\underline{H} \simeq \frac{H_0}{-x^2}$ réel négatif donc $\varphi = \arg \underline{H} \simeq -\pi$.
 - Pour $x = 1 \iff \log x = 0$, $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{j/Q} = -jQH_0$ d'où $G_{\text{dB}} = 20 \log QH_0 = 20 \log 9 \simeq 19,1 > 5,1$, on a bien résonance en tension car $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. De même, $\underline{H} = -jH_0Q$ donc $\varphi = \arg \underline{H} = -\frac{\pi}{2}$.
- Q30 La valeur en $x = 1$ permet de compléter les diagrammes réels (de façon approchée, on prendrait un ordinateur sinon).
9. La fonction de transfert peut se mettre sous la forme $\frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$ où $N(j\omega)$ est $D(j\omega)$ sont des polynômes en $j\omega$: $\underline{H} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{H_0}{(j\omega)^2 + \frac{1}{Q}(j\omega)x + 1}$ ce qu'on peut ramener à l'équation différentielle suivante : $\ddot{v}_s + \frac{\omega_0}{Q}\dot{v}_s + \omega_0^2 v_s = H_0 \omega_0^2 v_e$.
- Si $G_2 > 2$, par exemple $G_2 = 2,2$, on obtient $Q = \frac{1}{2-G_2} < 0$, les coefficients de l'équation différentielle homogène ne sont plus de même signe et le système va diverger c'est à dire que les amplificateurs opérationnels ne seront plus en régime linéaire, les équation précédentes ne seront plus valables et on obtiendra $v_s = \pm V_{\text{sat}}$ où V_{sat} est la tension de saturation de l'ALI de l'amplificateur G_2 .
- Q31 10. On aura $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2-G_2} \Rightarrow 2 - G_2 = \sqrt{2}$ pour $G_2 = 2 - \sqrt{2} \simeq 0,58$.
- L'intérêt de se placer à cette valeur est d'avoir un comportement le plus proche possible d'un filtre
- Q32 passé bas idéal (du second ordre), le tracé du diagramme de Bode en gain est alors au plus proche des asymptotes. La pulsation de coupure est $\omega_c = \omega_0$ et la bande passante $[0, \omega_0]$.

C. Application

- Q33 1. Par application de la formule de calcul d'une valeur moyenne ($v_E(t)$ ici)

$$\langle v_e \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v_e(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T_1} v_e(t) dt + \frac{1}{T} \int_{T_1}^T v_e(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T_1} E_0 dt + \frac{1}{T} \int_{T_1}^T 0 \times dt = \frac{T_1 \cdot E_0}{T}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle v_e \rangle = \alpha E_0 = 0,2 \text{ V}}$$



2. Comme $T = 1 \text{ ms}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} \simeq 6,3 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ la pulsation du fondamental est largement supérieure à $\omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ la pulsation de coupure du filtre passe bas précédent.

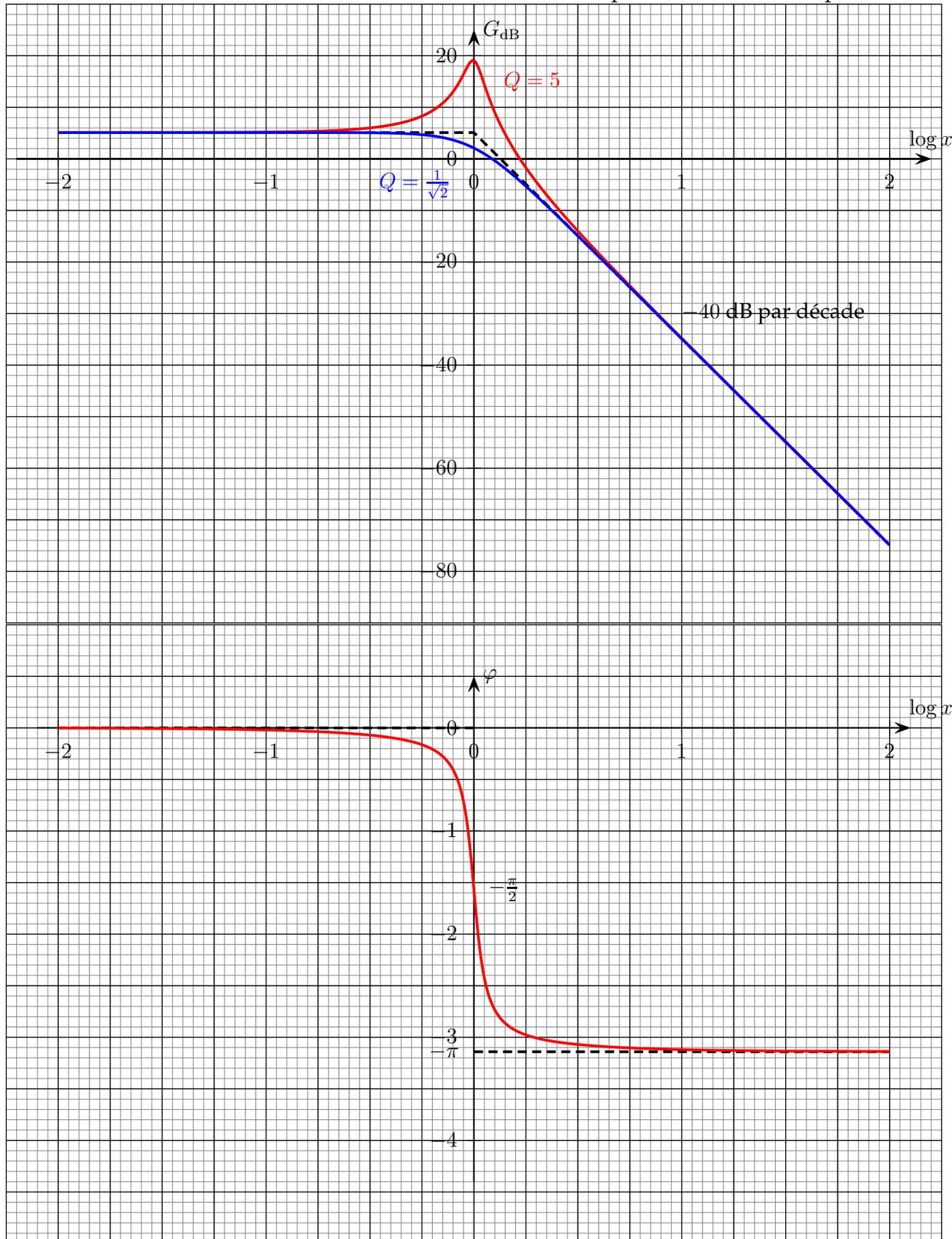
On en déduit que le fondamental et toutes les harmoniques $n \cdot \omega$ sont filtrés alors que la composante continue est transmise par le filtre, avec un facteur d'amplification $H_0 = G_2$ le gain statique.

Q34

D'où finalement, $\boxed{v_s = \alpha G_2 E_0 = 0,44 \text{ V}}$.

Nom : Correction.

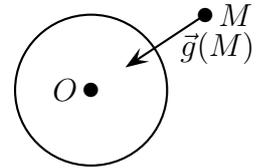
Réponses à II.8. et 10 du problème B.



III. ATTRACTION GRAVITATIONNELLE

A. Préliminaire

Q35 1. Par définition $\vec{g}(M) = \frac{\vec{F}}{m} = \boxed{-\mathcal{G} \frac{M_T}{r^2} \vec{e}_r}$ avec $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$



Q36 2. $\boxed{g_0 = \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}}$

B. Satellite en mouvement autour de la Terre

Caractéristiques du mouvement du satellite autour de la Terre

Q37 3. C'est le référentiel géocentrique.

Q38 4. $\boxed{\vec{f} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \vec{e}_r}$ avec $\vec{e}_r = \frac{\vec{OS}}{\|\vec{OS}\|}$

Attention! il s'agit du \vec{e}_r des coordonnées sphériques et non cylindro-polaire.

Tant que l'on n'a pas montré que le mouvement est plan, le système de coordonnées adapté est le système sphérique. En cylindro-polaire, la distance est $\sqrt{r^2 + z^2}$, le vecteur ne serait pas que \vec{e}_r et ça serait nettement plus compliqué à écrire.

Q39 5. D'après le principe des actions réciproques, $\boxed{\vec{f}^i = -\vec{f}^j = \frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \vec{e}_r}$

6. Le référentiel est galiléen, le point O est fixe, on peut donc appliquer le théorème du moment cinétique au système $\{S\}$ par rapport au point O . La seule force extérieure est l'interaction avec la Terre, d'où $\frac{d\vec{L}_O(S)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f}$. Or \vec{f} et \vec{OM} sont colinéaires, donc leur produit vectoriel est nul.

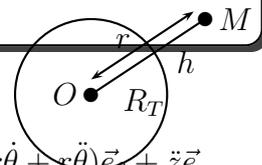
$$\frac{d\text{vec}L_O(S)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O(S) = \vec{c}t\vec{e}$$

Le vecteur $\vec{L}_O(S) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = m\vec{C}$ est donc constant au cours du temps. Or par définition du produit vectoriel \vec{OM} est orthogonal à ce vecteur constant (donc à \vec{C}). Le point M est donc situé dans un plan contenant O et orthogonal à C , un seul plan vérifie cette propriété et c'est le plan défini par \vec{OM}_0 et \vec{v}_0 .

Q40

Attention, rien ne sert d'exprimer \vec{L}_0 en coordonnées cylindro-polaires. En faisant cela vous supposer généralement le mouvement plan pour l'expression de la vitesse et de la position alors que l'on ne l'a pas montré encore!

Q41 7. $\boxed{r = h + R_T}$



Q42 8. $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$ et accélération $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$.

9. Le mouvement est ici circulaire, donc $r = cte$ d'où $\dot{r} = 0$ et l'accélération est simplement $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$. D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au satellite,

$$m\vec{a} = \vec{f} \Rightarrow \begin{cases} -mr\dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \\ mr\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cte \end{cases}$$

donc la norme de la vitesse qui est $r\dot{\theta}$ est constante puisqu'à la fois r et $\dot{\theta}$ sont constant. On a de plus $\dot{\theta} = \frac{v}{r}$, d'où en utilisant l'équation selon \vec{e}_r

Q43

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}$$

Deuxième loi de Képler et conséquences

Q44

10. La période est le temps pour faire un tour : $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G}M_T}}$ D'où $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$

Q45

11. On peut à partir de la trajectoire d'un satellite naturel (la lune) ou artificiel connaître r et T et en déduire la masse de la Terre : $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Q46

12. Non, ils ne risquent pas de se heurter car ils vont à la même vitesse (la vitesse étant simplement fixée par l'altitude) et dans le même sens (penser à deux voitures qui se suivent à la même vitesse).

C. Étude énergétique

Q47

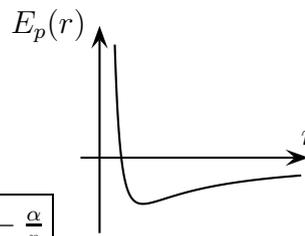
13. On a vu dans les questions précédentes que \vec{L}_O est constant, or $\vec{L}_O = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$ d'où $mr^2\dot{\theta} = mC$ est constant donc C est constant puisque m est constant.

Q48

14. Par définition $\vec{f} = -\text{grad}E_p$ ou $\vec{f} \cdot d\vec{r} = -dE_p$ d'où l'équation suivante : $f_r dr = -dE_p \Rightarrow \frac{dE_p}{dr} = -f_r = \mathcal{G}\frac{mM_T}{r^2} \Rightarrow E_p(r) = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{r} + cte$ et on prend $cte = 0$ pour que $E_p \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$. On a donc $\alpha = \mathcal{G}mM_T$. $E_p(r) = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{r}$

Q49

15. $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r}$ Attention à ne pas se tromper sur $(\vec{v})^2$ (erreur classique).



Q50

16. On utilise $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ d'où $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$

Q51

17. si $E_m < 0$ alors on a des trajectoires elliptiques (circulaire si $E_m = E_{min}$) : état lié. Si $E_m = 0$ les trajectoires sont des paraboles (état de diffusion), et si $E_m > 0$ des hyperboles (état de diffusion)

Q52

18. En remplaçant la vitesse par l'expression trouvée plus tôt : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{r_c} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}mM_T}{r_c} - \frac{\mathcal{G}mM_T}{r_c}$ $E_m = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}mM_T}{r_c}$

Q53

19. Il s'agit de la vitesse d'un satellite en orbite circulaire rasante ($r = R_T$). Il suffit d'appliquer la formule trouvée pour la vitesse en prenant $r = R_T$: $v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} \simeq 8 \text{ km/s}$