

Conseils :

- Ce devoir comporte 3 problèmes indépendants. Les 3 problèmes se feront sur des copies différentes.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **ré-daction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).
Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- L'usage des **calculatrices est autorisé.**

I. FORMULAIRE

Développements limités : Dans chacune des égalités suivantes, ϵ_i représente une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Le signe \simeq indique que si x tend vers 0, on peut approximer l'expression à gauche du \simeq par celle à droite du \simeq .

- $\cos x = 1 + x\epsilon_1(x) \simeq 1$
- $\sin x = x + x\epsilon_2(x) \simeq x$
- $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + x\epsilon_3(x) \simeq 1 + \alpha x$
- $\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x\epsilon_4(x) \simeq 1 + x$

Exemple : si $a \gg b$, alors $\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1-b/a}$, avec $b/a \ll 1$ et donc on peut utiliser la formule approchée $\frac{1}{a} \times \frac{1}{1-b/a} \simeq \frac{1}{a} \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right) \right]$

II. PRESSION DE RADIATION

Remarque : Bien qu'il soit conseillé de traiter le problème dans l'ordre, les dernières questions de la partie C peuvent en grande partie être traitées même si le reste du problème n'a pas été abordé en admettant l'expression de la force proposée par l'énoncé.

Dans ce problème, on étudie un moyen « gratuit » (en carburant) de propulsion spatiale : l'utilisation de la pression de radiation lors de la réflexion de la lumière sur un miroir. Il s'agit d'utiliser la force créée lors de la réflexion des photons sur un miroir afin de mettre en mouvement des objets.

On notera S la surface de la « voile solaire » considérée. Elle est supposée parfaitement réfléchissante, c'est-à-dire que la voile solaire est un miroir parfait.

Dans une première partie, on étudiera le cas où la voile est immobile dans un référentiel galiléen et où la lumière est en incidence normale. Dans la deuxième partie, on étudiera le cas où l'angle d'incidence est non nul. Finalement dans la troisième partie, on tiendra compte du mouvement du miroir.

On notera λ la longueur d'onde de la lumière incidente et ν sa fréquence.

h représente la constante de Planck et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite. On admet les relations de Planck-Einstein :

- l'impulsion (quantité de mouvement) d'un photon est $\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{u}$ où λ est la longueur d'onde de la lumière correspondant au photon et \vec{u} est un vecteur unitaire selon la lumière incidente;
- l'énergie d'un photon est $E = h\nu$ où ν est la fréquence de l'onde lumineuse.

Données numériques :

grandeur	symbole	valeur
flux solaire au niveau de l'orbite terrestre	Φ	1,3608 kW/m ²
constante gravitationnelle	\mathcal{G}	$6,67384 \times 10^{-11} \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
masse du soleil	M_S	$1,9891 \times 10^{30} \text{ kg}$
distance moyenne Terre-soleil	d_{TS}	1 u.a. = $149,60 \times 10^9 \text{ m}$
vitesse de la lumière dans le vide	c	299 792 458 m/s

A. Cas de l'incidence normale

Dans cette partie, on considère que la lumière arrive sur le miroir en incidence normale, c'est-à-dire que la surface du miroir est orthogonale à la direction de propagation. Le miroir étant immobile dans le référentiel de l'étoile considéré comme galiléen, on ne considère pas de changement de longueur d'onde lors de la réflexion.

On notera \vec{e}_x le vecteur unitaire dirigée selon la lumière incidente.

- Q1 1. Le flux solaire Φ est la puissance surfacique provenant du soleil lorsque la surface considérée est orthogonale à la direction de propagation de la lumière. En déduire la puissance P arrivant sur le miroir, puis l'énergie correspondant pendant un court intervalle de temps dt .
- Q2 2. Compte tenu des questions précédentes, déterminer le nombre de photons δN frappant le miroir entre t et $t + dt$.

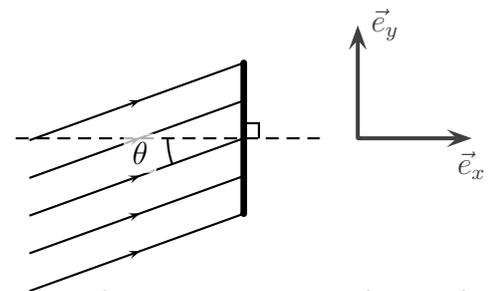
- Q3 3. On considère le système fermé {les photons qui vont frapper le miroir entre t et $t + dt$ }. Calculer la variation de quantité de mouvement du système entre t et $t + dt$: $\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t)$. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = -2 \frac{\Phi S dt}{c} \vec{e}_x$$

- Q4 4. En déduire la force exercée par le miroir sur le système, puis celle exercée par les photons sur le miroir.
- Q5 5. Exprimer alors la pression correspondante p_r , appelée pression de radiation, en fonction de Φ et de c .
- Q6 6. Vérifier explicitement l'homogénéité du résultat obtenu à la question précédente.
- Q7 7. Application numérique : au niveau de l'orbite terrestre, on considère une voile de surface $S = 100,0 \text{ m}^2$. Calculer la force due à la pression de radiation. Comparer avec la force exercée par le soleil sur un objet de $20,00 \text{ kg}$ (toujours au niveau de l'orbite terrestre). Commenter¹.
- Q8 8. Peut-on utiliser ce mode de propulsion pour se rapprocher du soleil?

B. Cas de l'incidence oblique

On étudie maintenant le cas où la lumière incidente fait un angle θ avec la normale au miroir. Compte tenu de la distance au soleil et des angles mis en jeu, on considèrera que la lumière arrive sur le miroir sous la forme d'un faisceau de rayons parallèles.



- Q9 1. Le flux solaire Φ étant défini par rapport à une surface normale aux rayons incidents, déterminer la nouvelle puissance arrivant sur la voile solaire $P(\theta)$ en fonction de θ , S et Φ (un schéma indiquant clairement les surfaces en jeu est vivement recommandé). En déduire l'énergie δE arrivant pendant un intervalle de temps dt .
- Q10 2. Étudier la variation de quantité de mouvement $\vec{p}_0(t + dt) - \vec{p}_0(t)$ pour un seul photon lors du choc. On exprimera le résultat en fonction des vecteurs \vec{e}_x et \vec{e}_y . En déduire la variation de quantité de mouvement du système fermé {les photons qui vont frapper le miroir entre t et $t + dt$ } : $\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t)$.
- Q11 3. Montrer que la pression exercée dans ce cas sur le miroir est $p_r = 2 \frac{\Phi}{c} \cos^2 \theta$.

C. Prise en compte du mouvement de la voile

Intuitivement, on peut se douter que si la fréquence de la lumière ne varie pas lors de la réflexion, alors l'énergie mécanique totale du système { photons + miroir } pourrait augmenter sans raison. Dans cette question, on souhaite modéliser plus précisément la force lorsque le miroir est en mouvement. Toutefois, pour plus de simplicité et pour ne pas avoir à considérer des effets relativistes, le raisonnement sera mené sur un cas classique où les photons seront remplacés par des balles de tennis utilisées par notre héros préféré.

1. Remarque : le flux solaire décroît en $1/r^2$ à cause de la conservation de l'énergie, la force gravitationnelle est elle aussi en $1/r^2$, donc le rapport entre ces deux forces est en fait indépendant de la distance au soleil.

Gaston souhaite vous faire étudier un nouveau mode de propulsion pour sa voiture de masse M : il projette des balles de tennis de masse m_t contre sa voiture à une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. On négligera les mouvements selon les autres directions que \vec{e}_x , en particulier on ne tiendra pas compte de la gravité.

On notera n^* le nombre de balle de tennis par unité de volume, supposé constant et connu. On notera $\vec{v}(t) = v_x(t) \vec{e}_x = \dot{x} \vec{e}_x$ la vitesse de la voiture. On notera S la surface (verticale) de la voiture contre laquelle cogne les balles de tennis.

On travaillera parfois dans le référentiel terrestre (galiléen), noté \mathcal{R}_T , et parfois dans le référentiel lié à la voiture et en translation par rapport à \mathcal{R}_T , noté \mathcal{R}_V (non galiléen a priori). Les vitesses précédemment définies le sont par rapport au référentiel \mathcal{R}_T .

On donne la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{v}(M/\mathcal{R}_V) + \vec{v}(t)$$

Ainsi pour obtenir la vitesse d'un objet par rapport à \mathcal{R}_T , il faut ajouter \vec{v} à la vitesse de cet objet par rapport à \mathcal{R}_V et réciproquement, pour obtenir la vitesse d'un objet par rapport à \mathcal{R}_V , il faut soustraire \vec{v} à la vitesse de cet objet par rapport à \mathcal{R}_T .

- Q12 1. Intuitivement, quelle est la vitesse maximale v_m à laquelle Gaston pourra amener sa voiture ? Justifier brièvement.

Dans les questions suivantes, on fera l'hypothèse que $v_x \leq v_m$.

- Q13 2. On se place dans le référentiel lié à la voiture \mathcal{R}_V . Quelle est la vitesse $\vec{v}'_0 = v'_0 \vec{e}_x$ des balles de tennis dans ce référentiel ?

- Q14 3. En déduire le nombre de balles de tennis frappant la voiture entre t et $t + dt$ en fonction de v'_0 , puis en fonction de v_0 et v_x .

4. On considère que les balles rebondissent en repartant à la vitesse $-v'_0 \vec{e}_x$ dans le référentiel de la voiture (ce qui revient à supposer que la masse de la voiture est bien supérieure à celle d'une balle de tennis). En déduire que la vitesse $\vec{v}''_0 = v''_0 \vec{e}_x$ des balles après leur rebond,

- Q15 dans le référentiel terrestre vaut

$$\vec{v}''_0 = 2\vec{v} - \vec{v}_0$$

- Q16 5. En utilisant les questions précédentes, déterminer la variation de quantité de mouvement dans le référentiel terrestre entre t et $t + dt$ du système fermé $\mathcal{S} = \{\text{les balles qui vont frapper la voiture entre } t \text{ et } t + dt\}$.

- Q17 6. Montrer alors que la force exercée **par** les balles de tennis **sur la voiture** s'exprime

$$\vec{F}_{t \rightarrow v} = 2n^* S m_t (v_0 - v_x)^2 \vec{e}_x$$

- Q18 7. Vérifier l'homogénéité de la formule précédente.

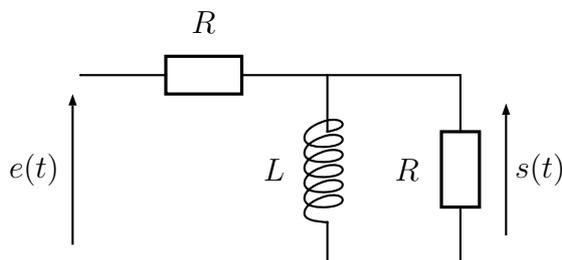
- Q19 8. En déduire l'équation du mouvement sur v_x vérifiée par la voiture de masse M .

- Q20 9. L'équation précédente étant non linéaire, une résolution analytique n'est pas facile. Proposer une résolution numérique de l'équation différentielle précédente sur l'intervalle $[0, t_f]$ avec comme condition initiale $v_x(t = 0) = 0$ (on supposera que les valeurs numériques de M, n^*, S, m_t, v_0 ont été définie avant dans le programme). On pourra importer la fonction `odeint` du module `scipy.integrate`.

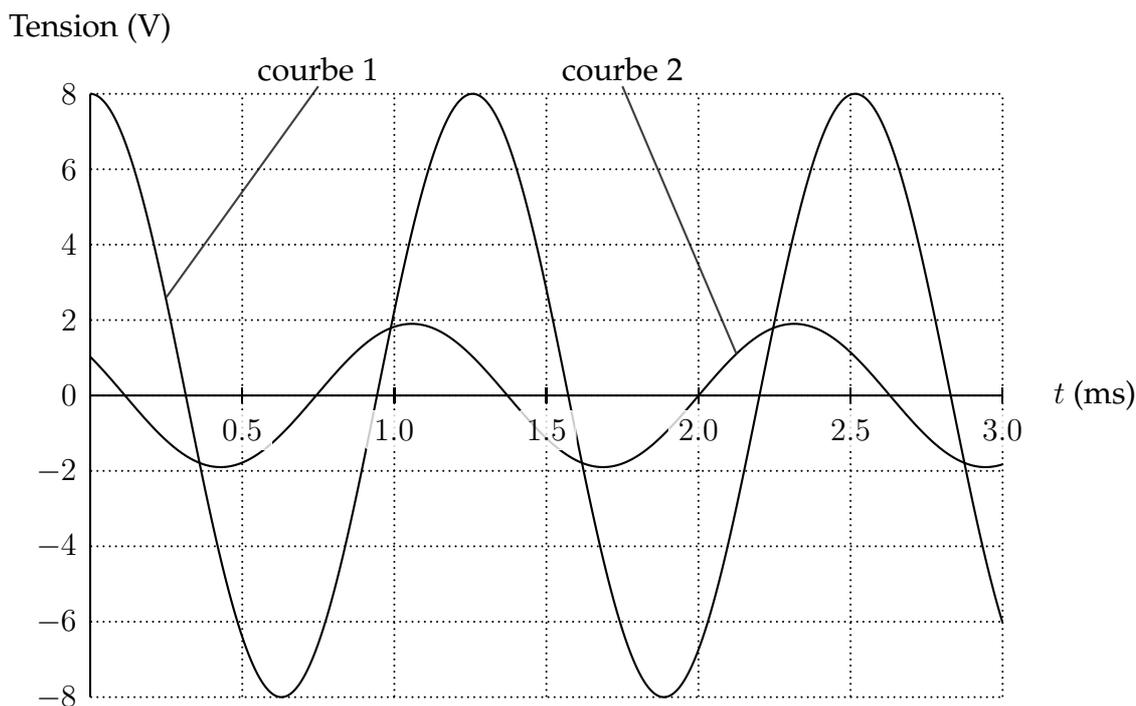
Si l'équation différentielle n'a pas été trouvée, on pourra l'écrire sous la forme $\frac{dv_x}{dt} = f(v_x)$ pour écrire le code.

III. DÉTERMINATION GRAPHIQUE D'UNE INDUCTANCE

On considère le circuit suivant alimenté par une entrée de pulsation ω (ou de fréquence f) telle que $e(t) = e_m \cos \omega t$. La résistance R vaut $4,0 \text{ k}\Omega$.



- Q21 1. Représenter les branchements de l'oscilloscope permettant les mesures de $e(t)$ et de $s(t)$.
- Q22 2. En utilisant la notation complexe, exprimer \underline{s} en fonction de \underline{e} , R , L et ω .
- Q23 3. Montrer que l'on peut écrire $\underline{s} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - j\frac{1}{x}} \underline{e}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$. Préciser les expressions de ω_0 et f_0 en fonction de R et L .
4. Le graphe des tensions $e(t)$ et $s(t) = s_m \cos(\omega t + \varphi)$ est le suivant :



- Q24 (a) Affecter les courbes à leur tension correspondante. Justifier.
- Q25 (b) Déterminer graphiquement f , e_m , s_m en expliquant votre démarche.
- Q26 (c) D'après le graphique, la courbe $s(t)$ est-elle en avance ou en retard sur $e(t)$? Déterminer graphiquement φ en précisant son unité et en commentant son signe. Expliquer votre méthode.
- Q27 5. Dédire des valeurs de e_m et de s_m la valeur de x pour la courbe ci-dessus. En déduire la valeur de L .

- Q28 6. À partir de l'expression de \underline{s} de la question 3 et de la valeur de x trouvée à la question précédente, calculer la valeur théorique φ_{th} du déphasage de s par rapport à e . Comparer avec la valeur mesurée sur le graphique, est-ce cohérent ?
- Q29 7. (a) Sans utiliser les notations du régime sinusoïdal forcé, établir l'équation différentielle reliant $s(t)$ et $e(t)$.
- Q30 (b) Montrer que l'équation différentielle ainsi obtenue est compatible avec le résultat de la question 3.

IV. SATURNE, SES ANNEAUX, SON SATELLITE TITAN

Ce problème propose l'étude de quelques aspects de la physique, de l'observation et de l'exploration de Saturne. Les différentes parties et les sous-sections qui les constituent sont en grande partie indépendantes. Les figures utiles à la compréhension du problème sont incluses dans le corps du texte, les figures à compléter sont regroupées sur une même page (paginée 11/11) à détacher et à rendre avec la copie. Les quelques calculs numériques d'ordre de grandeur proposés sont faisables sans machine.

1 Première partie : observation des anneaux de Saturne

Un astronome pointe sa lunette vers Saturne dans le ciel nocturne dégagé : on assimile cette planète à une source de lumière très éloignée, notée A_∞ , et une portion de l'anneau le plus brillant à une autre source notée B_∞ (cf. figure 1). Ces deux sources sont séparées par une zone sombre. La lunette reçoit de chacune de ces deux sources des faisceaux de rayons parallèles, l'axe de la lunette étant parallèle à ceux venant de A_∞ . Le rayon de l'anneau est de l'ordre de $R_A = 10^8$ m, la distance entre la Terre et Saturne est de l'ordre de $D = 1,5 \cdot 10^{12}$ m. On note α l'angle entre les deux directions.

La lunette forme un système **afocal**, c'est-à-dire qu'il ne possède pas de foyer : deux rayons incidents parallèles émergent parallèlement du système optique. Elle est constituée de deux lentilles minces : la première, l'objectif, a pour centre O_1 et pour vergence $V_1 = 1/f'_1 = +1,0 \delta$; la seconde, l'oculaire, a pour centre O_2 et pour vergence $V_2 = 1/f'_2 = -5,0 \delta$; elles sont écartées de $\overline{O_1O_2} = +0,80$ m.

La figure 1, complétée, sera rendue avec la copie : l'échelle sur l'axe est 1/10 et l'angle α est volontairement exagéré. Les conditions de Gauss sont supposées vérifiées.

- Q31 1. Calculer numériquement l'angle α .
- Q32 2. Construire l'image A_1B_1 de $A_\infty B_\infty$ par l'objectif. Est-ce une image réelle ou virtuelle? Sera-t-elle considérée comme un objet réel ou virtuel pour l'oculaire?
- Q33 3. Tracer des rayons émergents issus de A_1 et B_1 après traversée de l'oculaire. Expliquer pourquoi cette lunette est bien afocale.
4. On note α' l'angle entre la direction des faisceaux de rayons émergents issus de A_∞ et celle des rayons émergents issus de B_∞ . On appelle grossissement le rapport $G = \alpha'/\alpha$. Exprimer la valeur absolue de G en fonction de f'_1 et f'_2 et la calculer numériquement.
- Q34
- Q35 5. L'œil, sans instrument d'optique, ne peut distinguer deux rayons que si l'angle qui les sépare est supérieur ou égal à $\alpha_0 = 1,0 \cdot 10^{-4}$ rad (c'est le pouvoir séparateur de l'œil). Vérifier que l'utilisation de la lunette est indispensable pour distinguer les anneaux de Saturne.
6. Une caméra numérique remplace l'œil derrière l'oculaire : elle est constituée par une lentille convergente de vergence $V_3 = +50 \delta$ (remplaçant le cristallin) et une plaque tapissée de cellules photosensibles en nid d'abeille distantes de $1 \mu\text{m}$ (remplaçant les cellules de la rétine) placée dans le plan focal de la lentille.
- Sur la figure 2, on a noirci les cellules recevant de la lumière venant de la planète Saturne elle-même (où il apparaît qu'elle n'est pas réellement ponctuelle car son image occupe plusieurs pixels); noircir les cellules qui recevront de la lumière venant de l'anneau (on suppose qu'il est vu de face et de faible largeur).
- Q36 En déduire pourquoi on peut effectivement reconnaître la forme d'un anneau.

2 Deuxième partie : étude dynamique des anneaux de Saturne

La planète Saturne est assimilée à un corps à répartition sphérique de masses, de centre O_S , de masse $m_S = 6 \cdot 10^{26}$ kg, de rayon R_S . On suppose que le référentiel saturnien \mathcal{R}_s , de point fixe O_S et en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique, est galiléen.

On note \mathcal{G} la constante de gravitation.

A. Les anneaux de Saturne ne sont pas des solides

Supposons qu'un anneau soit un agglomérat solide de corps (rochers, cailloux, blocs de glace), en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de Saturne.

On isole deux de ces corps formant un doublet $\delta = \{M_1; M_2\}$, de faible taille à l'échelle astronomique, de centre d'inertie G , de même masse m , à la distance $2a$ l'un de l'autre ; on suppose, en outre, que :

- O , M_1 et M_2 restent alignés en permanence ;
- on pose $\vec{u}_r = \frac{\vec{OG}}{OG}$, $\vec{OG} = r \cdot \vec{u}_r$, $\theta = \omega t$, et on définit le repère cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$;
- il vient $\vec{OM}_1 = (r - a)\vec{u}_r$; $\vec{OM}_2 = (r + a)\vec{u}_r$ et on considère $a \ll r$.
- le référentiel $\mathcal{R}_{sd} = (O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est appelé référentiel saturno-doublet : c'est un référentiel non galiléen en rotation uniforme par rapport au référentiel saturnien, à la vitesse angulaire ω et dans lequel O , G , M_1 et M_2 sont immobiles.

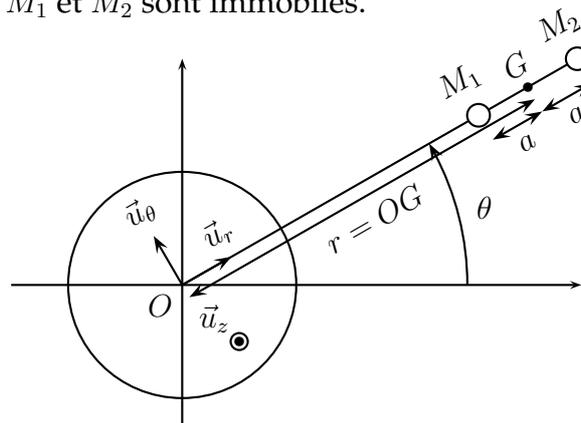


FIGURE 1 – Saturne et le doublet

On néglige l'influence de tous les autres corps de l'anneau sur le système δ .

- Q37 1. En écrivant dans \mathcal{R}_s galiléen le théorème de la résultante cinétique (théorème du centre d'inertie) sur le doublet δ , établir l'identité suivante :

$$\frac{\mathcal{G}m_s}{r^2} = \omega^2 r$$

- Q38 2. Déterminer dans le référentiel \mathcal{R}_s galiléen les accélérations de M_1 et M_2 en fonction de r , a , ω et des vecteurs de bases.

On admet pour la suite que l'on peut utiliser le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen pour un point M en ajoutant une force appelée force d'inertie entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(M)$ où $\vec{a}(M)$ est l'accélération de M par rapport à \mathcal{R}_s et m sa masse.

- Q39 3. Faire l'inventaire des trois **forces subies par M_1 dans \mathcal{R}_{sd} non galiléen**. Représenter les sur une figure et montrer que leur somme vectorielle peut s'écrire $\sum \vec{f} = f(a,r) \cdot \vec{u}_r$. On donnera l'expression de $f(a,r)$ comme une fonction des variables a et r et des paramètres \mathcal{G} , m et M .
- Q40 4. Montrer, en effectuant un développement limité au premier ordre en $\frac{a}{r} \ll 1$ que cette fonction $f(a,r)$ a pour valeur approchée :

$$f(a,r) \simeq \frac{\mathcal{G}m^2}{4a^2} - \frac{3\mathcal{G}mm_s a}{r^3}$$

5. Il y aura dislocation progressive de l'anneau si la résultante des forces a tendance à éloigner M_2 de M_1 , donc si $f(a,r) < 0$.
Montrer que cette condition se traduit par l'existence d'une valeur minimale r_0 de r (on l'appelle **limite de Roche**) ne dépendant que de m_s et de $\mu = \frac{m}{a^3}$. On donne $\mu = 720 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
Déduire de ce qui précède un ordre de grandeur de r_0 .
Conclure en considérant que les anneaux ont un rayon de l'ordre de 10^8 m .
- Q41

B. Divisions des anneaux

Dans ce qui suit, on assimile tous les corps autour de Saturne à des petits et moyens blocs solides indépendants en orbite circulaire et on néglige toutes les forces d'interaction entre eux devant l'attraction gravitationnelle de la planète.

Les anneaux sont divisés : la première division fut observée par Cassini qui détecta le premier une bande circulaire vide de blocs, et découpant ainsi "l'anneau" en deux anneaux distincts (cette division est encore appelée division Cassini). On en a détecté un très grand nombre depuis.

On s'intéresse ici à la division observée sur le rayon orbital d'un petit satellite sphérique, Pan, de centre P , de rayon R_P , et de rayon orbital $r_P = OP$ (figure ci-dessous).

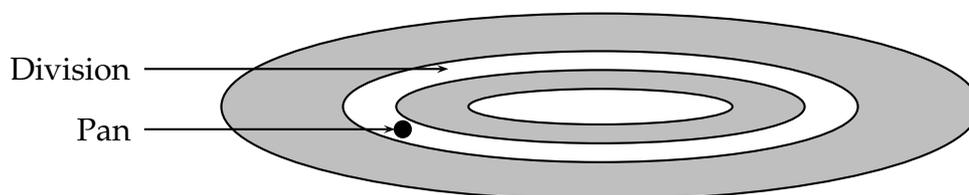


FIGURE 2 – Division de Cassini

Le référentiel saturno-Pan \mathcal{R}_{SP} est en rotation uniforme autour du référentiel saturnien, suivant du mouvement de Pan, dans lequel O et P restent fixes.

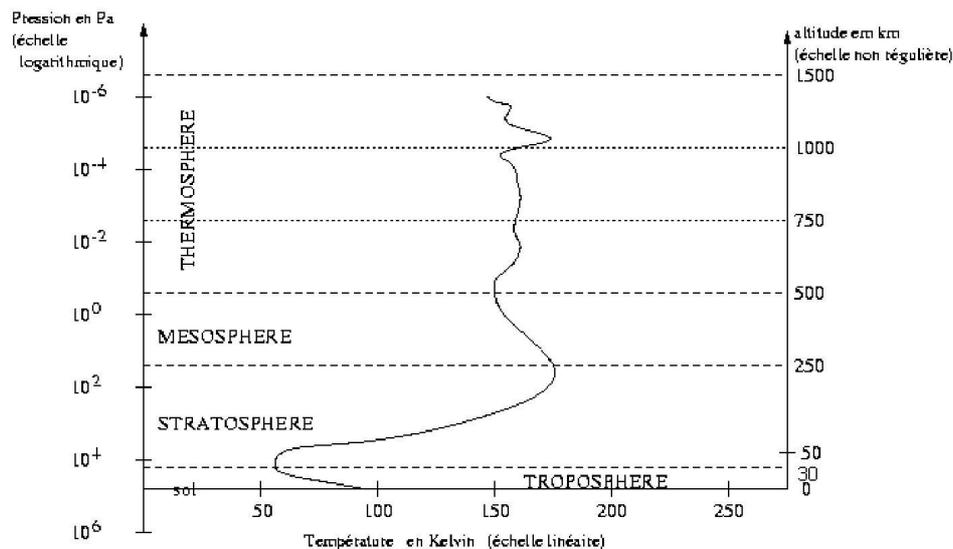
On considère deux petits rochers A et B encore présents dans cette bande et tournant dans le même sens (cf. figure 3 en annexe).

A est en orbite circulaire de rayon r_A légèrement inférieur à r_P , B est en orbite circulaire de rayon r_B légèrement supérieur à r_P .

- Q42 1. Montrer que plus le rayon de l'orbite circulaire d'un corps satellisé autour de Saturne est grand, plus sa vitesse le long de son orbite est faible.
- Q43 2. Tracer, sur la figure de gauche de l'annexe, dans le référentiel saturnien, l'allure des vecteurs vitesses des centres des trois corps (l'échelle est arbitraire).
3. En déduire, en utilisant la loi de composition des vitesses (donnée dans le problème II. C.), l'allure des vecteurs vitesses de A et de B dans le référentiel \mathcal{R}_{SP} . Les tracer sur la figure de droite de l'annexe.
- Q44
- Q45 4. En déduire pourquoi A et B ne pourront rester sur leur orbite, et pourquoi on dit que Pan "nettoie" la bande décrite par sa trajectoire.

3 Troisième partie : l'atmosphère de Titan

Saturne possède un satellite remarquable, Titan, sur lequel la sonde Huygens, véhiculée par la capsule spatiale Cassini, s'est posée avec succès le 14 janvier 2005. Les capteurs embarqués ont permis d'enregistrer les variations de la pression et de la température en fonction de l'altitude. La figure suivante donne sur l'axe de gauche la pression de l'atmosphère en pascals, en échelle logarithmique, sur l'axe de droite l'altitude correspondante en km, en échelle non régulière, et sur l'axe horizontal la température en Kelvin en échelle linéaire. La courbe tracée permet donc de suivre l'évolution de la température en fonction de l'altitude ou de la pression.



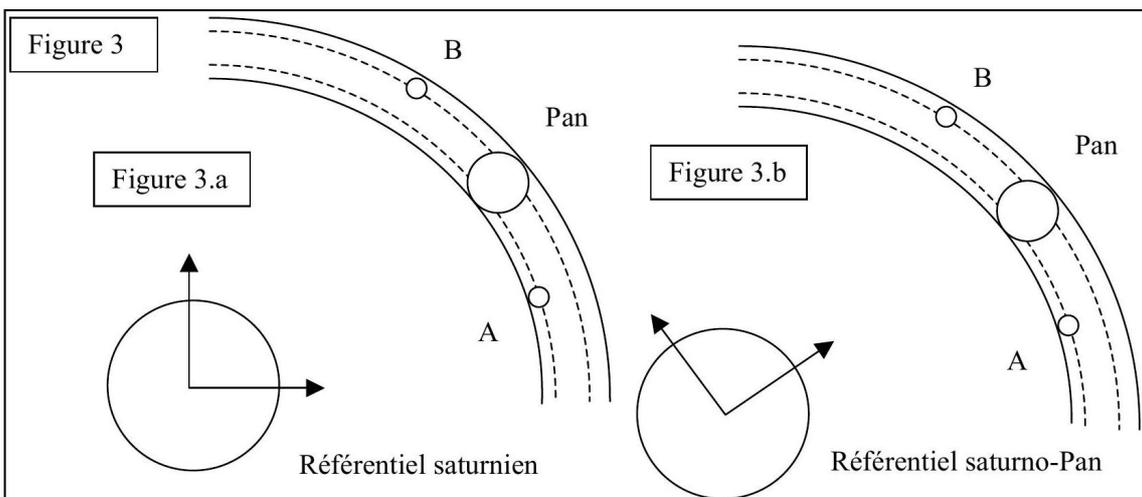
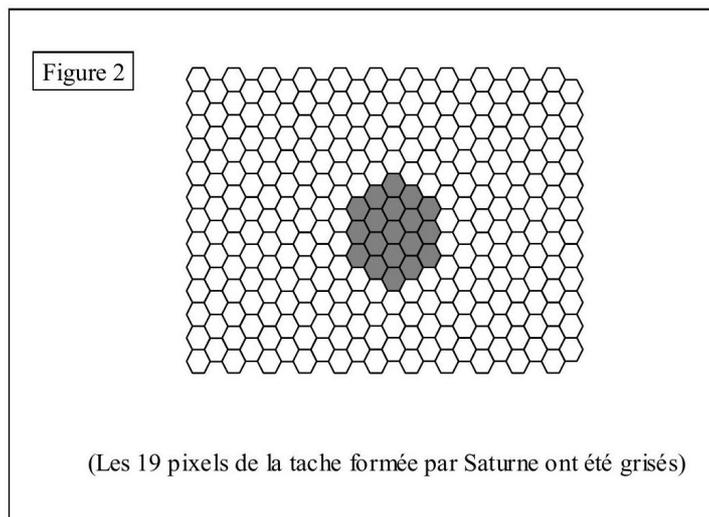
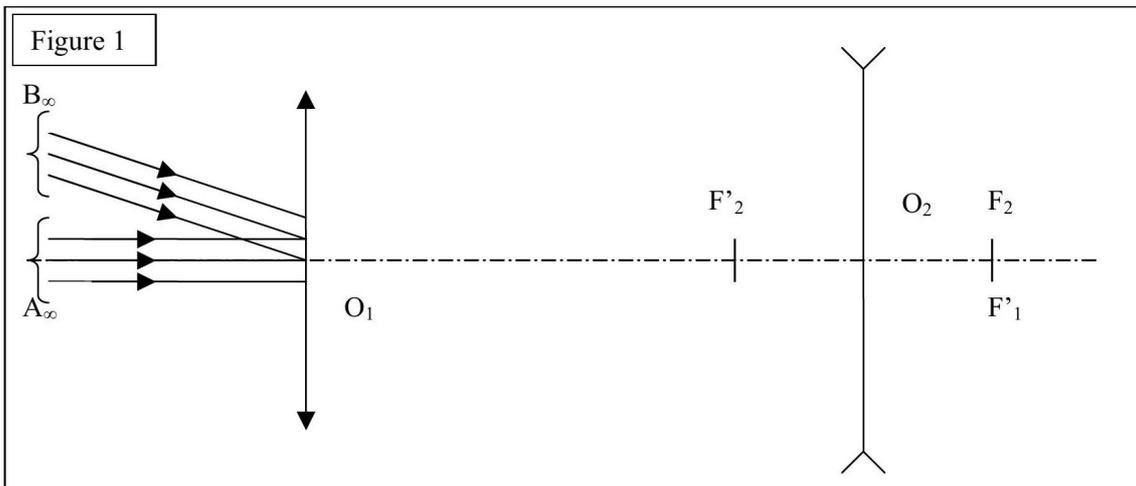
On admettra que dans l'atmosphère, l'accélération de la pesanteur de Titan garde une valeur constante $g_T = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On note $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits. On note $\mu(z)$ la masse volumique du gaz et $P(z)$ sa pression à l'altitude z .

- Q46 1. On assimile la mésosphère et la thermosphère à un gaz parfait en évolution isotherme à T_0 de masse molaire M . En écrivant l'équation d'état des gaz parfaits et la loi de la statique des fluides, établir l'équation différentielle vérifiée par $P(z)$.
- Q47 2. Résoudre cette équation sans chercher à déterminer la constante d'intégration et en déduire si le modèle adopté est conforme avec les données de la figure.

Annexe rendre avec votre copie ; compléter le nom avant de remplir quoique ce soit.

Nom :

Prénom :



I. PRESSION DE RADIATION

Attention au nombre de chiffres significatifs dans les applications numériques : l'énoncé donnait ici les valeurs avec en général un grand nombre de chiffres.

A. Cas de l'incidence normale

- Q1 1. $P = \Phi \times S$ par définition puisque le miroir est orthogonal à la direction de propagation. D'où $\delta E = P dt = \Phi S dt$.
- Q2 2. Compte tenu des questions précédentes, l'énergie arrivant sur le miroir entre t et $t + \delta$ peut s'exprimer sous la forme $\delta N \times h\nu$ ou $\Phi S dt$. On en déduit que $\delta N = \frac{\Phi S dt}{h\nu}$.

L'énoncé vous aidait en disant "à l'aide des questions précédentes" : cela vous indiquait qu'elles étaient utiles. Ainsi il n'était pas pertinent de faire un raisonnement sur un cylindre de longueur $c dt$ et en utilisant une densité particulière qui n'était ici pas un paramètre de l'énoncé.

- Q3 3. On considère le système fermé { les photons qui vont frapper le miroir entre t et $t + dt$ }. Lorsqu'un photon est réfléchi, sa variation de quantité de mouvement est $\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \frac{h}{\lambda}(-\vec{e}_x) - \frac{h}{\lambda}\vec{e}_x = -2\frac{h}{\lambda}\vec{e}_x$.

$$\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = \delta N \times \left(-2\frac{h}{\lambda}\vec{e}_x\right) = -2\frac{\Phi S dt}{h\nu} \frac{h}{\lambda}\vec{e}_x = \boxed{-2\frac{\Phi S dt}{c}\vec{e}_x}$$

Vous avez été trop nombreux à vouloir utiliser $\vec{p} = m\vec{v}$, c'est vrai en mécanique classique, mais cela ne l'est plus en relativité (c.f. approche documentaire). En particulier, vous l'avez dit question 1, pour un photon $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. Au passage, un photon est une particule de masse nulle.

4. D'après la question précédente

$$\frac{\vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t)}{dt} = \boxed{-2\frac{\Phi S}{c}\vec{e}_x} \text{ soit en prenant la limite lorsque } dt \rightarrow 0 : \frac{d\vec{P}}{dt} = -2\frac{\Phi S}{c}\vec{e}_x$$

- Q4 Le référentiel de l'étoile étant galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique au système fermé défini précédemment :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{miroir \rightarrow photons} \Leftrightarrow -2\frac{\Phi S}{c}\vec{e}_x = \vec{F}_{miroir \rightarrow photons}$$

d'où d'après la troisième loi de Newton $\boxed{\vec{F}_{photons \rightarrow miroir} = 2\frac{\Phi S}{c}\vec{e}_x}$.

- Q5 5. La pression correspondante, est telle que $\vec{F}_{photons \rightarrow miroir} = p_r S \vec{e}_x$, soit $\boxed{p_r = 2\frac{\Phi}{c}}$.
- Q6 6. Dimensionnellement une pression peut être vue comme une force surfacique ou une énergie volumique. Ici nous allons utiliser énergie volumique

$\left[\frac{\Phi}{c}\right] = \frac{[P]L^{-2}}{L.T^{-1}} = \frac{[E]T^{-1}L^{-2}}{L.T^{-1}} = [E]L^{-3}$ On a donc une énergie volumique des deux cotés du signe égal, la formule est homogène.

Pensez à conclure pour vos analyses dimensionnelles. Dites que la formule est homogène (si elle l'est).

Q7 7. Application numérique :

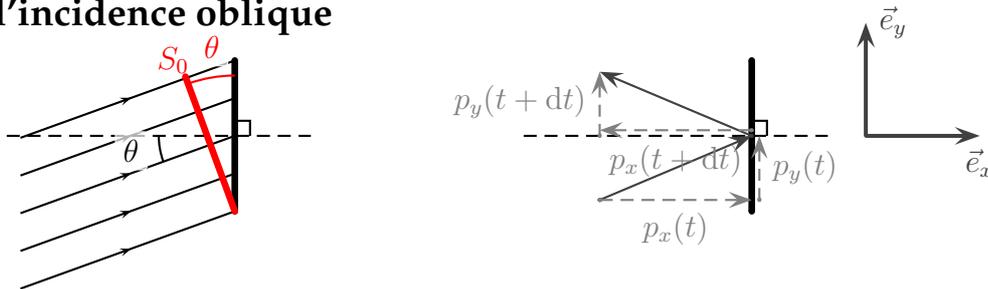
On trouve $F_{grav} = 0,1186 \text{ N}$ et $F_{rad} = 9,078 \times 10^{-4} \text{ N}$ soit 130,7 fois plus petite. (4 chiffres significatifs comme la masse ou la surface).

Ainsi, pour pouvoir utiliser la pression de radiation, il faut donc des surfaces de voile gigantesques, mais très légères. L'énergie est « gratuite », mais très très faible.

Q8 8. On ne peut pas directement utiliser ce mode de propulsion pour se rapprocher du soleil directement car la force exercée est telle que « les photons repoussent la voile », ce même si l'incidence n'est pas normale comme ce sera vu dans la partie suivante. Les photons étant émis par le soleil et se propageant en ligne droite, ils ont tendance à éloigner la voile du soleil.

On peut malgré tout envisager de se rapprocher du soleil par des moyens détournés : utiliser la pression de radiation pour se rapprocher d'une planète massive puis utiliser le principe de la fronde gravitationnelle pour se rapprocher du soleil (en « rentrant » la voile après passage à proximité de la planète). Ou plus simplement, si on a initialement une orbite circulaire en mettant la voile avec un angle pour freiner et donc diminuer son énergie mécanique (on utilise alors voile+gravité).

B. Cas de l'incidence oblique



Q9 1. La surface S_0 sur le schéma reçoit le même nombre de photon que S , et est orthogonale à la lumière incidente. Ainsi, la puissance arrivant sur S est $P(\theta) = \Phi S_0 = \Phi S \cos \theta$. On en déduit $\delta E = \Phi S dt \cos \theta$

Il faut justifier, le schéma est nécessaire mais non suffisant (certains ont fait le même schéma ou presque que celui du corrigé, mais en on déduit, sans justification, que $P = \Phi S \tan \theta$ ou $1/\sin(\theta)$ ou $\sin(\theta)$).

2. Lors du choc d'un photon, la composante selon y de \vec{p} est conservée et celle selon x change de sens (loi de la réflexion pour la lumière, voir schéma ci-dessus à droite).

$$\text{Ainsi } \vec{p}_0(t+dt) - \vec{p}_0(t) = (p_x(t+dt) - p_x(t))\vec{e}_x + 0\vec{e}_y = -2p_0 \cos \theta \vec{e}_x$$

$$\text{D'où } \vec{p}_0(t+dt) - \vec{p}_0(t) = -2\frac{h}{\lambda} \cos \theta \vec{e}_x$$

On en déduit que la variation de quantité de mouvement du système fermé { les photons qui vont frapper le miroir entre t et $t+dt$ } est $\vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = \delta N \times (\vec{p}_0(t+dt) - \vec{p}_0(t)) = \frac{\Phi S dt \cos \theta}{h\nu} \times (-2\frac{h}{\lambda} \cos \theta \vec{e}_x)$. Soit en simplifiant $\vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = -2\frac{\Phi S dt \cos^2 \theta}{c} \times \vec{e}_x$.

Q10

3. Ainsi, en utilisant le principe fondamental de la dynamique pour le système fermé défini par l'énoncé dans le référentiel galiléen lié à l'étoile :

$\frac{dP}{dt} = \vec{F}_{miroir \rightarrow photons} = -2\frac{\Phi S \cos^2 \theta}{c} \times \vec{e}_x$. D'où en utilisant la troisième loi de Newton comme précédemment $\vec{F}_{photons \rightarrow miroir} = 2\frac{\Phi S dt \cos^2 \theta}{c} \times \vec{e}_x$ et par définition de la pression :

Q11 $\vec{F}_{\text{photons} \rightarrow \text{miroir}} = p_r S \vec{e}_x$ d'où en projetant selon \vec{e}_x la pression exercée dans ce cas sur le miroir est $p_r = \frac{2\Phi}{c} \cos^2 \theta$

C. Prise en compte du mouvement de la voile

1. Lorsque Gaston envoie des balles, il faut que celles-ci aillent plus vite que la voiture pour pouvoir entrer en collision avec celle-ci. Autrement dit, si $v_x > v_0$, aucune balle n'atteindra la voiture et donc aucune force ne pourra être exercée. On s'attend donc à ce que la vitesse maximale accessible soit v_0 .

Remarque : le résultat serait très différent si Gaston était **dans la voiture** et jetait les balles en arrière à $-v_0 \vec{e}_x$ par rapport à la voiture. La vitesse pourrait alors augmenter "sans limite" (enfin, tant qu'il y a des balles ...). Il est donc faut de dire "les balles vont à v_0 donc par conservation de l'énergie, c'est v_0 la vitesse max" ou ce genre de raisonnement.

2. On utilise la relation donnée par l'énoncée : $\vec{v}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{v}(M/\mathcal{R}_V) + \vec{v}(t)$ soit en projetant selon \vec{e}_x : $v_0 = v'_0 + v_x$ d'où $v'_0 = v_0 - v_x$.

3. On en déduit que les balles de tennis frappant la voiture entre t et $t + dt$ doivent être en face de S , suffisamment proches pour avoir le temps de heurter la paroi (c'est à dire à une distance inférieure à la distance parcourue pendant dt , soit $v'_0 dt$). Elles sont donc contenues dans un cylindre de volume $S \times v'_0 dt$ et sont donc au nombre de $\delta N = n^* \times S \times v'_0 dt$.

4. On utilise la relation donnée par l'énoncée : $\vec{v}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{v}(M/\mathcal{R}_V) + \vec{v}(t)$ soit : $v'_0 \vec{e}_x = -v'_0 \vec{e}_x + v_x \vec{e}_x$ et en utilisant l'expression de v'_0 trouvée précédemment $v'_0 \vec{e}_x = -(v_0 - v_x) \vec{e}_x + v_x \vec{e}_x = (2v_x - v_0) \vec{e}_x$. Soit aussi $\vec{v}''_0 = 2\vec{v} - \vec{v}_0$.

5. La variation de quantité de mouvement dans le référentiel terrestre est donc $\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = \delta N m_t (\vec{v}''_0 - \vec{v}_0) = n^* \times S \times v'_0 dt \times m_t \times (2\vec{v} - \vec{v}_0 - \vec{v}_0)$ et en utilisant l'expression de $v'_0 = v_0 - v_x$ $\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = -2n^* \times S dt \times m_t \times (v_x - v_0)^2 \vec{e}_x$.

6. Toujours de la même façon en utilisant le PFD puis la troisième loi de Newton

$$\vec{F}_{\text{tennis} \rightarrow \text{voiture}} = -\frac{d\vec{P}}{dt} = 2n^* \times S \times m_t \times (v_x - v_0)^2 \vec{e}_x.$$

Il était important de se placer dans le référentiel terrestre pour la quantité de mouvement car il est galiléen alors que celui lié à la voiture n'est a priori pas galiléen puisque la voiture accélère lentement mais sûrement à chaque choc.

7. (a) Pour le membre de gauche $[F] = \text{M.L.T}^{-2}$

(b) Pour le membre de droite : il y a une différence entre deux vitesses, ce qui ne pose pas de problème d'homogénéité. De plus :

i. $[n^*] = \text{L}^{-3}$

ii. $[S] = \text{L}^2$

iii. $[m_t] = \text{M}$

iv. $[v_x] = \text{L.T}^{-1}$

d'où le membre de droite est homogène à $\text{L}^{-3} \cdot \text{L}^2 \text{M} (\text{L.T}^{-1})^2$ soit M.L.T^{-2}

Q18 Le membre de droite et celui de gauche sont de la même dimension, la formule est donc homogène.

8. On considère le système {voiture} dans le référentiel terrestre galiléen, d'après le PFD, l'équation du mouvement est donc $M \frac{d\vec{v}}{dt} = 2n^* \times S \times m_t \times (v_x - v_0)^2 \vec{e}_x$ soit en projetant

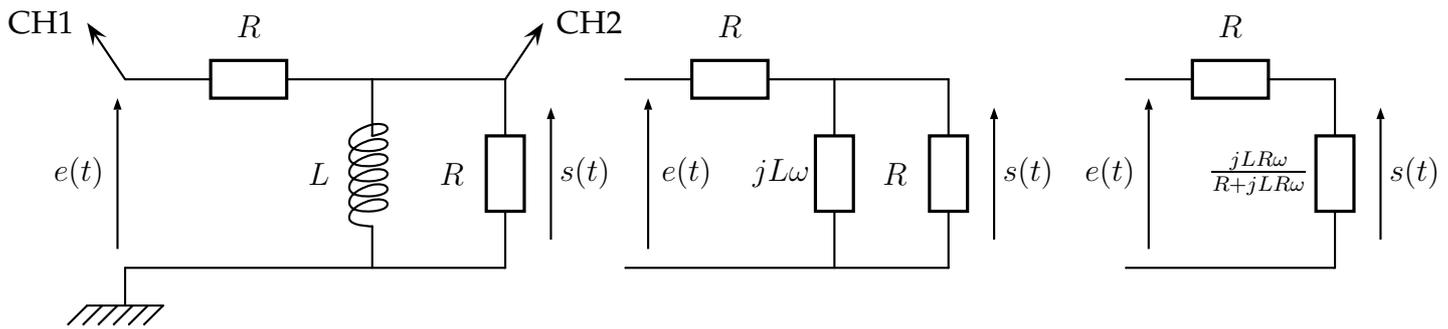
Q19 selon \vec{e}_x $M \frac{dv_x}{dt} = 2n^* \times S \times m_t \times (v_x - v_0)^2$.

Q20 9. Proposition de résolution de l'équation différentielle avec la fonction odeint :

```

1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 from scipy.integrate import odeint
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 # dvx/dt = 1/m 2n*Smt(v0 - vx)^2
5 M = n = v0 = mt = S = 1 #valeurs arbitraires
6 def Eq(Y, t):
7     return 2*n*S*mt*(v0-Y)**2/M
8 dt = 1e-3
9 t = [0+i*dt for i in range(3000)]
10 vx = odeint(Eq, 0, t)
11 plt.plot(t, vx)
    
```

II. DÉTERMINATION GRAPHIQUE D'UNE INDUCTANCE



Q21 1. Sur le schéma électrique ci-dessus à gauche, on a représenté les branchements de l'oscilloscope permettant les mesures de $e(t)$ (sur CH1) et de $s(t)$ (CH2). On utilise pour cela le symbole de la masse et la flèche.

La tension mesurée est la différence de potentiel entre la flèche et la masse.

Q22 2. En notation complexe, l'impédance de la bobine est $jL\omega$ (schéma ci-dessus au milieu). On peut alors faire un dipôle équivalent car la bobine est en parallèle avec le résistor de droite : $Z_{eq} = \frac{jLR\omega}{1+jLR\omega}$ ou $Y_{eq} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}$. On peut alors faire un pont diviseur de tension (schéma de droite) car l'impédance équivalente est en série avec le résistor du haut.

$$\underline{s} = \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}} \underline{e} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{eq}}} \underline{e} = \frac{1}{1 + RY_{eq}} \underline{e} = \frac{1}{1 + R\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}\right)} \underline{e} \quad \boxed{\underline{s} = \frac{1}{2 + \frac{R}{jL\omega}} \underline{e}}$$

3. Pour se mettre sous la forme souhaitée, il reste à factoriser le dénominateur par 2 :

$$\underline{s} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - j \frac{R}{2L\omega}} \underline{e} \quad \boxed{\underline{s} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - j \frac{1}{x}} \underline{e}}$$

Q23 On a donc par identification $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{2L\omega}{R}$ d'où $\omega_0 = \frac{R}{2L}$ et $f_0 = \frac{1}{4\pi L}$

4. (a) D'après la formule précédente, $|\underline{s}| = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} |\underline{e}| < \frac{|\underline{e}|}{2}$. On en déduit que la courbe de plus faible amplitude est $s(t)$ et que la plus grande amplitude est $e(t)$.

Q24

Ainsi $\boxed{\text{courbe 1} = e(t)}$ et $\boxed{\text{courbe 2} = s(t)}$.

Rem : on ne peut pas forcément raisonner toujours sur la phase à l'origine. En effet, si la figure est une copie d'un écran d'oscilloscope, la phase à l'origine ne vaut rien dire, alors que le déphasage lui est significatif.

(b) À la règle : 3,0 ms \leftrightarrow 11,95 cm ; 2 périodes = $2T \leftrightarrow$ 10 cm (en considérant les annulations de la courbe 1 pour être le plus précis) d'où $T = \frac{1}{2} \frac{3,0 \times 10^{-3}}{11,95} = 1,26$ ms et $\boxed{f = 797 = 8,0 \times 10^2 \text{ Hz}}$ (attention à bien reprendre tous les chiffres de la calculatrice pour faire $1/T$ et pas seulement ceux que l'on écrit sur sa copie).

Q25

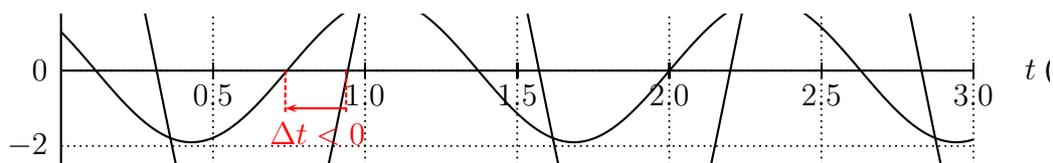
$\boxed{e_m = 8 \text{ V}}$ car on atteint pile le bord du graphique.

$\boxed{s_m = 1,9 \text{ V}}$ (2 V \leftrightarrow 1 cm et on lit 0,95 cm graphiquement pour l'amplitude)

Q26

(c) D'après le graphique, la courbe $s(t)$ est légèrement en avance sur $e(t)$ (elle peut bien entendu être vue comme beaucoup en retard, mais c'est plus naturel de prendre le plus petit décalage en valeur absolue).

Le signe de φ sera donc +.



Graphiquement, on lit le décalage de 2 par rapport à 1 (au niveau des annulations) : -8 mm. Une période correspondant à 5 cm, on en déduit $\varphi = -2\pi \frac{\Delta t}{T} = -2\pi \frac{-0,8}{5}$ (inutile de faire une conversion en ms, les facteurs au numérateur et dénominateur se compensent).

$\boxed{\varphi = 1,0 \text{ rad} = 58^\circ}$ Le signe est donc bien cohérent avec le fait d'être en avance.

N'essayez pas forcément de donner vos résultats en "multiples de π ". On n'est pas en maths et les valeurs ne tombent pas forcément "rond".

5. On a établi précédemment que :

$$|\underline{s}| = s_m = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} e_m \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{e_m}{2s_m} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \left(\frac{e_m}{2s_m}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{e_m}{2s_m}\right)^2 - 1}}$$

Q27

A.N. $\boxed{x = 0,54}$ Ainsi $\frac{f}{f_0} = x \Rightarrow f_0 = \frac{f}{x}$. Or $f_0 = \frac{1}{4\pi} \frac{R}{L}$ d'où $\frac{1}{4\pi} \frac{R}{L} = \frac{f}{x} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi} \frac{Rx}{f}$

A.N. $\boxed{L = 0,22 \text{ H}}$

6.

$$\underline{s} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - j\frac{1}{x}} \underline{e} \Rightarrow \phi_{th} = -\arg\left(1 - j\frac{1}{x}\right) = -\arctan\left(\frac{-1}{x}\right) \quad \boxed{\phi_{th} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$$

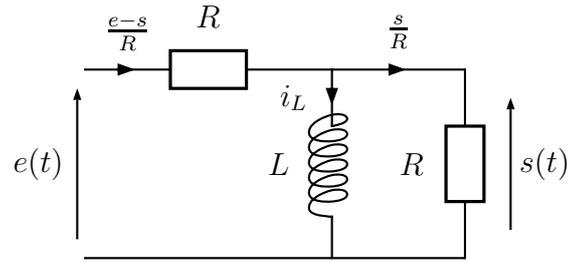
Q28

Numériquement, on trouve 1,1 rad = 62°. Ce n'est pas exactement la mesure graphique (différence d'environ 10%) mais ce n'est pas si loin compte tenu de la difficulté de mesurer précisément ϕ et x . Cela paraît donc cohérent.

7. (a) On représente le circuit pour pouvoir l'utiliser :

Avec les relations constitutives des résistors, on obtient les courants indiqués sur le schéma. Puis d'après la loi des nœuds, $i_L = \frac{e-2s}{R}$. Enfin avec la relation constitutive de la bobine $s = L \frac{di_L}{dt} = \frac{L}{R} \frac{de}{dt} - \frac{2L}{R} \frac{ds}{dt}$. Soit en présentant différemment :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{R}{2L}s = \frac{1}{2} \frac{de}{dt}$$



Q29

(b) En complexe, une dérivée équivaut à une multiplication par $j\omega$ d'où

$$j\omega s + \frac{R}{2L}s = \frac{1}{2}j\omega e \Rightarrow s = \frac{1}{2} \frac{j\omega}{j\omega + \frac{R}{2L}} e = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - j \frac{R}{2L\omega}} e$$

Q30

On retrouve bien la même expression que précédemment.

III. ÉTUDE DYNAMIQUE DES ANNEAUX DE SATURNE

"Petites Mines" 2008

1 Première partie : observation des anneaux de Saturne

Q31

1. $\alpha \simeq \tan(\alpha) = \frac{R_A}{D} \simeq 6,7 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$ *Rem : Faire un schéma et laisser en radians !*

Q32

2. $A_\infty B_\infty$ est à l'infini donc son image $A_1 B_1$ par l'objectif se trouve au foyer image F'_1 . C'est une image réelle car elle se trouve dans l'espace image réelle de l'autre côté de l'objectif (les rayons émergents se croisent réellement). Elle constitue un objet virtuel pour l'oculaire.

Q33

3. Tracé complet : à partir de B_1 , on peut par exemple tracer le rayon qui passe par O_2 et B_1 . Les rayons émergents seront parallèles à ce rayon.

La lunette est afocale car le foyer image de l'objectif est confondu avec le foyer objet de l'oculaire. Ainsi, un objet à l'infini renvoie bien une image à l'infini.

Rem : vous ne pouvez pas juste répondre « la lunette est afocale car un objet à l'infini donne une image à l'infini »...c'est certes vrai mais c'est une répétition de la définition de « afocale » et avec cela vous n'avez rien justifié !

Q34

4. Il faut faire apparaître les angles orientés α et α' sur votre schéma : $\alpha = \frac{A_1 B_1}{f'_1}$ et $\alpha' = \frac{A_1 B_1}{-f'_2}$.

D'où $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2} = 5$

Q35

5. Sans lunette, l'angle de vision est $\alpha = 6,7 \cdot 10^{-5} < \alpha_0$ et on ne distingue pas les anneaux. En revanche, avec lunette, l'angle devient $\alpha' = G\alpha = 3 \cdot 10^{-4} > \alpha_0$ et on distingue les anneaux.

Q36

6. On cherche la distance $A'' B''$ (rayon de l'anneau) après passage par la lentille L_3 de la caméra. Les rayons arrivent sous un angle α' soit $A'' B'' = f'_3 \tan \alpha' = \frac{G\alpha}{\sqrt{3}} = 6,7 \mu\text{m}$. Comme un pixel mesure $1 \mu\text{m}$, on a donc un rayon de 6 pixels soit trois pixels d'écart entre la planète et l'anneau, ce qui permet de reconnaître la forme d'un anneau.

2 Deuxième partie : étude dynamique des anneaux de Saturne

A. Les anneaux de Saturne ne sont pas des solides

1. Syst : doublet, de centre de masse G .

Q37 G est en mouvement circulaire uniforme dans \mathcal{R}_S galiléen.

Sa vitesse est $\vec{v}(G/\mathcal{R}_S) = r\omega \cdot \vec{e}_\theta$ et son accélération $\vec{a}(G/\mathcal{R}_S) = -\omega^2 r \cdot \vec{e}_r$.

On applique le théorème du centre d'inertie appliqué au { doublet δ } de masse $2m$, de centre de masse G et soumis à la force extérieure \vec{F}_{gravi} la force de gravitation exercée par Saturne.

$$2m \cdot \vec{a}(G/\mathcal{R}_S) = \vec{F}_{\text{gravi}} \Rightarrow -2m\omega^2 r \cdot \vec{e}_r = -\frac{\mathcal{G}2mM}{r^2} \cdot \vec{e}_r \Rightarrow \boxed{\frac{\mathcal{G}M}{r^2} = \omega^2 r}$$

Rem : il faut soigner la rédaction et bien préciser le système surtout quand la réponse est donnée.

Q38 2. On a des mouvement circulaire uniforme, l'accélération est en général $-r\omega^2 \vec{e}_r$. Ici, il faut adapter les notations, le "r" de M_1 avec les notations de l'énoncé est $r - a$. On a donc

$$\boxed{\vec{a}(M_1) = -(r - a)\omega^2 \vec{e}_r} \text{ et de même } \boxed{\vec{a}(M_2) = -(r + a)\omega^2 \vec{e}_r}.$$

Q39 3. Dans \mathcal{R}_{sd} non galiléen, M_1 subit les forces suivantes :

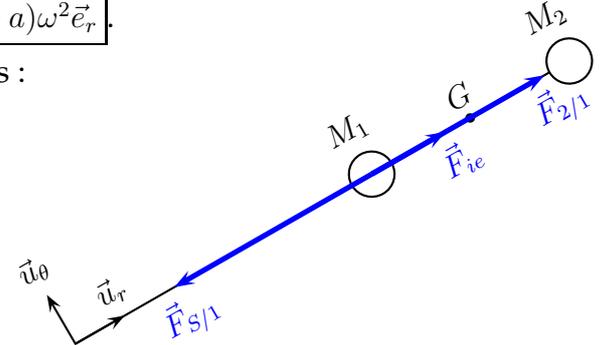
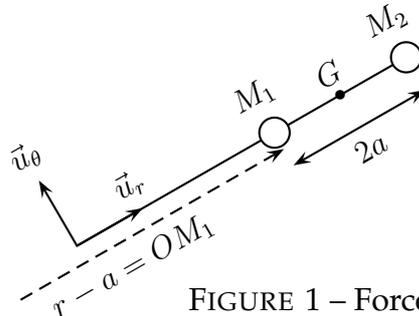


FIGURE 1 – Forces subies par M_1

- la force de gravitation exercée par Saturne : $\vec{F}_{S/1} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{(r-a)^2} \cdot \vec{e}_r$,
- la force de gravitation exercée par M_2 : $\vec{F}_{2/1} = +\frac{\mathcal{G}m^2}{(2a)^2} \cdot \vec{e}_r$,
- la pseudo force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_e = m\omega^2 \overrightarrow{OM_1} = m\omega^2(r - a) \cdot \vec{e}_r = \frac{\mathcal{G}mM(r-a)}{r^3} \cdot \vec{e}_r$.

On en déduit la résultante (en élimant ω) :

$$\vec{F} = \sum \vec{f} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{(r-a)^2} \cdot \vec{e}_r + \frac{\mathcal{G}m^2}{(2a)^2} \cdot \vec{e}_r + \frac{\mathcal{G}mM(r-a)}{r^3} \cdot \vec{e}_r = f(a,r) \cdot \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \boxed{f(a,r) = -\frac{\mathcal{G}Mm}{(r-a)^2} + \frac{\mathcal{G}m^2}{(2a)^2} + \frac{\mathcal{G}mM(r-a)}{r^3}}$$

Q40 4. On peut écrire $f(a,r)$ sous la forme :

$$f(a,r) = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2(1 - \frac{a}{r})^2} + \frac{\mathcal{G}m^2}{(2a)^2} + \frac{\mathcal{G}mM}{r^2}(1 - \frac{a}{r}) = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-2} + \frac{\mathcal{G}m^2}{(2a)^2} + \frac{\mathcal{G}mM}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

et avec $\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-2} \simeq \left(1 + 2\frac{a}{r}\right)$, on en déduit en effet

$$f(a,r) \simeq -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^2} \left(1 + \frac{2a}{r}\right) + \frac{\mathcal{G}m^2}{(2a)^2} + \frac{\mathcal{G}mM}{r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \Rightarrow \boxed{f(a,r) \simeq \frac{\mathcal{G}m^2}{4a^2} - \frac{3\mathcal{G}mMa}{r^3}}$$

Q41 5. La dislocation se produit

$$f(a,r) < 0 \Rightarrow \frac{\mathcal{G}m^2}{4a^2} < \frac{3\mathcal{G}mMa}{r^3} \Rightarrow r_0^3 < \frac{12Ma^3}{m} \Rightarrow \boxed{r_0 < \sqrt[3]{\frac{12M}{\mu}}}$$

Pour $\mu = 720 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, on obtient une limite de Roche $\boxed{r_0 \simeq 2,15 \cdot 10^8 \text{ m}}$

On obtient r_0 supérieur au rayon observé, les anneaux ne sont donc pas formés de solides.

B. Divisions des anneaux

Q42 1. Si on néglige l'influence des autres corps, la seule force subie par un objet en orbite autour de Saturne est la force de gravitation.

D'après le PFD, on obtient $\frac{-v^2}{r} = \frac{-\mathcal{G}M}{r^2}$ (projection du pfd selon \vec{e}_r pour un MCU). On en déduit que $\boxed{v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}}$. On a bien v qui diminue lorsque r augmente.

Q43 2. Le vecteur vitesse de chaque corps est tangent à la trajectoire et v diminue quand r augmente.

On en déduit les vecteurs sur la figure ci-dessous à gauche.

Rem : une courte explication est nécessaire pour accompagner le schéma.

Q44 3. Vitesses dans \mathcal{R}_{SP} (Cf figure ci-dessous à droite) :

- Pan est fixe dans \mathcal{R}_{SP} .
- En utilisant la loi de composition des vitesses pour A , $\vec{v}(A/\mathcal{R}_S) = \vec{v}(A/\mathcal{R}_{SP}) + \vec{v}_e$ où \vec{v}_e est la vitesse d'entraînement, celle du point coïncident P , fixe dans \mathcal{R}_{SP} qui coïncidait avec A : $\vec{v}_e = \vec{v}(P/\mathcal{R}_S)$.

Comme Pan est fixe dans \mathcal{R}_{SP} et proche de A , on en déduit $\vec{v}_e \simeq \vec{v}((Pan)/\mathcal{R}_S)$ puis $\vec{v}(A/\mathcal{R}_{SP}) = \vec{v}(A/\mathcal{R}_S) - \vec{v}_e \simeq \vec{v}(A/\mathcal{R}_S) - \vec{v}(Pan/\mathcal{R}_S)$.

- On procède de même pour B .

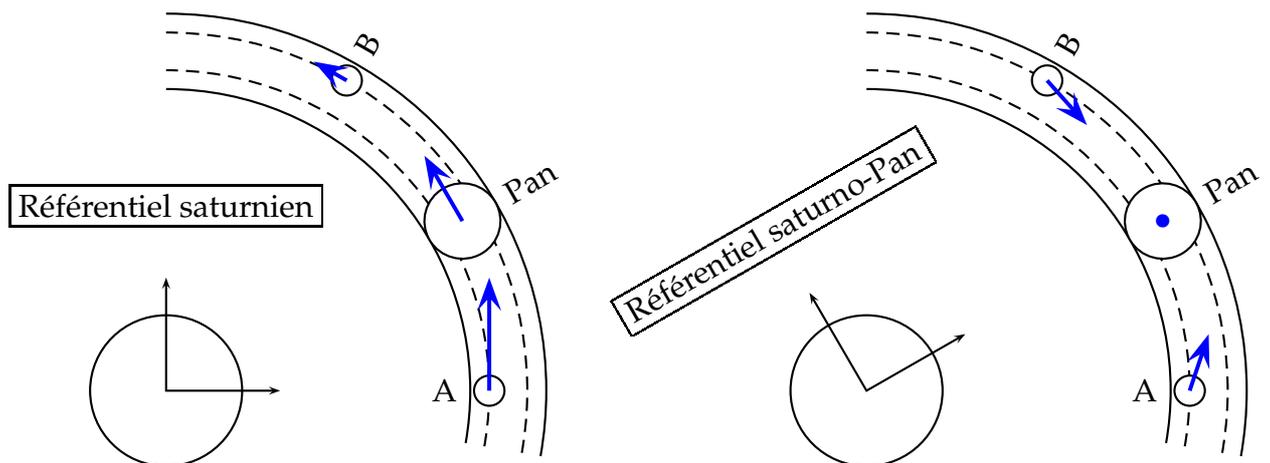


FIGURE 2 – Référentiel saturnien / Référentiel saturno-Pan

Q45 4. On remarque sur la figure que les corps A et B se dirigent vers Pan.

Après le choc, ils vont soit se fixer à Pan soit quitter la division alors que la trajectoire de Pan (plus massif) ne sera quasiment pas modifiée.

3 Troisième partie : l'atmosphère de Titan

- Q46 1. D'après la relation fondamentale de la statique des fluides : $dP = \mu \vec{g} \cdot \vec{dr}$ ou $\overrightarrow{\text{grad}} P = \mu \vec{g}$.
Or ici on a $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ soit en projection sur l'axe Oz dirigé vers le haut : $dp = -\mu g dz$.

Rem : Soyez attentif aux signes !

Ici la masse volumique dépend de z et la température est constante à T_0 : $\mu = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT_0}$

(pour un gaz parfait, $PV = nRT$). D'où finalement : $dP = -\frac{MgP}{RT_0} dz$

- Q47 2. On résout cette équation différentielle du premier ordre en l'écrivant par exemple :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} dz \quad \text{soit : } P = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)$$

Pour l'accord entre le modèle et la figure expérimentale, on peut observer que le modèle prédit une évolution linéaire de $\log P$ en fonction de l'altitude. Ainsi, puisque l'échelle de P est logarithmique, on devrait avoir une échelle de z linéaire. Toutefois, il est indiqué que l'échelle de z n'est pas régulière (ce qui est confirmé par les valeurs qui ne sont pas échantillonnées).

Toutefois, avant de conclure que le modèle n'est pas adapté, il faut se rappeler des hypothèses. Le modèle a été établi dans le cadre d'une atmosphère isotherme. Si on regarde la courbe de température, il y a de fortes variations. Dans la partie 250m - 1000m, la température varie peu et l'échelle d'altitude est raisonnablement linéaire (même écart entre 2 trait horizontaux). On peut donc dire que le modèle est applicable sur une partie de l'atmosphère, mais une partie seulement. On pourrait proposer des modèles plus évolués, en intégrant la RSFS en tenant compte de $T(z)$, par exemple en utilisant odeint.