

Conseils :

- Ce devoir comporte 4 problèmes indépendants. Les 4 problèmes se feront sur des copies différentes.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **ré-daction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).
Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- L'usage des **calculatrices est autorisé.**

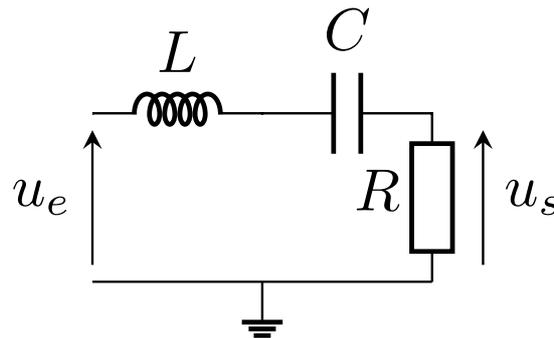
I. OSCILLATEUR QUASI-SINUSOÏDAL

On souhaite réaliser un oscillateur quasi-sinusoidal électrique, c'est-à-dire un montage qui permet de générer un signal quasi-harmonique, sans utiliser de signal harmonique en entrée.

Pour cela, on va coupler un montage amplificateur, utilisant un Amplificateur Linéaire Intégré, appelé ALI dans toute la suite, à un filtre passe bande très sélectif.

A. Étude du filtre passe-bande

On considère le filtre RLC suivant, pour lequel la tension de sortie u_s est prise au niveau du résistor. On suppose de plus que la tension d'entrée est de la forme $u_e(t) = E \cos(\omega t)$.



- Q1 1. Justifier que ce montage permet de réaliser un filtrage du type passe-bande.
- Q2 2. Exprimer la fonction de transfert \underline{H} de ce filtre, puis en déduire les expressions de ω_0 et Q à l'aide de la forme canonique

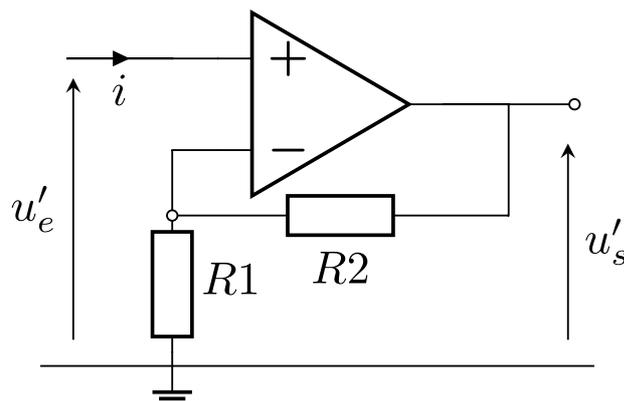
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} \quad \text{où } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On utilise alors les valeurs suivantes pour les composants : $R = 200 \Omega$, $L = 80 \text{ mH}$ et $C = 20 \text{ nF}$.

- Q3 3. On dispose uniquement de bobines d'inductance $L_1 = 40 \text{ mH}$ et de condensateurs de capacité $C_1 = 100 \text{ nF}$ en plusieurs exemplaires. Comment peut-on les combiner pour obtenir les valeurs attendues pour L et C ?
- Q4 4. Tracer le diagramme de Bode en gain uniquement associé à ce filtre. On précisera les valeurs numériques de Q et ω_0 , le comportement asymptotique du filtre en donnant les équations des asymptotes basses fréquences et hautes fréquences (et la valeur où elles se coupent) ainsi que la façon dont on en déduit la courbe réelle.

B. Etude du bloc amplificateur

L'Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) ci-contre est supposé idéal et est alimenté par un générateur $15 \text{ V}, -15 \text{ V}$. Les tensions d'entrée et de sortie sont notées u'_e et u'_s , pour ne pas interférer avec la première partie du problème.



Q5 1. Justifier que $V_+ = V_-$. De plus, que peut-on dire du courant i ? Justifier.

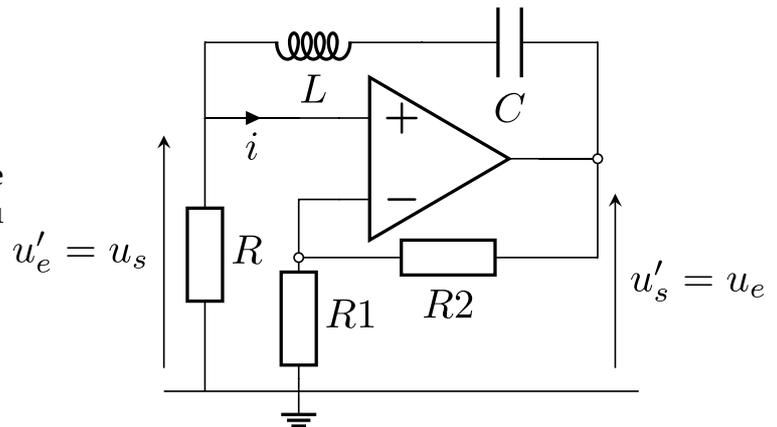
Q6 2. Établir l'expression de la fonction de transfert : $\underline{H}' = \frac{u'_s}{u'_e}$

Dans toute la suite, on note $G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

C. Étude globale de l'oscillateur

Q7 1. Quelle équation différentielle relie les tensions u_s et u_e ? Cette dernière sera exprimée sous forme canonique, en fonction de ω_0 et Q . On précise de plus que u_e n'est pas une tension constante.

On considère à présent le montage complet, composé du filtre RLC et du montage amplificateur.



Ces derniers sont reliés de sorte que $u'_s = u_e$ et $u'_e = u_s$.

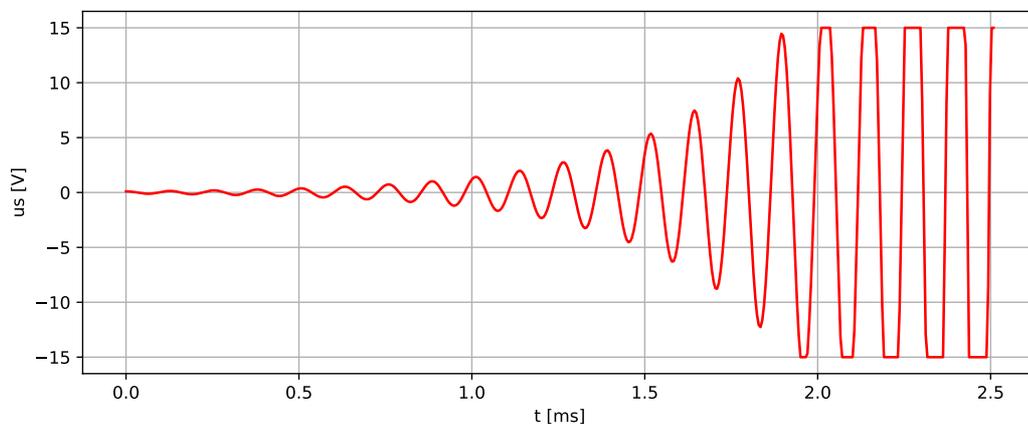
Q8 2. Démontrer que pour le montage complet, la tension u_s est solution de

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} (1 - G) \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = 0$$

On considère dans toute la suite que le gain G est légèrement supérieur à 1.

Q9 3. Exprimer les racines notées r_+ et r_- du polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle. En déduire l'existence de solutions qui vont diverger au cours du temps.

L'enregistrement à l'oscilloscope de la tension u_s est présenté sur la figure suivante. L'instant initial $t = 0$ correspond au moment où les deux blocs sont reliés.



Q10 4. Comment expliquer le phénomène observé à partir de 2 ms?

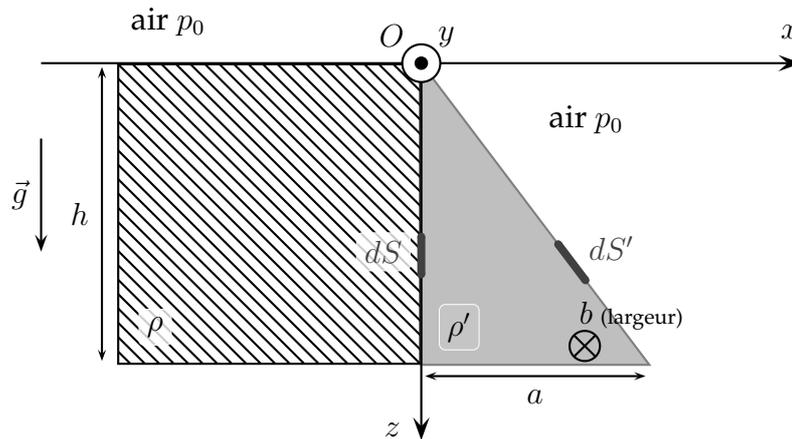
À partir de ce signal, comment peut-on obtenir un signal harmonique?

II. FORCES PRESSANTES SUR UN BARRAGE POIDS

Un mur de barrage a le profil indiqué : hauteur h , largeur b , épaisseur de la base a . La masse volumique du béton est ρ' , celle de l'eau est ρ .

On se propose de déterminer séparément la force pressante exercée par l'eau \vec{F}_{eau} et celle exercée par l'air \vec{F}_{air} .

Données : $b = 100 \text{ m}$; $h = 50 \text{ m}$; $k = 0,5$; $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $\rho' = 2.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.



Q11

1. Rappeler la relation fondamentale de la statique des fluides (vectorielle) dans le champ de pesanteur \vec{g} dans le référentiel terrestre galiléen. En déduire la loi fondamentale de la statique des fluides incompressibles (ρ constant) ou loi de Pascal donnant la pression p en fonction de z .

Q12

2. Exprimer la pression p de l'eau en un point de la paroi verticale du barrage, en fonction de p_0 , ρ , g et z .

Q13

3. Calcul de \vec{F}_{eau} :

(a) Exprimer la force pressante $d\vec{F}_{eau}$ exercée par l'eau sur l'élément de surface $dS = dydz$ situé à la profondeur z .

Q14

(b) Exprimer la force pressante \vec{F}_{eau} en fonction de p_0 , ρ , g , h , b et d'un vecteur unitaire.

Q15

4. Calcul de \vec{F}_{air} :

(a) Exprimer la force pressante $d\vec{F}_{air}$ exercée par l'air sur l'élément de surface dS' quelconque (voir schéma) en fonction de p_0 , dS' et à un vecteur unitaire \vec{u} que vous représenterez sur un schéma.

Q16

(b) En déduire \vec{F}_{air} en fonction de p_0 , b , a , h et \vec{u} .

Q17

(c) Projeter le vecteur \vec{u} sur \vec{e}_x et \vec{e}_z . Exprimer les composantes $F_{air,x}$ en fonction de p_0 , h et b et $F_{air,z}$ en fonction de p_0 , a et b .

(d) Montrer la composante F_x de la résultante des forces de pression exercées par l'eau et l'air s'écrit :

$$F_x = \frac{1}{2} \rho g b h^2$$

Q18

(e) Montrer que la composante F_z de la résultante des forces de pression exercées par l'eau et l'air s'écrit :

$$F_z = p_0 a b$$

Q19

- Q20 5. Exprimer le poids P du barrage en fonction de ρ' , a , h , b et g (on supposera les matériaux de construction homogènes).
6. En supposant que la maçonnerie, non ancrée, repose directement sur le sol avec un coefficient de frottement k , quelle valeur minimale a_{min} faut-il donner à a pour que le barrage ne glisse pas? On donnera l'expression littérale de a_{min} , puis on fera l'application numérique. On représentera soigneusement les forces exercées sur le barrage.
On rappelle la loi du frottement de Coulomb : soit \vec{R} la réaction du sol sur le barrage, R_T sa composante horizontale, R_N sa composante verticale. Le barrage ne glisse pas tant que $|R_T| < k|R_N|$ (k est le coefficient de frottement).
- Q21 7. Le barrage-poids à profil triangulaire de Bouzey (près d'Épinal) a connu les deux accidents classiques de ce type de barrage, en 1885 et en 1895. Décrire sommairement ces accidents.
- Q22 Quelles sont les forces responsables de ces accidents et celles qui s'y opposent?

III. TRANSFORMATION D'UN GAZ

On s'intéresse à une quantité de matière n de dioxygène, supposé être un gaz parfait, initialement à la température T_0 et à la pression P_0 . Il subit les transformations suivantes :

- une évolution adiabatique réversible de l'état initial $A_0(T_0, P_0)$ à l'état $A_1(T_1, P_1)$ avec $P_1 = \eta P_0$ ($\eta > 1$) et T_1 la température de l'état A_1 ;
- une transformation isobare quasi-statique, au contact d'un thermostat de température T_0 , qui l'amène de l'état A_1 à l'état $A_2(T_0, P_1)$.

On note γ le coefficient adiabatique du gaz et $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits.

- Q23 1. Rappeler la définition de γ . Démontrer la relation de Mayer. En déduire les capacités thermiques à volume et pression constantes, respectivement notées C_V et C_P en fonction de γ , R et n .
- Q24 2. Représenter la transformation complète dans le diagramme de Watt (P, V). Justifier.
- Q25 3. Déterminer, en fonction du volume V_0 , de γ et η , les volumes V_1 et V_2 occupés par le gaz dans les états A_1 et A_2 .
- Q26 4. Montrer que T_1 peut s'exprimer sous la forme :

$$T_1 = T_0 \eta^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

- Q27 5. Déterminer la variation d'énergie interne ΔU entre l'état A_0 et l'état A_2 .
- Q28 6. Exprimer, en fonction de T_0 , η , n , R et γ , le travail $W_{A_0A_1}$ et le transfert thermique $Q_{A_0A_1}$ reçus par le gaz au cours de la transformation A_0A_1 .
- Q29 7. De même, exprimer $W_{A_1A_2}$ et montrer que $Q_{A_1A_2} = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} T_0 (1 - \eta^{1-1/\gamma})$
8. Exprimer finalement $Q_{A_0A_2}$ et $W_{A_0A_2}$. Déterminer leurs signes. Commenter en faisant le lien avec le diagramme de Watt.

On rappelle la formule donnant la variation d'entropie d'un gaz parfait en fonction de T et P :

$$\Delta S = S(T_f, P_f) - S(T_i, P_i) = C_P \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - nR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right)$$

- Q30 9. Comment évolue l'entropie du système au cours de la première étape (A_0A_1). Justifier votre réponse
- Q31 10. Établir l'expression de la variation d'entropie d'un gaz parfait en fonction des variables (P, V).
- Q32 11. Déterminer la variation d'entropie pour la deuxième étape (A_1A_2).
- Q33 12. Déterminer finalement l'entropie créée au cours de cette transformation (A_1A_2). Commenter.

IV. COMMENT ALLER SE FAIRE CUIRE UN ŒUF (DUR)

A. Cuisson



FIGURE 1 – Vue de profil, vue de dessus, vue de dessus sans la cloche (laissant voir la grille).

Cet appareil cuit des œufs (au nombre de 1 à 7) grâce à la vapeur d'eau qui se forme par ébullition de l'eau placée dans le fond du cuiseur.

Les œufs à cuire selon différents degrés de cuisson (coque, mollet, dur) sont placés sur une grille percée de 7 trous circulaires et de 6 trous périphériques permettant la circulation de la vapeur d'eau dans l'enceinte de cuisson.

Des orifices sont percés au sommet de la cloche métallique pour permettre à la vapeur de s'échapper.

La puissance électrique consommée par l'appareil est : $\mathcal{P} = 350 \text{ W}$. On considèrera que cette puissance est intégralement consommée par la résistance chauffante.

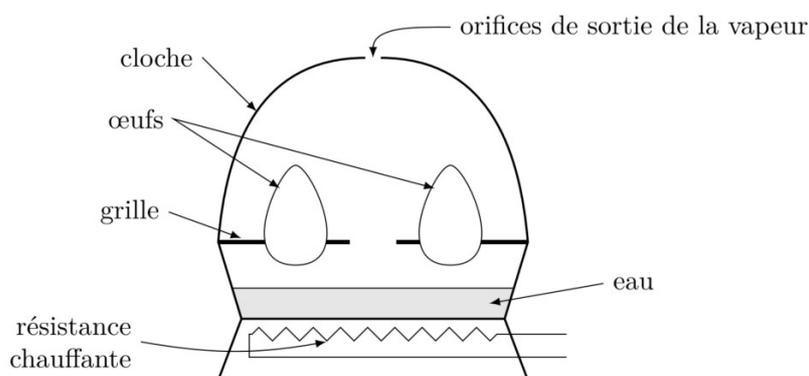


FIGURE 2 – Schéma général du cuiseur.

Fonctionnement du cuiseur

Le volume d'eau nécessaire à la cuisson d'un seul œuf dur est de 120 mL. Les œufs à la température initiale $T_0 = 20^\circ \text{ C}$ sont placés dans le cuiseur et on verse la masse d'eau m_0 (à la même température initiale T_0) sous les œufs. Cette eau est portée à ébullition sous $p = 1 \text{ bar}$, puis évaporée. Le cuiseur s'arrête quand toute l'eau s'est évaporée.

Notons c la capacité thermique massique de l'eau liquide, T_{eb} sa température d'ébullition dans les conditions de l'expérience et $m(t)$ la masse d'eau contenue dans le cuiseur à l'instant t .

Soient Δt_1 la durée de chauffage de l'eau de T_0 à T_{eb} et Δt_2 la durée de la cuisson des œufs, qui correspond à l'évaporation totale de l'eau. Pendant cette deuxième phase, on supposera que la vapeur d'eau est à la température T_{eb} sous la pression $p = 1 \text{ bar}$.

- Q34 1. Soit m_c la valeur en eau du cuiseur (on rappelle que la valeur en eau d'un objet est la masse d'eau ayant même capacité thermique que cet objet). En supposant la transformation adiabatique pendant le chauffage, exprimer Δt_1 en fonction des données.
- Q35 2. On place dans le cuiseur une masse d'eau $m_0 = 125$ g. On mesure alors une durée de chauffage $\Delta t_0 = 150$ s avant de parvenir à l'ébullition. En déduire la valeur en eau du cuiseur.

B. Étude de la rotation

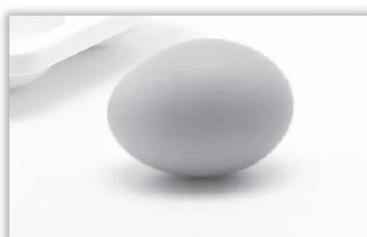
Le document ci-dessous décrit un phénomène qu'on observe lorsqu'on met en rotation un œuf dur (pour vérifier la cuisson précédente!).

Document A

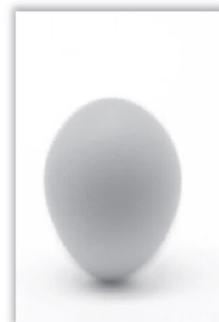
Lorsqu'on impulse un mouvement rotatif très rapide (plus d'une dizaine de tours par seconde) à un œuf dur posé sur une surface bien plane et pas trop lisse, il se produit un étrange phénomène. Au bout de quelques tours, l'œuf se dresse et se met à tourner sur sa pointe ou sur sa base! Lorsqu'il perd peu à peu de la vitesse par frottements, il finit par se remettre en position couchée, position où son centre de gravité est le plus bas.



a



b



c

Évolution d'un œuf dur en rotation dans l'ordre chronologique a, b et c.

Source : *Le kaléidoscope de la physique, Varlamov, Villain, Rigamonti, 2014*

On souhaite établir pour l'œuf dur la condition de basculement de la position horizontale à la position verticale. On adopte le paramétrage de la figure 3 ci-dessous :

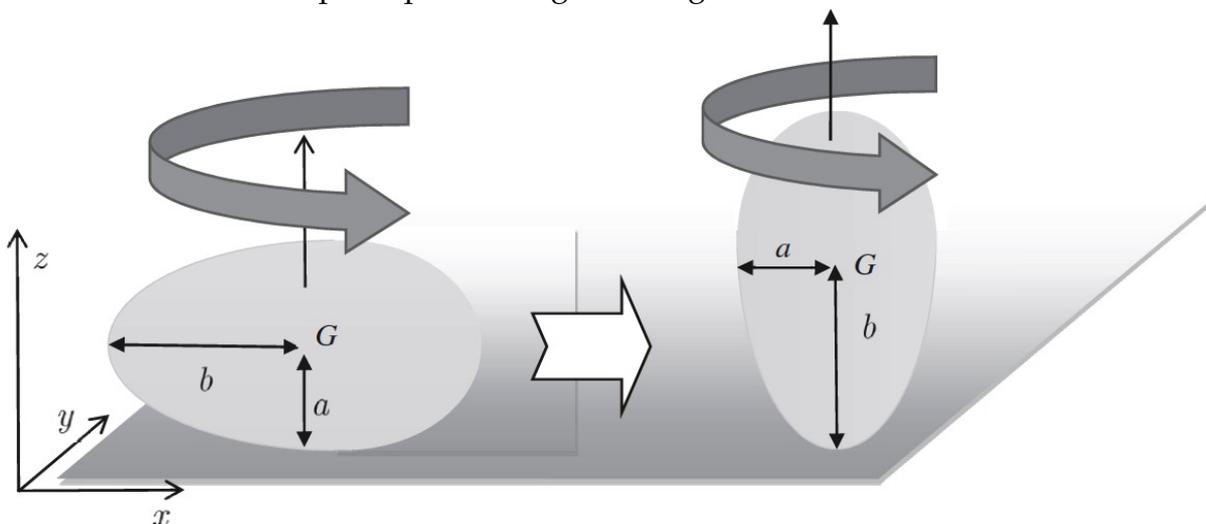


FIGURE 3 – Passage de la position horizontale (à gauche) à la position verticale (à droite)

On ne considère que les états initial et final, on ne s'intéresse pas au mécanisme transitoire du redressement de l'œuf. On modélise l'œuf dur par un ellipsoïde de révolution homogène de masse m , de demi petit axe a et de demi grand axe b (avec $a < b$). Le centre de masse G est au centre de l'ellipsoïde (on néglige la légère asymétrie de l'œuf). Les moments d'inertie d'un ellipsoïde de masse m par rapport à son axe de rotation Oz s'écrivent :

- $J_H = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$ lorsque l'œuf tourne à l'horizontal,
- $J_V = \frac{3}{5}ma^2$ lorsque l'œuf tourne à la verticale.

On pose Ω la vitesse de rotation de l'œuf, qu'il soit dans sa position verticale ou horizontale.

- Q36 1. Comparer les deux moments d'inertie J_H et J_V et commenter physiquement.
- Q37 2. Exprimer l'énergie mécanique totale de l'œuf dans les deux positions E_{m_H} et E_{m_V} en fonction des données. On choisira comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur celle d'altitude nulle.
- Q38 3. Montrer qu'il existe une pulsation limite Ω_c telle que pour $\Omega > \Omega_c$, la position verticale est d'énergie inférieure à la position horizontale et assure le basculement d'une position à l'autre. On donnera l'expression de Ω_c en fonction de a , b , et g .
- Q39 4. Calculer Ω_c pour $a = 2,0$ cm $b = 3,0$ cm et $g = 10$ m s⁻². Commenter le résultat obtenu en utilisant les descriptions de l'expérience du document.

On suppose que le contact entre l'œuf et la table se fait sans frottement. Dans ce cas, lors du redressement de l'œuf, l'énergie doit être conservée. On fait tourner l'œuf en position horizontale, avec une vitesse angulaire initiale légèrement supérieure à la vitesse limite : $\Omega_0 = \Omega_c + \varepsilon$ (avec $\varepsilon \ll \Omega_c$). L'œuf se redresse et tourne alors avec une vitesse angulaire finale Ω_f que l'on peut écrire sous la forme $\Omega_f = \Omega_c + r\varepsilon$ (avec r un nombre sans dimension).

- Q40 5. Exprimer les énergies mécaniques initiale E_{m_H} et finale E_{m_V} au premier ordre en ε .
- Q41 6. En déduire, d'après les hypothèses, la valeur de r en fonction de a et de b . L'œuf a-t-il accéléré ou ralenti lors de son redressement? Que vaudrait r pour $a \approx b$? Commenter.
- Q42 7. Exprimer les moments cinétiques L_H et L_V de l'œuf par rapport à l'axe Oz avant et après son redressement. Exprimer la variation de moment cinétique $\Delta L = L_V - L_H$ en fonction de Ω_c , m , a et b . L'œuf a-t-il gagné ou perdu du moment cinétique lors de son redressement?
- Q43 8. Cette variation de moment cinétique signifie que, pendant le temps Δt du redressement, l'œuf a subi un couple \vec{C} . Montrer que la composante verticale de ce couple par rapport à l'axe Oz peut s'écrire :

$$C_z \simeq \frac{2mg(a-b)}{\Omega_c \Delta t}$$

- Q44 9. Le poids ou la réaction normale du support peuvent-ils être responsables d'un tel couple? Si non, d'où peut provenir ce couple? Y a-t-il une contradiction avec les hypothèses de l'énoncé?

I. OSCILLATEUR QUASI-SINUSOÏDAL

A. Étude du filtre passe-bande

Q1 1. On obtient en BF un circuit ouvert (le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert) donc le courant est nul d'où $\underline{u}_R = \underline{u}_s = R \times 0 = 0$. Le même résultat est aussi observé en HF, grâce à la bobine. On en déduit que le filtre est un passe bande.

Résultat donné, justification irréprochable attendue. Il ne suffit pas de dire «il y a un interrupteur ouvert donc ça coupe». Imaginez le cas où la tension de sortie serait aux bornes de «L+C» au lieu de R.

2. On observe un pont diviseur de tension d'où $H = \frac{Z_R}{Z_R + Z_L + Z_C}$ soit

Q2
$$H = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega + \frac{1}{jRC\omega}} \text{ du type } \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

d'où l'on déduit par identification $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R}$ et $Q\omega_0 = \frac{1}{RC}$ soit après calculs, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

puis $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

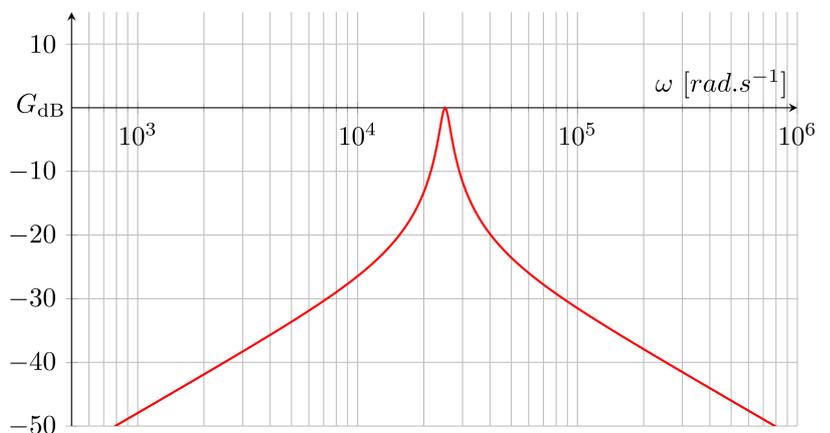
Q3 3. On remarque qu'en série, on a $L_1 + L_1 = 80 \text{ mH} = L$ puis toujours en série, $\frac{5}{C_1} = \frac{1}{C}$. Il convient finalement de prendre deux bobines et cinq condensateurs en séries.

Q4 4. En BF, on a $H \underset{BF}{\simeq} \frac{1}{-jQ(1/x)}$ d'où $G_{dB,BF} = -20 \log(Q) + 20 \log(x)$ (pente de +20 dB par décade).
 En HF, on a $H \underset{HF}{\simeq} \frac{1}{jQ(x)}$ d'où $G_{dB,HF} = -20 \log(Q) - 20 \log(x)$ (pente de -20 dB par décade).

Ces asymptotes se croisent pour $x = 1$ soit $\omega = \omega_0$ à l'ordonnée $-20 \log(Q) = -20 \text{ dB}$.

De plus, en $x = 1$, on a $H(1) = 1$ d'où $G_{dB}(x = 1) = 0$. On peut alors réaliser le tracé, en commençant par placer les asymptotes.

À l'aide des valeurs proposées, on obtient $Q = 10$ et $\omega_0 = 25 \times 10^3 \text{ rad/s}$



B. Etude du bloc amplificateur

Q5 1. La rétroaction ayant lieu sur l'entrée inverseuse, l'ALI fonctionne en régime linéaire d'où le résultat. De plus, l'ALI étant idéal, on a $i = i_- = 0$.

- Q6 2. On observe un pont diviseur de tension formé par les deux résistors car $i_- = 0$ d'où

$$V_- - 0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (u'_s - 0) \text{ donc } V_- = V_+ = u'_e = \frac{R_1}{R_2 + R_1} u'_s$$

et au final
$$H' = \frac{u'_s}{u'_e} = \frac{R_2 + R_1}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

C. Étude globale de l'oscillateur

1. Il existe deux méthodes. On peut soit :

➤ Appliquer la loi des mailles pour obtenir $u_e = u_s + u_L + u_C$ avec $u_L = L \frac{di}{dt}$ et $i = C \frac{du_C}{dt}$. De plus, on a pour le résistor $u_s = Ri$. On obtient en combinant ces résultats, et après avoir dérivé la loi des mailles

$$\frac{du_e}{dt} = \frac{du_s}{dt} + \frac{L}{R} \frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{1}{RC} u_s$$

soit après simplification,

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{LC} u_s = \frac{R}{L} \frac{du_e}{dt}$$

On peut alors introduire ω_0 et Q à l'aide de l'identification avec la forme canonique d'où

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_e}{dt}$$

➤ Partir de la fonction de transfert obtenue

$$\underline{u}_s = H \underline{u}_e \Rightarrow \underline{u}_s + jQ \frac{\omega}{\omega_0} \underline{u}_s + \frac{Q\omega_0}{j\omega} \underline{u}_s = \underline{u}_e$$

Afin d'éviter l'obtention d'une primitive (terme en $1/(j\omega)$), on peut multiplier les deux côtés de l'égalité par $j\omega\omega_0/Q$ d'où

$$\frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{u}_s + (j\omega)^2 \underline{u}_s + \omega_0^2 \underline{u}_s = \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{u}_e$$

On peut ensuite remplacer les multiplications par $(j\omega)^n$ par des dérivées n^{ième} d'où au final

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_e}{dt}$$

Q7

2. Il convient de combiner les relations entre u_s et u_e d'une part, puis entre $u'_s = u_e$ et $u'_e = u_s$ d'autre part, on en déduit

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_e}{dt} = \frac{\omega_0}{Q} \frac{du'_s}{dt} = \frac{\omega_0}{Q} \frac{dH'u'_e}{dt} = \frac{\omega_0}{Q} \frac{dGu_s}{dt}$$

Q8

d'où le résultat en passant le dernier terme à gauche de l'équation.

- Q9 3. Le polynome caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}(1 - G)r + \omega_0^2$ admet pour discriminant $\omega_0^2 \left(\frac{(1-G)^2}{Q^2} - 4 \right)$. De plus, d'après l'énoncé, G est légèrement supérieur à 1 donc on peut supposer que le discriminant est négatif. On en déduit

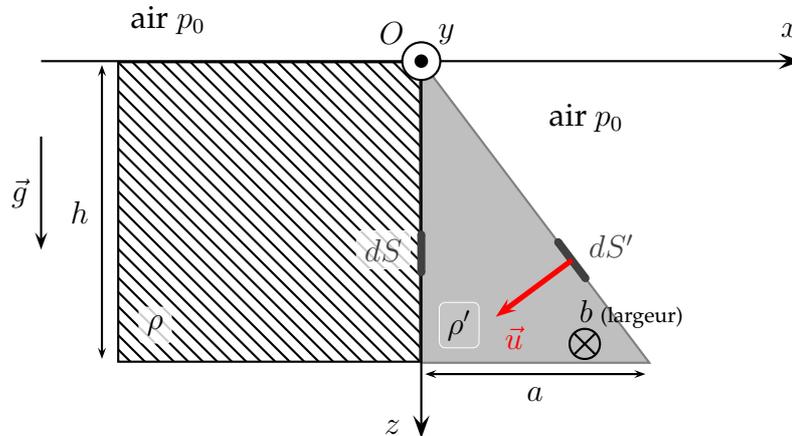
$$r_+ = \omega_0 \frac{G - 1}{2Q} + \frac{1}{2}j\sqrt{-\Delta} \text{ et } r_- = \omega_0 \frac{G - 1}{2Q} - \frac{1}{2}j\sqrt{-\Delta}$$

On remarque alors que la partie réelle de ces deux racines est positive. On en déduit que les solutions de l'équation homogène associée vont diverger au cours du temps. En effet, les solutions sont de la forme $\exp\left(\omega_0 \frac{G-1}{2Q} t\right) \times \left(A \cos(\sqrt{-\Delta}t/2) + B \sin(\sqrt{-\Delta}t/2)\right)$, et l'énoncé dit que $G > 1$.

- Q10 4. On observe un signal de type créneau. Une étude détaillée montre que les valeurs maximale et minimale sont proches de 15 V et de -15 V. Ainsi, c'est le phénomène de saturation de l'ALI qui limite la tension de sortie (la tension u_s est bornée par les tensions d'alimentations de l'ALI).

On peut obtenir un signal quasi harmonique en utilisant un filtre passe bande, centré sur la pulsation obtenue. Finalement, il peut être pertinent de prendre la tension u_e au lieu de u_s , car cette dernière est justement filtrée par un filtre passe bande!

II. FORCES PRESSANTES SUR UN BARRAGE POIDS



- Q11 1. Relation fondamentale : $dp = \rho \vec{g} \cdot d\vec{r}$ ou $\text{grad } p = \rho \vec{g}$. Or on a $\vec{g} = +g\vec{e}_z$ d'où $dp = \rho g dz$. D'où en intégrant : $p = \rho g z + cste$

- Q12 2. La condition aux limites est $p = p_0$ en $z = 0$. En intégrant la relation précédente entre $z = 0$ et z , on trouve $p - p_0 = \rho g(z - 0)$ d'où $p = p_0 + \rho g z$

Pensez à justifier la condition aux limites.

- Q13 3. Calcul de \vec{F}_{eau} :
- (a) La force a pour norme $p dS = p dz dy$ et est orienté selon la normale sortante au fluide : \vec{e}_x . Son expression est donc $d\vec{F}_{eau} = (p_0 + \rho g z) dy dz \vec{e}_x$

- (b) La force pressante totale s'obtient en sommant (intégrant) la force pressante élémentaire de la question précédente.

$$\vec{F}_{eau} = \int_{z=0}^h \int_{y=-b}^0 d\vec{F}_{eau} = b\vec{e}_x \int_{z=0}^h (p_0 + \rho g z) dz = \boxed{b \left(p_0 h + \frac{1}{2} \rho g h^2 \right) \vec{e}_x}$$

L'intégrale sur y revient à une multiplication par b puisque rien ne dépend de y . On peut encore factoriser h dans le résultat.

Q14

4. Calcul de \vec{F}_{air} :

- (a) La force est $d\vec{F}_{air} = p_0 dS' \vec{u}$ avec \vec{u} un vecteur unitaire orienté depuis l'air vers le béton, orthogonal à la surface.

Q15

Attention, $dS' \neq dx dy dz$, ce ne serait pas homogène. Il n'y a toujours que deux intégrales car on intègre sur une surface.

- (b) Puisque la force est uniforme, il suffit de faire la pression fois la surface. La largeur est b et d'après Pythagore l'autre dimension est $\sqrt{a^2 + h^2}$ d'où $\vec{F}_{air} = p_0 b \sqrt{a^2 + h^2} \vec{u}$

Q16

- (c) $F_{air,x} = -F_{air} \cos \alpha$ avec α l'angle entre \vec{u} et $-\vec{e}_x$ qui est le même que l'angle du triangle rectangle (béton) en O . Soit $\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$ d'où $F_{air,x} = -p_0 b h$.

Q17

Pour $F_{air,z}$ de même, on utilise $\sin \alpha$ d'où $F_{air,z} = p_0 b a$

- (d) En utilisant les résultats des questions précédentes, la résultante selon x est $b \left(p_0 h + \frac{1}{2} \rho g h^2 \right) \vec{e}_x - p_0 b h \vec{e}_x$ d'où :

$$F_x = \frac{1}{2} \rho g b h^2$$

Q18

- (e) $F_z = F_{z,air} = p_0 a b$ (car la force due à l'eau n'a pas de composante selon z)

Q19

Q20

5. Le volume est $\frac{1}{2} a b h$ donc le poids est $\vec{P} = \frac{1}{2} \rho' a b h \vec{g}$.

6. La condition sur les forces est $|R_T| < k |R_N|$ or d'après le principe d'inertie, si le barrage ne glisse pas, alors $R_T + F_{air,x} + F_{eau,x} = 0$ et $R_N + F_{air,z} + P = 0$ d'où $R_N = -p_0 a b - \frac{1}{2} \rho' a b h g$ et $R_T = -\frac{1}{2} \rho g b h^2$ La condition de non glissement s'écrit donc

$$\frac{1}{2} \rho g b h^2 < k \times \left(p_0 a b + \frac{1}{2} \rho' a b h g \right) \Leftrightarrow a > \frac{\frac{1}{2} \rho g b h^2}{k \times \left(p_0 b + \frac{1}{2} \rho' b h g \right)} = a_{min}$$

Q21

On obtient $a_{min} = 41,7$ m

7. Le barrage peut GLISSER selon \vec{e}_x ou BASCULER autour de son arrête en bas à droite. Les forces qui s'opposent au basculement sont le poids et la force de poussée de l'air dont les moments s'opposent à ceux de la force de poussée de l'eau et de la réaction normale du support.

En 1884 il y a eu un glissement de 34 cm sur une longueur de 135 m.

En 1895 il y a un basculement autour d'un axe parallèle au sol situé à 10 m de hauteur par rapport au sol. Basculement du haut du barrage sur une longueur de 170 m.

Q22

III. TRANSFORMATION D'UN GAZ

1. On a par définition $\gamma = C_p/C_v$. De plus, on a pour l'enthalpie, toujours par définition

$$H = U + PV \underset{GP}{\Rightarrow} H = U + nRT \Rightarrow \frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + nR \Rightarrow \boxed{C_P = C_V + nR}$$

Q23

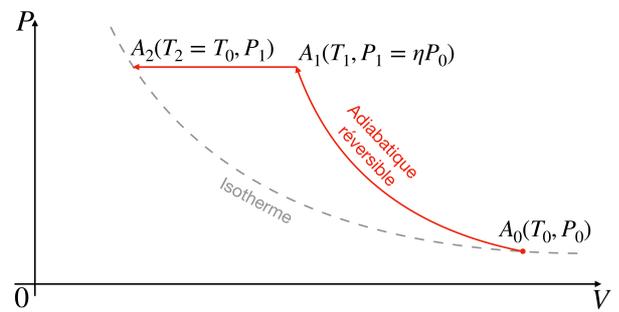
Ici, on utilise des dérivées droites et non partielles car l'énergie interne et l'enthalpie d'un gaz parfait ne dépendent que de la température. On peut alors combiner ces deux résultats pour obtenir :

$$\boxed{C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}} \quad \text{et} \quad \boxed{C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}}$$

Q24

2. Afin de tracer le bon diagramme, il est préférable de tracer l'isotherme reliant A_0 et A_2 . Pour rappel, l'adiabatique réversible a des variations plus marquées que l'isotherme et va donc passer au dessus de cette dernière, pour une compression.

Autre justification possible : lors de l'adiabatique réversible, on a $pV^\gamma = cte$ d'où une forme de courbe en $p \propto 1/V^\gamma$. L'énoncé dit que $\eta > 1$ donc la pression augmente et le volume diminue. Le gaz reçoit un travail (compression) et gagne donc en énergie (adiabatique) d'où la température augmente. Lorsque l'on revient à T_0 ensuite, la température diminue le long de l'isobare et comme $V = nrT/p$, alors V diminue aussi.



3. La première étape est une évolution adiabatique, pour laquelle les lois de Laplace s'appliquent. On en déduit :

$$P_0 V_0^\gamma = P_1 V_1^\gamma \Rightarrow V_1 = V_0 \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{1/\gamma} \Rightarrow \boxed{V_1 = V_0 \frac{1}{\eta^{1/\gamma}}}$$

Q25

De même, les points A_0 et A_2 sont reliés par une isotherme d'où :

$$P_2 V_2 = P_0 V_0 \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{V_0}{\eta}}$$

4. On utilise cette fois la loi de Laplace liée aux variables P et T , que l'on commence par rappeler :

$$PV^\gamma = P(nRT/P)^\gamma = cste \Rightarrow P^{1-\gamma} T^\gamma = cste'$$

Q26

On applique ensuite cette loi à la première étape

$$P_0^{1-\gamma} T_0^\gamma = P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma \Rightarrow \boxed{T_1 = T_0 \eta^{1-1/\gamma}}$$

d'où le résultat.

Q27

5. Le calcul direct entre ces deux états indique

$$\Delta U = U_2 - U_0 = C_V(T_2 - T_0) = 0$$

En effet, ces deux températures sont identiques.

Q28

6. Cette transformation étant adiabatique ($Q_{A_0A_1} = 0$), on a d'après le premier principe $\Delta U_{A_0A_1} = W_{A_0A_1}$. De plus, on obtient par calcul direct :

$$W_{A_0A_1} = C_V(T_1 - T_0) = \frac{nRT_0}{\gamma - 1} (\eta^{1-1/\gamma} - 1)$$

7. La deuxième étape est isobare et quasi-statique donc $P_{ext} = P_1$. Elle est alors aussi monobare donc le premier principe pour l'enthalpie s'applique :

$$\Delta H_{A_1A_2} = Q_{A_1A_2} + \underbrace{W_{\text{autre}}}_{=0}$$

On en déduit :

$$Q_{A_1A_2} = C_P(T_2 - T_1) = \frac{nRT_0\gamma}{\gamma - 1} (1 - \eta^{1-1/\gamma})$$

Q29

d'où le premier résultat. Le travail peut ensuite être obtenu rapidement à l'aide du premier principe appliqué à l'énergie interne :

$$\Delta U_{A_1A_2} = W_{A_1A_2} + Q_{A_1A_2} \Rightarrow W_{A_1A_2} = \Delta U_{A_1A_2} - Q_{A_1A_2} = \underbrace{(C_V - C_P)}_{=-nR \text{ (Mayer)}} (T_2 - T_1) = nRT_0 (\eta^{1-1/\gamma} - 1)$$

On peut aussi calculer directement le travail puisque la transformation est isobare : $W = -\int_{V_1}^{V_2} p_1 dV = -p_1 \int_{V_1}^{V_2} dV = -p_1(V_2 - V_1)$ et il suffit ensuite de remplacer par les expressions trouvées précédemment.

Attention!

Par contre, vous avez été nombreux à faire cette intégrale en remplaçant p par nRT et en sortant T de l'intégrale. C'est pertinent pour une isotherme où la température est constante et peut donc être sortie, mais ici ce n'est pas le cas! La température varie et n'est pas indépendante du volume.

8. La transformation globale est isotherme donc d'après le premier principe, $Q_{A_0A_2} = -W_{A_0A_2}$. De plus, le travail global est obtenu en sommant les deux travaux intermédiaires :

$$W_{A_0A_2} = W_{A_0A_1} + W_{A_1A_2} = \frac{nRT_0}{\gamma - 1} (\eta^{1-1/\gamma} - 1) + nRT_0 (\eta^{1-1/\gamma} - 1)$$

d'où en factorisant

$$-Q_{A_0A_2} = W_{A_0A_2} = \frac{nR\gamma T_0}{\gamma - 1} (\eta^{1-1/\gamma} - 1)$$

De plus, $\gamma > 1$ donc $1 - 1/\gamma > 0$. Le rapport de compression η étant supérieur à l'unité, on observe que $W_{A_0A_2} > 0$, ce qui est attendu pour une compression (le travail est associé à l'opposée de l'aire sous la courbe, qui est négative ici car l'intégrale se fait de la droite vers la gauche).

De plus, on a $Q_{A_0A_2} < 0$. Le système a fourni un transfert thermique à l'extérieur, pendant la deuxième étape.

Q30 9. La transformation est adiabatique ($S_e = 0$) et réversible ($S_c = 0$) donc d'après le second principe, on a $S_{A_0A_1} = 0$

Q31 10. On a

$$\Delta S = C_P \ln \frac{P_f V_f / (nR)}{P_i V_i / (nR)} - nR \ln \frac{P_f}{P_i} \Rightarrow \Delta S = \underbrace{(C_P - nR)}_{=C_V} \ln \frac{P_f}{P_i} + C_P \ln \frac{V_f}{V_i}$$

11. Pour la deuxième étape, la transformation est isobare donc $P_2 = P_1$, la formule donnée par l'énoncé indique

$$\Delta S_{A_1A_2} = C_P \ln \frac{T_2}{T_1} = C_P \ln \frac{T_0}{T_1} = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln (\eta^{1/\gamma-1})$$

Q32 d'où au final

$$\Delta S = -nR \ln(\eta)$$

12. La première étape étant réversible, l'entropie est uniquement créée lors de la deuxième étape. Le second principe indique

$$\Delta S_{A_1A_2} = \frac{Q_{A_1A_2}}{T_0} + S_c \Rightarrow S_c = \Delta S_{A_1A_2} - S_e = -nR \ln(\eta) - \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} (1 - \eta^{1-1/\gamma}) = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} (X - 1 - \ln(X))$$

en posant $X = \eta^{1-1/\gamma}$ Or on remarque que la droite d'équation $Y = X - 1$ est la tangente de la courbe associée à la fonction $X \mapsto \ln(X)$ en $(1,0)$. Or la fonction logarithme (concave), se situe sous ses tangentes. L'expression obtenue pour l'entropie créée est donc bien positive (nulle uniquement si $\eta = 1$, strictement positive sinon).

Q33

La transformation est donc irréversible. En effet, sur la deuxième étape, il y a un transfert thermique entre deux objets ayant, initialement, des températures différentes (T_1 pour le gaz, T_0 pour le thermostat).

IV. COMMENT ALLER SE FAIRE CUIRE UN ŒUF (DUR)

A. Cuisson

Q34 1. L'eau n'étant pas en contact avec les œufs, et la transformation étant adiabatique, on suppose que la puissance délivrée par la résistance ne sert qu'à chauffer le cuiseur, sans perte. Le premier principe de la thermodynamique appliqué au système fermé en évolution adiabatique formé du cuiseur et de l'eau s'écrit sur la durée Δt_1 :

$$(m_e + m_0) c (T_{eb} - T_0) = \mathcal{P} \Delta t_1 \quad \text{soit} \quad \Delta t_1 = \frac{(m_e + m_0) c (T_{eb} - T_0)}{\mathcal{P}}$$

Il est indispensable de définir un système et de préciser quelle loi on applique.

Q35 2. D'après la relation précédente, pour $\mathcal{P} = 350 \text{ W}$, $\Delta t_1 = 150 \text{ s}$, $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $T_{eb} = 100^\circ\text{C}$, $m_0 = 125 \text{ g}$

$$m_e = \frac{\Delta t_1 \mathcal{P}}{c(T_{eb} - T_0)} - m_0 = 32 \text{ g}$$

B. Étude de la rotation

- Q36 1. Comme $b > a$, on a $J_H > J_V$. En effet, la masse est globalement "répartie plus loin de l'axe de rotation", donc le moment d'inertie est plus grand.
- Q37 2. Dans les deux cas, $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}J\Omega^2 + mgz_G$, on a donc

$$E_{m_H} = \frac{1}{2}J_H\Omega^2 + mga \quad \text{et} \quad E_{m_V} = \frac{1}{2}J_V\Omega^2 + mgb$$

- Q38 3. On cherche la condition sur Ω pour avoir $E_{m_V} < E_{m_H}$, ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J_V\Omega^2 + mgb &< \frac{1}{2}J_H\Omega^2 + mga \Rightarrow 2mg(b-a) < (J_H - J_V)\Omega^2 \\ \Rightarrow 2mg(b-a) &< \frac{m}{5} \underbrace{(b^2 - a^2)}_{(a-b)(a+b)} \Omega^2 \Rightarrow \Omega > \sqrt{\frac{10g}{a+b}} \quad \text{car } b-a > 0 \end{aligned}$$

Q39 On a donc $\Omega > \Omega_c$ avec $\Omega_c = \sqrt{\frac{10g}{a+b}}$

- Q40 4. L'application numérique donne $\Omega_c = 45 \text{ rad s}^{-1}$, soit environ 7 tours/s. Cette valeur est du bon ordre de grandeur puisqu'on nous parle dans le document d'une vitesse de rotation d'une dizaine de tours par seconde.

Attention aux unités. Faites la conversion pour comparer avec le document.

- Q41 5. À l'état initial, on a $E_{m_H} = \frac{1}{2}J_H\Omega_0^2 + mga = \frac{m}{10}(a^2 + b^2)(\Omega_c + \varepsilon)^2 + mga$
soit au premier ordre en ε (DL1) :

$$E_{m_H} = \frac{m}{10}(a^2 + b^2)(\Omega_c^2 + 2\Omega_c\varepsilon) + mga \quad \text{et} \quad E_{m_V} = \frac{m}{5}a^2(\Omega_c^2 + 2\Omega_c\varepsilon r) + mgb$$

6. On a supposé que l'énergie mécanique se conservait, on a donc

$$E_{m_H} = E_{m_V} \Rightarrow \frac{m}{5}a^2(\Omega_c^2 + 2\Omega_c\varepsilon r) + mgb = \frac{m}{10}(a^2 + b^2)(\Omega_c^2 + 2\Omega_c\varepsilon) + mga$$

Or, on a vu dans la question 3 que (définition de Ω_c)

$$\frac{m}{5}a^2\Omega_c^2 + mgb = \frac{m}{10}(a^2 + b^2)\Omega_c^2 + mga$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient :

$$\frac{m}{10}(a^2 + b^2)2\Omega_c\varepsilon = \frac{m}{5}a^22\Omega_c r\varepsilon$$

Il vient donc $r = \frac{a^2 + b^2}{2a^2}$

Q42 $b > a$ donc $r > 1$ donc $\Omega_f > \Omega_0$. Lors de son redressement, la vitesse de rotation de l'oeuf augmente.

Dans le cas où $a = b$, c'est-à-dire dans le cas d'un oeuf sphérique, on retrouve $r = 1$ puisque le système reste inchangé (dans ce cas, on ne peut même plus parler de redressement), donc sa vitesse de rotation ne varie pas.

7. On a $L_H = J_H \Omega_0 = \frac{m}{5}(a^2 + b^2)(\Omega_c + \varepsilon)$ et $L_V = J_V \Omega_f = \frac{2m}{5}a^2(\Omega_c + r\varepsilon)$

On en déduit $\Delta L = \frac{m}{5}(a^2 - b^2)\Omega_c + \frac{m}{5}(2a^2r - a^2 - b^2)\varepsilon$

En injectant l'expression de r obtenue précédemment, le second terme est nul, d'où

Q43 $\Delta L = \frac{m}{5}(a^2 - b^2)\Omega_c < 0$

Le moment cinétique de l'oeuf a diminué lors de son redressement.

8. D'après le théorème du moment cinétique, on peut écrire $\frac{dL}{dt} = C_z$. En supposant que le redressement est de courte durée, on peut approcher $\frac{dL}{dt}$ par $\frac{\Delta L}{\Delta t}$, on a donc

$$C_z = \frac{m}{5}(a^2 - b - 2)\frac{\Omega_c}{\Delta t} = \frac{m}{5}(a^2 - b - 2)\frac{\Omega_c^2}{\Omega_c \Delta t}$$

Q44 On injecte l'expression de Ω_c obtenue à la question 3 :

$$C_z = \frac{m}{5}(a^2 - b^2)\frac{10g}{(a+b)\Omega_c \Delta t} = \frac{2mg(a-b)}{\Omega_c \Delta t}$$

Ce couple est négatif, ce qui est cohérent avec le fait que le moment cinétique de l'oeuf ait diminué pendant le redressement.

Q45 9. Le poids et la réaction normale ne peuvent pas être responsable d'un tel couple car ces deux forces sont parallèles à l'axe de rotation, donc leur moment par rapport à cet axe est nul. Ce couple peut éventuellement provenir des frottements, car on nous dit dans le document qu'il faut que la surface ne soit "pas trop lisse". Cependant, cela contredit l'hypothèse de l'énergie mécanique constante.