Conseils :

- Ce devoir comporte deux exercices.
- Le correcteur tiendra compte de la **présentation** (soin apporté aux schémas) et de la **rédaction de votre copie** : justifiez rapidement vos affirmations, donnez la **valeur littérale simplifiée** des résultats en fonction des données de l'énoncé, **vérifiez l'homogénéité et la cohérence** (tout résultat non homogène sera sanctionné).

  Les résultats NON ENCADRÉS ne seront pas notés. Laissez une marge à gauche pour le correcteur.
- Numérotez les questions et ajoutez le label de la marge Q1, etc.
- L'usage des **calculatrices n'est pas autorisé**.

I. Analyse dimensionnelle : chauffage d'un lingot

À partir du moment où l'on rentre un lingot froid dans un four chaud, la vitesse à laquelle augmentera la température au centre va déprendre des facteurs géométriques (on notera l la longueur du lingot), de la conductibilité thermique k, et de l'inertie thermique dans laquelle interviennent la capacité thermique massique à pression constante c_P et la masse volumique ρ.

On note t la durée nécessaire pour atteindre une température donnée au centre du lingot. Cette durée doit dépendre des paramètres du système mentionnés ci-dessus. On pose donc

$$t = A\, c_p^a\, \rho^b\, k^c\, l^d$$

où A est une constante sans dimension.

- on note $[T] = \theta$ la dimension de la température et $[t] = T$ celle du temps ;
- par définition $c_p = \dfrac{1}{m}\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}$ (en maintenant la pression constante), où H représente l'enthalpie (homogène à une énergie) du système de masse m ; T est la température.
- la « conductibilité » thermique ou « conductivité » thermique lie le vecteur densité de flux thermique j (homogène à une puissance P par unité de surface) à la variation de température dans le milieu : $j = \dfrac{P}{S} = -k\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ (où x représente une coordonnée de position).

Q1 1. Rappeler le lien entre énergie et puissance. En déduire la dimension d'une puissance. Justifier.

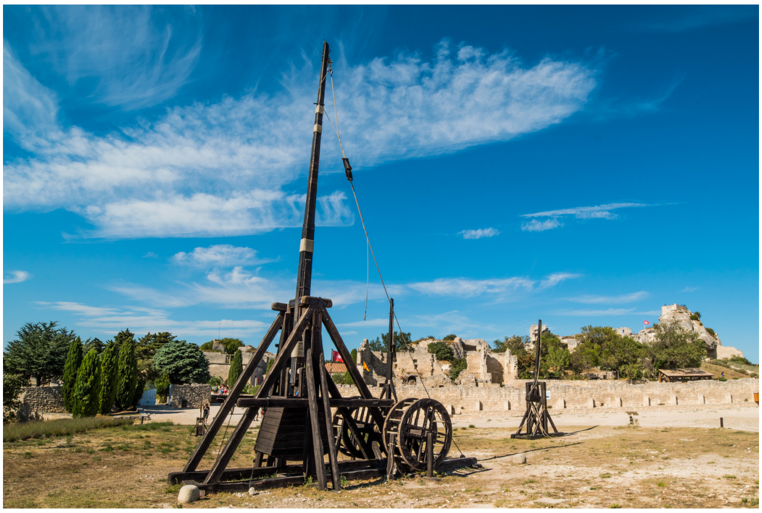
Q2 2. Quelle est la dimension de la conductivité thermique k ? Justifier.

Q3 3. Quelle est la dimension de la capacité thermique massique à pression constante c_p ? Justifier.

Q4 4. Déterminer les exposants de l'expression $t = A\, c_p^a\, \rho^b\, k^c\, l^d$ et en déduire sa forme finale.

II. Le trébuchet

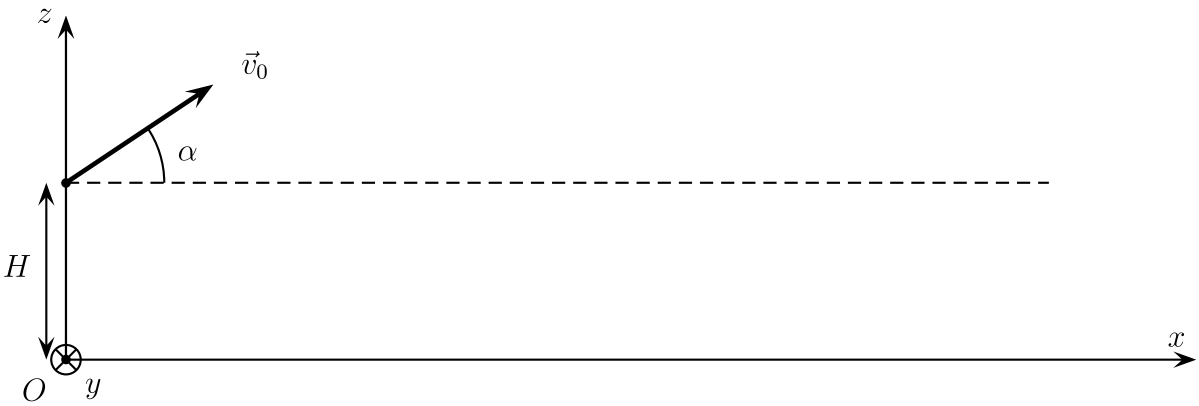
Le trébuchet est une machine de guerre utilisée au Moyen-Âge au cours des sièges de châteaux forts. Le projectile pouvait faire des brèches dans les murailles des châteaux forts situés à plus de 200 m du trébuchet.



Un contrepoids relié à un levier est maintenu à une certaine hauteur. Il est brusquement libéré. Au cours de sa chute, il agit sur un levier au bout duquel se trouve une poche en cuir dans laquelle est placé un projectile.

Lors de sa libération, le projectile de la poche se trouve à une hauteur H et est projeté avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale. Le vecteur $\vec{v}_0$ appartient au plan Oxz.

Le mouvement du projectile s'effectue dans un champ de pesanteur uniforme ($\vec{g}$ est parallèle à l'axe Oz). Les frottements de l'air et la poussée d'Archimède sur le projectile seront négligés dans cette étude.



Données :

- ➢ masse du projectile $m = 130$ kg,
- ➢ intensité du champ de pesanteur $g = 10$ u.S.I.,
- ➢ hauteur du projectile au moment du lancer $H = 10$ m,
- ➢ $\sqrt{1/2} = 0{,}707$.

Q5 1. Donner la dimension de g en justifiant votre réponse. En déduire son unité.

Q6 2. Donner les caractéristiques (sens, direction et norme) du poids $\vec{P}$ du projectile. Faire l'application numérique pour la norme du poids en veillant aux nombre de chiffres significatifs.

Q7 3. Déterminer les trois coordonnées du vecteur accélération du centre d'inertie du projectile dans le repère indiqué.

Q8 4. Déterminer les trois coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}$ du système au cours de son mouvement.

Q9 5. Déterminer les équations horaires $x(t), y(t), z(t)$ du mouvement du projectile.

Q10 6. Déterminer l'équation de la trajectoire du projectile. Quelle est la nature de cette trajectoire ?

Q11 7. En utilisant l'équation de la trajectoire, indiquer les paramètres de lancement qui jouent un rôle dans le mouvement du projectile.

8. Le projectile est lancé avec une vitesse initiale horizontale :

Q12 (a) Déterminer l'abscisse de son point de chute.

Q13 (b) Vérifier de façon explicite que l'équation obtenue est homogène.

Q14 (c) Avec quelle vitesse initiale v_0 horizontale, le projectile doit-il être lancé pour atteindre la base du mur situé à une distance $x = 100$ m ? Faire l'application numérique.

Q15 (d) Quelle sera l'expression de la vitesse v_f du projectile au moment de l'impact ?

Q16 9. Retrouver la vitesse finale de la question précédente par une méthode énergétique.

On pourra par exemple utiliser la conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial et l'impact final.

On exprimera v_f de façon littérale en fonction de v_0 supposé connu, et des paramètres de l'énoncé.

Remarques générales

A. Note et barème

Mes abréviations : A.N. = application numérique ; C.S. = chiffre significatif ; C.I. = conditions initiales ; pq = pourquoi.

Pour votre note, il faut bien comprendre que l'échelle de notation n'est plus la même qu'au lycée et il ne faut pas s'en formaliser. Avoir « 10 » ou n'importe qu'elle autre note n'a plus du tout le même sens. Ce n'est qu'**une** note qui représente **cette** copie **ce** jour précis. Si vous avez eu une mauvaise note, rien ne dit que vous en aurez toute l'année et réciproquement.

Au même titre, le classement n'est pas indiqué pour vous stigmatiser, mais pour vous aider à vous repérer dans la classe.

B. Comment progresser ?

Un des moyens de progresser le plus important est d'apprendre de ses erreurs. En tant qu'étudiant, il est **normal** de faire des erreurs et de ne pas avoir tout compris. Les devoirs servent entre autre à vous faire prendre conscience de ce que vous savez et de ce que vous ne savez pas. Il est donc **<u>extrêmement</u>** important de retravailler les devoirs en se posant par exemple les questions suivantes sur les points que vous avez mal traités ou que vous n'avez pas réussi :

1. Pourquoi n'ai je pas su faire cette question ? (En particulier, est-ce que j'ai mal lu l'énoncé, est-ce que j'ai mal compris l'énoncé, est-ce que je ne connaissais pas / pas assez bien mon cours, ai-je voulu aller trop vite, me suis-je trop creusé la tête pour pas grand chose ?)
2. Quel schéma aurai-je pu faire et comment représenter les grandeurs dessus (cela ne fonctionne pas pour toutes les questions, mais ça reste quelque chose de très important) ?
3. Quelles connaissances de cours étaient nécessaires pour cette question et est-ce que je les maitrisais ?
4. À quelle exercice ou exemple de cours ou TP cette question aurait dû me faire penser ?
5. Est-ce j'ai compris le corrigé ? Est-ce que je saurais refaire la question si on me la redonnait demain ?

C. Les erreurs fréquentes

- Attention à la gestion du temps. Il ne faut "ni trainer, ni se précipiter". Il faut justifier avec tous les arguments, mais ne rajoutez pas d'arguments inutiles et ne faites pas non plus de grandes phrases si quelque chose de plus court convient.
- La propreté, le soin et l'orthographe dans les copies est importante. En particulier l'usage de l'effaceur et du correcteur orthographique (« blanc ») est à limiter très très fortement. Dans le cas où un paragraphe ou une phrase entière doivent « disparaitre » de la copie, il vaut mieux les rayer **proprement** à la règle plutôt que de tout effacer (gain de temps et de propreté).
- On change de page (voire même de copie si c'est demandé) pour faire un nouvel exercice.
- Gardez l'énoncé, il ne doit pas être rendu avec la copie. Si quelque chose doit être complété, l'énoncé fournira une feuille à part où vous pourrez inscrire votre nom.
- Attention à ce que j'appelle des « arnaques » (volontaires ou non) : je connais le résultat que je veux trouver, je change « miraculeusement » certains signes pour que de mon hypothèse fausse arrive à un résultat juste. C'est très mal vu par les correcteurs.
- Lorsque la réponse est donnée dans l'énoncé, il est indispensable d'être **irréprochable** au niveau de ses justifications.

I. ANALYSE DIMENSIONNELLE : CHAUFFAGE D'UN LINGOT

1. De façon générale, la puissance reçue (ou fournie) est « le taux d'énergie reçue », c'est-à-dire $\boxed{P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}$. Une autre formule envisageable est : si la puissance est constante, alors, l'énergie échangée pendant un temps Δt vaut

$$\boxed{E = P \times \Delta t}$$

Q1 On en déduit la dimension d'une puissance (qui nous servira dans les questions suivantes) :

$$\boxed{[P] = \frac{[E]}{T} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{T} = M.L^2.T^{-3}}$$

Q2 2. On utilise la formule fournie (avec : $[\mathrm{d}T] = [T] = \theta$ et $[\mathrm{d}x] = L$)

$$\left[\frac{P}{S}\right] = \left[-k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right] \Rightarrow \frac{M.L^2.T^{-3}}{L^2} = [k]\,\frac{\theta}{L} \Rightarrow \boxed{[k] = M.L.T^{-3}\theta^{-1}}$$

Soyez attentif aux notations. Ne pas confondre T la température et t le temps ici.

3. Une fois encore, on utilise la formule donnée pour déterminer la dimension de la capacité
Q3 thermique massique à pression constante c_p.

$$[c_p] = \left[\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}\right] = \frac{1}{M}\frac{M.L^2.T^{-2}}{\theta} \Rightarrow \boxed{[c_p] = L^2.T^{-2}\theta^{-1}}$$

4. En utilisant les résultats des questions précédentes et la forme fournie par l'énoncé pour t, on en déduit l'équation aux dimensions suivantes :

$$[t] = [A]\,[c_p]^a\,[\rho]^b\,[k]^c\,[l]^d = 1 \times \left(L^2.T^{-2}\theta^{-1}\right)^a \times \left(M.L^{-3}\right)^b \times \left(M.L.T^{-3}\theta^{-1}\right)^c \times (L)^d$$

On rassemble ensuite par dimension :

$$T = M^{b+c} \times L^{2a-3b+c+d} \times T^{-2a-3c} \times \theta^{-a-c}$$

On en déduit le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 0 &=& b+c \Rightarrow b=-c & (1)\\ 0 &=& 2a-3b+c+d & (2)\\ 1 &=& -2a-3c & (3)\\ 0 &=& -a-c \Rightarrow c=-a & (4) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcll} c &=& -a & (4)\\ b &=& -c \;=\; a & (1)\\ 1 &=& -2a-3(-a) \Rightarrow a=1 & (3)\\ d &=& -2a+3b-c \;=\; 2a & (2) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcll} a &=& 1 & (3)\\ c &=& -1 & (4)\\ b &=& 1 & (1)\\ d &=& 2 & (2) \end{array}\right.$$

Q4 On en déduit la forme finale : $\boxed{t = A\frac{\rho\, c_p}{k}l^2}$

II. Le trébuchet

Q5 1. Utilisons par exemple une formule issue du principe fondamental de la dynamique : $[ma] = [mg]$ donc g a la dimension d'une accélération : $\boxed{[g] = \mathrm{L.T}^{-2}}$. On en déduit une unité possible : $\mathrm{m/s^2}$ (qui est ici en effet l'unité usuelle).

Q6 2. Poids $\vec{P}$ du projectile : à la verticale, vers le bas selon $-\vec{e}_z$, de norme $P = mg$.

Attention, vous avez été nombreux à confondre direction et sens !

Soit $P = 130 \times 10$, $\boxed{P = 1{,}3.10^3\ \mathrm{N}}$ On a gardé 2 chiffres significatifs.

Remarque : ici, l'énoncé indiquait $g = 10\,\mathrm{u.S.I.}$ ce qui représente « normalement » 2 chiffres significatifs. Toutefois, on sait que $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, ce qui est la « vraie » valeur avec 2 chiffres significatifs. On pourrait donc penser que l'énoncé n'utilise qu'un chiffre significatif (car on connait la valeur de g). En fait, le but de l'énoncé était de vous faire travailler avec deux chiffres significatifs, mais avec des calculs plus faciles à faire avec 10 qu'avec 9,8. L'énoncé était sur ce point ambigu, les réponses avec 1 ou 2 chiffres significatifs sont comptées juste.

Attention, l'unité usuelle pour une force est le Newton (N). Écrire kg.m.s^{-2} n'est pas à strictement parlé faux, mais montre que vous manquez d'expérience en mécanique. De plus, pour avoir une force en Newton, il faut bien entendu prendre la masse en kg.

Q7 3. Système : le projectile.
Référentiel : terrestre $\mathcal{R}_g$ considéré comme galiléen.
Bilan des forces : uniquement le poids.
On applique le principe fondamental de la dynamique au système dans $\mathcal{R}_g$: $m\vec{a} = m\vec{g}$, soit $\vec{a} = \vec{g}$, d'où en projetant sur les vecteurs de base : $\boxed{a_x = 0 \quad a_y = 0 \quad a_z = -g}$

Q8 4. On intègre les relations précédentes en tenant compte de la condition initiale sur la vitesse : $\vec{v}_0 = v_0\cos(\alpha)\vec{e}_x + v_0\sin(\alpha)\vec{e}_z$, d'où : $\boxed{v_x = v_0\cos(\alpha)\ ;\ v_y = 0\ ;\ v_z = -gt + v_0\sin(\alpha)}$

Q9 5. On intègre à nouveau en tenant compte de la condition initiale sur la position : $\overrightarrow{OM}_0 = H\vec{e}_z$ d'où : $\boxed{x(t) = v_0\cos(\alpha)t\ ;\ y(t) = 0\ ;\ z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0\sin(\alpha)t + H}$

Q10 6. On élimine t pour obtenir l'équation de la trajectoire du projectile : $\boxed{z = \frac{-gx^2}{2v_0^2\cos^2(\alpha)} + \tan\alpha x + H}$

Le projectile décrit une $\boxed{\text{parabole}}$. (Remarque : on suppose v_0 et α non nuls)

Q11 7. Si la hauteur H est constante, v_0 et α influent sur la trajectoire.

8. Le projectile est lancé avec une vitesse initiale horizontale donc $\alpha = 0$, $\cos(\alpha) = 1$ et $\tan(\alpha) = 0$.

Q12 (a) « Le projectile touche le sol »se met en équation sous la forme : $z = 0$. On cherche x pour $z = 0$, d'où $H = \frac{gx}{2v_0^2}$ soit $\boxed{x = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}}$

Attention, vous avez été trop nombreux à remplacer H et/ou g par leur valeur numérique dans cette formule. Si vous le faites, on obtient $x = v_0\sqrt{2}$ ce qui n'est pas homogène !

Q13 (b) $[x] = $ L et $\left[v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}\right] = L.T^{-1}\frac{L^{1/2}}{(L.T^{-2})^{1/2}} = L$
L'équation est donc bien homogène.

Q14 (c) $v_0 = x\sqrt{\frac{g}{2H}}$ A.N. : $v_0 = 100 \times \sqrt{\frac{10}{2\times 10}} = 100 \times 0{,}707$ $\boxed{v_0 = 71 \text{ m.s}^{-1}}$. On a gardé deux chiffres significatifs. Faites bien des calculs $\boxed{\text{analytiques}}$.

Trop d'erreurs de calcul ici ! Par exemple** $100^2 = 1000$, $130 \times 10 = 1{,}3 \times 10^2$ **ou encore** $100 \times 0{,}707 = 707$. **Un certain nombre d'erreur aurait pu être évitée si le résultat avait été simplifié. L'énoncé donne** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **: utilisez le et ne laissez pas de** $\sqrt{2}$ **dans le résultat.

(d) Cherchons le temps t_f qui correspond à l'impact.
Il y a impact lorsque $z(t_f) = 0$, or $z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + H$ d'où $t_f = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Reportons cette valeur dans les coordonnées de la vitesse pour pouvoir calculer sa norme :

Q15 $v_x = v_0 \quad v_z = -gt_f = -\sqrt{2gH}$ d'où $v_f = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$

$\boxed{v_f = \sqrt{v_0^2 + 2gH}}$

Q16 9. Utilisons la conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial et l'impact final. $E_{m,0} = E_{m,f} \Rightarrow E_{c,0} + E_{P,0} = E_{c,f} + E_{P,f}$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

On retrouve bien l'expression précédente : $\boxed{v_f = \sqrt{v_0^2 + 2gH}}$