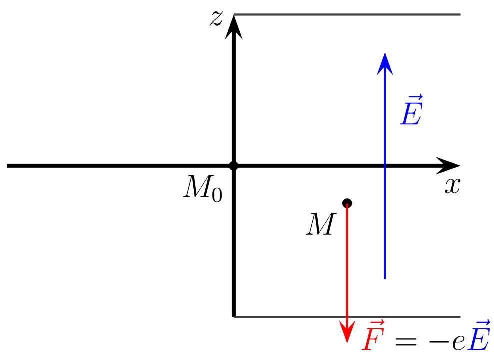
TD 0 - RÉVISIONS MÉCANIQUE

Exercice 1 : Électron dans un champ électrique uniforme
Un électron pénètre, en un point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ entre deux plaques A et B d'un condensateur plan où règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{e}_z$.
On étudie le mouvement de l'électron dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

1. Établir les caractéristiques du vecteur accélération $\vec{a}$ de l'électron, sachant que le poids de l'électron est négligeable devant la force électrique qui s'exerce sur lui.
2. Établir les équations horaires $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de la position M de l'électron en prenant pour origine des dates $t_0 = 0$, à l'instant où l'électron passe au point O.
3. En déduire l'équation de la trajectoire des électrons entre les deux plaques du condensateur. Quelle est sa nature ? Tracer l'allure de la trajectoire.
4. Mêmes questions avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ dans le plan Oxz et faisant un angle α avec l'axe Ox.

Un schéma est vivement conseillé (ce n'est pas toujours indispensable, mais c'est tellement souvent utile qu'il **faut** prendre le réflexe d'en faire systèmatiquement un ou plusieurs).



Le schéma présente 2 positions de l'électrons : à $t = 0$ en $M_0 = O$ et à un temps quelconque. Du point de vu des forces, on a toujours intérêt à faire un schéma à un instant quelconque (même si ici ça ne change rien car les forces sont constantes), du point de vu des constantes d'intégrations, il faut un schéma à $t = 0$ avec la vitesse.

1. Le référentiel (posé par l'énoncé) étant **galiléen**, on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) au système $\{$ électron $\}$. La seule force considérée est la force électrique (le poids étant négligée) d'où $m\vec{a} = q\vec{E} = -e\vec{E}$, soit $\vec{a} = \frac{-e}{m}\vec{E}$. Le vecteur $\vec{a}$ est donc :
   — de direction O_z ;
   — de sens $-\vec{e}_z$ si $E > 0$ et $+\vec{e}_z$ dans le cas contraire ;
   — de norme $\frac{e}{m}|E|$
   (Attention, rien n'est précisé sur le signe de E, même s'il a été supposé positif sur le schéma).
2. Par projection de la relation précédente sur les 3 axes :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) & = & 0 \\ \ddot{y}(t) & = & 0 \\ \ddot{z}(t) & = & \frac{-e}{m}E \end{cases}$$

Par intégration

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &=& cte = v_0 \\ \dot{y}(t) &=& cte' = 0 \\ \dot{z}(t) &=& \frac{-e}{m}Et + cte'' = \frac{-e}{m}Et + 0 \end{cases}$$

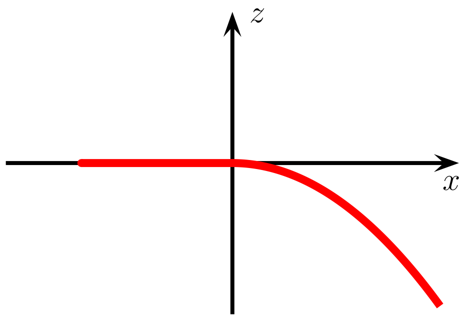
(on trouve les constantes d'intégration grâce aux conditions initiales).
Encore une intégration :

$$\begin{cases} x(t) &=& v_0 t + cte_3 = v_0 t \\ y(t) &=& cte_4 = 0 \\ z(t) &=& \frac{-e}{m}E\frac{t^2}{2} + cte_5 = \frac{-e}{m}E\frac{t^2}{2} + 0 \end{cases}$$

3. Pour trouver l'équation de la trajectoire, il faut trouver l'expression de z en fonction de x et non plus du temps ; pour cela on isole t dans la première équation et on remplace dans la troisième (inutile de s'intéresser à y qui reste nulle : le mouvement est plan dans le plan Oxz).

$$t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow z(x) = \frac{-e}{m}E\frac{x^2}{2v_0^2}$$

La fonction $z(x)$ est un polynôme de degré 2, on a donc affaire à une parabole.



4. (a) Première question inchangée : le pfd ne dépend pas des conditions initiales, seules les intégrations changent

(b)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &=& cte = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t) &=& cte' = 0 \\ \dot{z}(t) &=& \frac{-e}{m}Et + v_0 \sin\alpha = \frac{-e}{m}Et + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Puis deuxième intégration

$$\begin{cases} x(t) &=& cte = v_0 \cos(\alpha) t + 0 \\ y(t) &=& cte' = 0 \\ z(t) &=& \frac{-e}{m}E\frac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha) t + 0 \end{cases}$$

(c) la méthode est la même que précédemment. Si $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, alors $\cos\alpha = 0$ et le mouvement est rectiligne, sinon

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow z(x) = \frac{-e}{m}E\frac{x^2}{2v_0^2 \cos\alpha^2} + v_0 \sin(\alpha)\frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Exercice 2 : Retour sur les Jeux Olympiques de Rio

Cet exercice est de type résolution de problème.

Estimer l'ordre de grandeur de la hauteur que peut espérer atteindre un athlète lors de l'épreuve de saut à la perche. Vous introduirez les grandeurs et les valeurs numériques qui vous paraissent nécessaires.

Ce type de problème est assez difficile car il faut tout introduire soi-même.

Tout d'abord, il s'agit d'un problème de mécanique : nous aurons donc besoin de mobiliser les connaissances de cours en lien avec cela.
Qu'est-ce que je sais en mécanique ? Il faut tout lister quitte à supprimer des choses ensuite. Ici, deux approches doivent vous tenter au premier abord :

— une approche avec le pfd
— une approche énergétique

Puisque l'on ne connait pas et que l'on n'a pas de modèle pour la force exercée par la perche, le pfd est non pertinent.

D'un point de vue énergétique, prenons comme système le perchiste + sa perche, comme état initial la fin de la course du perchiste et comme état final le moment où le perchiste est au plus haut. Si on suppose une conservation de l'énergie mécanique (il n'y a normalement pas de "moteur" dans la perche [1] pour apporter de l'énergie),
La conservation (supposée ici, non prouvée) de l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_{m,initiale} = E_{m,finale} \Leftrightarrow E_{c,initiale} + E_{p_{pes},initiale} + E_{p_{elas},initiale} = E_{c,finale} + E_{p_{pes},finale} + E_{p_{elas},finale}$$

La perche n'était pas tordue, ni à l'état initiale, ni à l'état final, l'énergie qu'elle contient à ces deux instants est nulle (ou en tout cas identique).

De plus, on peut estimer que la vitesse au moment du franchissement de la barre est faible par rapport à la vitesse initiale (et ce d'autant plus que c'est v^2 qui intervient et non v dans la formule) : on négligera donc la vitesse finale.

En notant v_0 la vitesse initiale, z_0 la hauteur initiale du centre de masse, m la masse du perchiste et z_{max} la hauteur maximale la relation précédente devient :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 = 0 + mgz_{max} \Rightarrow z_{max} - z_0 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

En terme de vitesse : un sprinteur peut courrir le $100\,\mathrm{m}$ en $10\,\mathrm{s}$, soit une vitesse moyenne de $10\,\mathrm{m/s}$. Il s'agit d'une vitesse moyenne et donc en vitesse de pointe ils vont un peu plus vite. Toutefois, un perchiste doit courir avec la perche ...ce qui est moins confortable. $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ sera donc une approximation raisonnable. m n'intervient pas dans notre calcul, d'où $z_{max} - z_0 \simeq 5\,\mathrm{m}$ La hauteur z_0 étant à peu près « au milieu du corps », elle se trouve à environ $1\,\mathrm{m}$ de haut, soit un z_{max} de l'ordre de $6\,\mathrm{m}$ d'après nos estimations (avec un seul chiffre significatif !). À l'heure actuelle, le record mondiale est de 6,16 m et est détenue par un français : Renaud Lavillenie (15 février 2014).

1. mais comme nous le dirons plus tard, il y a un petit "moteur" qui peut apporter de l'énergie dans le système en fait : le perchiste grâce à ses muscles.

Critique des hypothèses : la conservation de l'énergie est critiquable à 2 égards : le perchiste "ajoute un peu d'énergie" grâce au travail de ses muscles ce qui fait que l'on sous-estime la hauteur d'un coté, et d'un autre coté il y a des pertes dans la perche et énergie cinétique n'est pas parfaitement nulle au moment du franchissement. Ces deux effets allant dans un sens opposé, on peut espérer que notre raisonnement ne donne pas un résultat trop erroné, même s'il faut garder en tête que ce n'est qu'un ordre de grandeur.