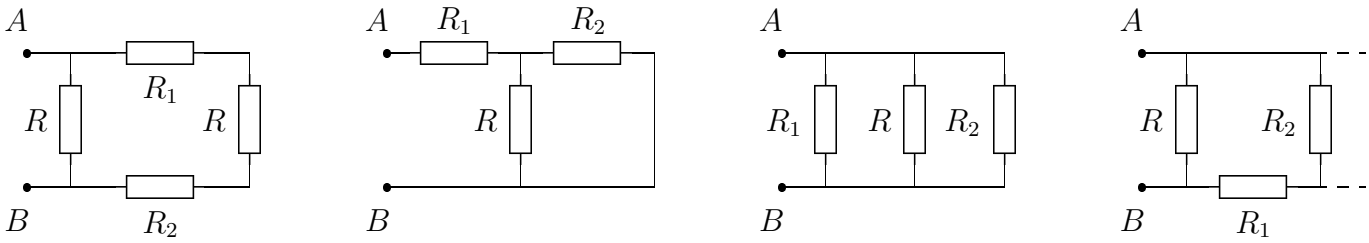
TRAVAUX DIRIGÉS EC_1

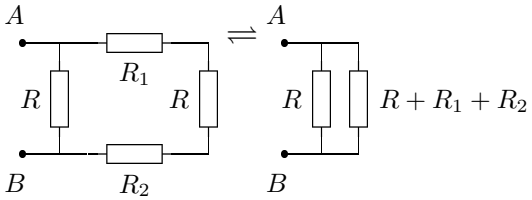
Exercice 1 : Série ou parallèle ?



Les résistors R_1 et R_2 sont-ils en série, en parallèle ou ni l'un ni l'autre ?
Déterminer, si c'est possible, la résistance équivalente comprise entre les points A et B.

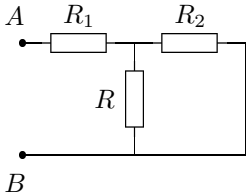
Premier circuit :

R_1, R_2 (et R) sont sur la même branche, ils sont donc montés en série.
La résistance R_{AB} est équivalente à l'association parallèle de R avec $R + R_1 + R_2$.
On a donc $R_{AB} = R//(R + R_1 + R_2) = \frac{R(R+R_1+R_2)}{2R+R_1+R_2}$

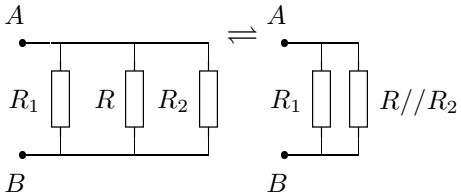


Deuxième circuit :

R_1 et R_2 ne sont pas sur la même branche et leurs deux pôles ne sont pas directement liés par des fils comme le sont R et R_2. R_1 et R_2 ne sont donc montés ni en série ni en parallèle. On peut tout de même calculer R_{AB} équivalente à l'association R_1 en série avec l'association R et R_2 en parallèle : $R_{AB} = R_1 + (R//R_2) = R_1 + \frac{RR_2}{R+R_2}$

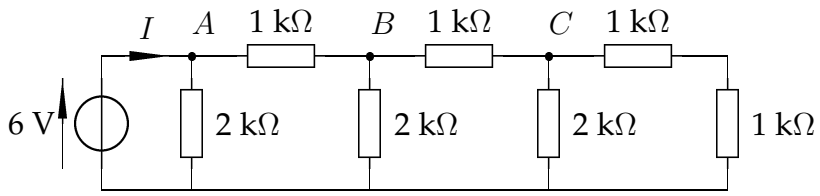


Troisième circuit : les deux bornes de R_1, R_2 (et R) sont directement liés par des fils, ils sont donc montés en parallèle et $G_{AB} = G_1 + G + G_2 \Rightarrow \frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{AB} = \frac{RR_1R_2}{RR_1+RR_2+R_1R_2}$

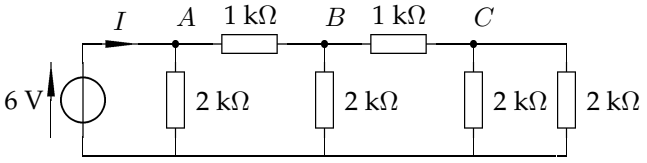


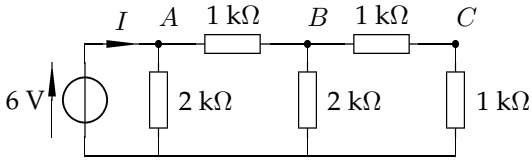
Quatrième circuit : les pointillés suggèrent que le circuit se prolonge à droite. Les résistors R_1 et R_2 ne sont donc montés ni en série, ni en parallèle. D'autre part, comme on ne connaît pas la suite du réseau, on ne peut pas déterminer R_{AB}.

Exercice 2 : Application de la loi d'Ohm
Déterminer l'intensité I à la sortie du générateur présent dans le circuit suivant.

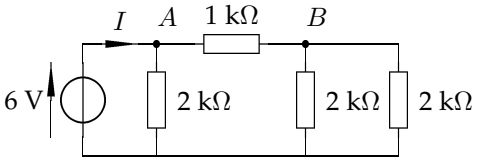


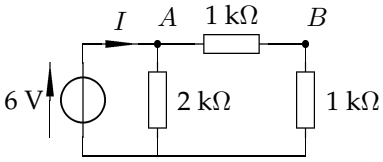
On procède par simplifications successives. Sur le circuit initial, seuls les deux résistors de 1 kΩ sont en série, on les associe pour obtenir le premier circuit ci-dessous. Sur ce dernier, on voit que les deux résistors de 2 kΩ situés à droite sont en parallèle. On les associe en un seul de résistance $\frac{2\times 2}{2+2} = 1$ kΩ (circuit ci-dessous à droite).

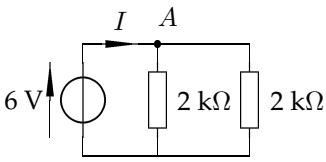




On poursuit ensuite la simplification :

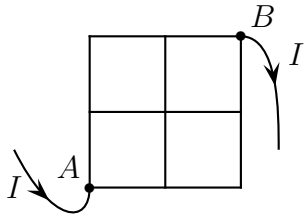






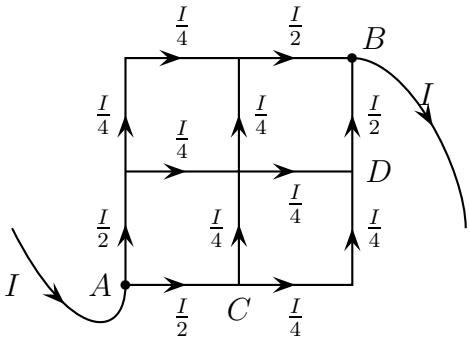
Et finalement, on se ramène à un générateur idéal de tension débitant un courant I dans un résistor unique de résistance $R = 1$ kΩ.
L'application de la loi d'Ohm donne simplement $I = \frac{6}{1000} = 6.10^{-3}$ A soit 6 mA.

Exercice 3 : Résistance équivalente à une grille 2×2.



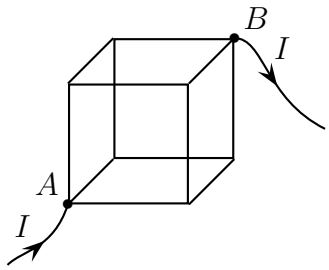
Chaque trait représente un résistor de résistance R.
Déterminer, par symétrie, l'intensité du courant dans chaque conducteur.
En déduire la résistance équivalente du réseau vu entre les points A et B.

On est dans le cas particulier où à chaque nœud rencontré, le courant électrique se divise en deux courants d'intensités égales car le réseau a exactement la même structure selon les deux chemins offerts.



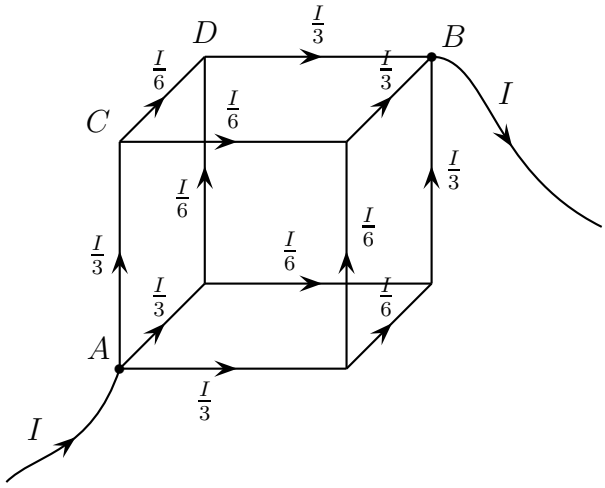
Par exemple en A, que le courant passe par le résistor situé à sa verticale ou à sa droite, la suite les composants rencontrés par la suite seront les même, on a donc $\frac{I}{2}$ dans ces deux résistors puis $\frac{I}{4}$ dans les suivants.
Enfin, les branches se rejoignent et on obtient à nouveau $\frac{I}{2}$ puis I conformément à la loi des nœuds.
On peut décomposer la tension $U_{AB} = U_{AC} + U_{CD} + U_{DB}$ et par application de la loi d'Ohm, $U_{AB} = R.\frac{I}{2} + 2R.\frac{I}{4} + R.\frac{I}{2} = 6R.\frac{I}{4} = \frac{3}{2}RI$.
Or, en appelant R_{AB} la résistance équivalent au réseau, on peut aussi écrire $U_{AB} = R_{AB}.I$.
Par identification, on en déduit $R_{AB} = \frac{3}{2}R$.

Exercice 4 : Résistance équivalente à un cube.



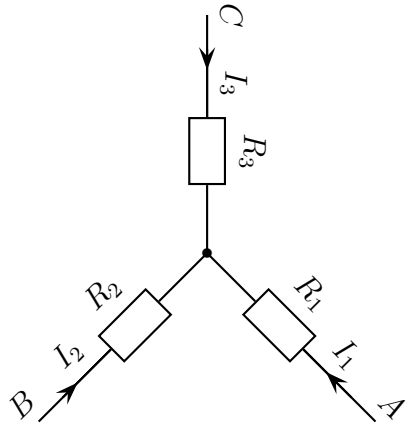
Un cube métallique est constitué de résistors, chaque arête possède une résistance R.
Déterminer, par symétrie, l'intensité du courant dans chaque conducteur.
En déduire la résistance équivalente du réseau vu entre les points A et B.

On est dans le cas particulier où à chaque nœud rencontré, le courant électrique se divise en deux courants d'intensités égales car le réseau a exactement la même structure selon les deux chemins offerts.

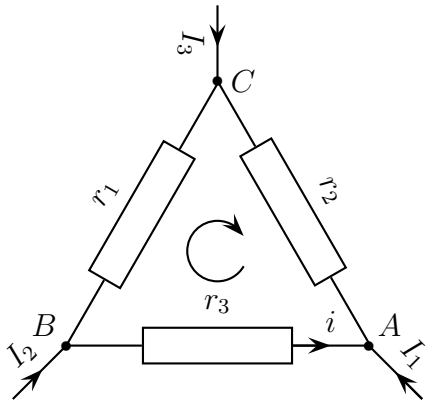


Par exemple en A, que le courant passe par le résistor situé à sa verticale, vers le fond ou à sa droite, la suite les composants rencontrés par la suite seront les même, on a donc $\frac{I}{3}$ dans ces deux résistors puis $\frac{I}{6}$ dans les suivant.
Enfin, les branches se rejoignent et on obtient à nouveau $\frac{I}{3}$ puis I conformément à la loi des nœuds.
On peut décomposer $U_{AB} = U_{AC} + U_{CD} + U_{DB}$ et par application de la loi d'Ohm,
$U_{AB} = R.\frac{I}{3} + R.\frac{I}{6} + R.\frac{I}{3} = \frac{5}{6}RI$.
Or, en appelant R_{AB} la résistance équivalent au réseau, on peut aussi écrire $U_{AB} = R_{AB}.I$.
Par identification, on en déduit $R_{AB} = \frac{5}{6}R$.

Exercice 5 : Théorème de Kennely : Étoile $\iff$ triangle
Lors de l'étude de certains réseaux, il peut être utile de remplacer une association "triangle" en une association "étoile" ou inversement.



Association étoile

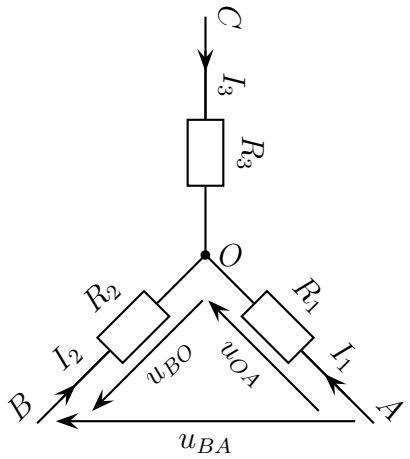


Association triangle

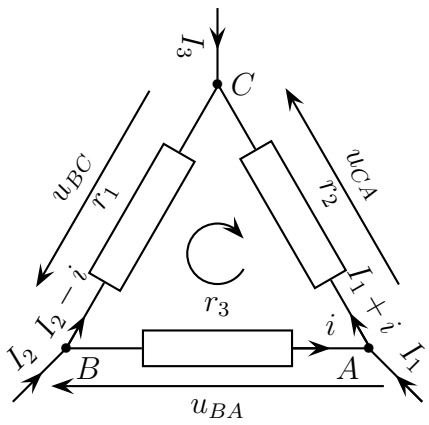
Il s'agit de déterminer les relations entre les résistances pour que les deux montages soient équivalents.

1. Déterminer u_{BA} dans les deux représentations en fonction de I_1, I_2 et I_3. On notera i l'intensité du courant dans r_3.
2. Ces relations doivent rester valables quelque soient les I_j, en déduire, par identification : R_1, R_2 et R_3 en fonction de r_1, r_2 et r_3.
3. Vérifier que $r_1 = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1}$, $r_2 = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_2}$ et $r_3 = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_3}$.
4. Application : déterminer R_1, R_2 et R_3 si $r_1 = r_2 = r_3 = R$.

1. Figure de gauche (étoile), on peut rapidement exprimer u_{BA} en fonction des intensités I_1 et I_2 : $u_{BA} = u_{BO} + u_{OA} = -R_1.I_1 + R_2.I_2$.



Association étoile



Association triangle

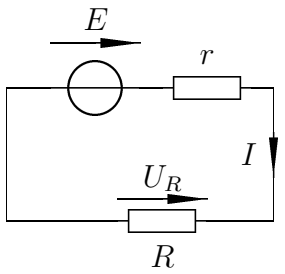
Figure de droite (triangle), on utilise directement la loi des nœuds pour faire figurer les intensités qui traversent les résistors.
On en déduit ensuite $u_{BA} = r_3.i = u_{BC} + u_{CA} = r_1.(I_2 - i) - r_2.(I_1 + i)$.
On isole ensuite i dans la seconde équation : $i.(r_3 + r_2 + r_1) = -r_2.I_1 + r_1.I_2 \Rightarrow i = -\frac{r_2}{r_1+r_2+r_3}I_1 + \frac{r_1}{r_1+r_2+r_3}I_2$.
Reste à remplacer dans l'expression de u_{BA} pour éliminer i : $u_{BA} = -\frac{r_2.r_3}{r_1+r_2+r_3}I_1 + \frac{r_1.r_3}{r_1+r_2+r_3}I_2$

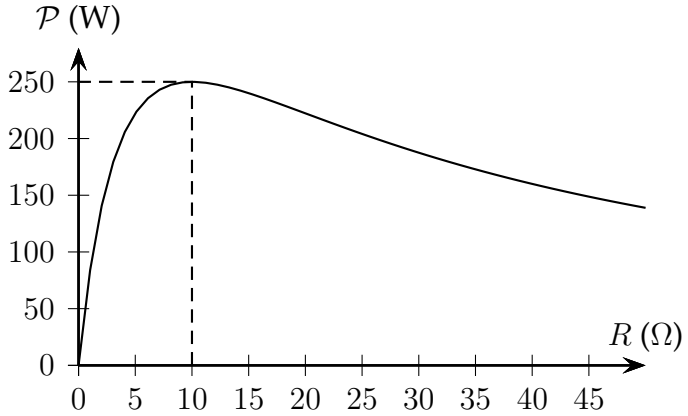
2. On a donc $u_{BA} = -\frac{r_2.r_3}{r_1+r_2+r_3}I_1 + \frac{r_1.r_3}{r_1+r_2+r_3}I_2$ pour toute valeur de I_1 et I_2.
   Par identification, on en déduit $R_1 = \frac{r_2.r_3}{r_1+r_2+r_3}$, $R_2 = \frac{r_1.r_3}{r_1+r_2+r_3}$ et par permutation circulaire des indices, $R_3 = \frac{r_1.r_2}{r_1+r_2+r_3}$.
3. En injectant les expressions précédentes dans $\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1}$, on montre (calculs fastidieux) que $r_1 = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1}$. Le même type de calculs permet de vérifier que $r_2 = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_2}$ et $r_3 = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_3}$ (fastidieux).
4. Application : si $r_1 = r_2 = r_3 = R$ on a $R_1 = R_2 = R_3 = \frac{R}{3}$.

Exercice 6 : Association de dipôles, puissance.
Soit un générateur de tension caractérisé par sa f.e.m. E et sa résistance interne r.
On branche entre ses bornes, une résistance réglable R.

1. Déterminer l'expression de l'intensité du courant qui circule dans le circuit.
2. Déterminer l'expression de la puissance $\mathcal{P}$ absorbée par R en fonction de E, r et R.
3. On considère la fonction $\mathcal{P}(R)$.
   Montrer qu'elle passe par un maximum $\mathcal{P}_{\max}$ à déterminer et tracer son allure pour $E = 100$ V et $r = 10\ \Omega$.

1. On commence par représenter le circuit en adoptant la représentation de Thévenin pour le générateur :





Par application de la loi des mailles (sens horaire), on écrit $E - rI - RI = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{r+R}$.
Remarque : on obtient directement cette expression à l'aide de la loi de Pouillet (EC_2)

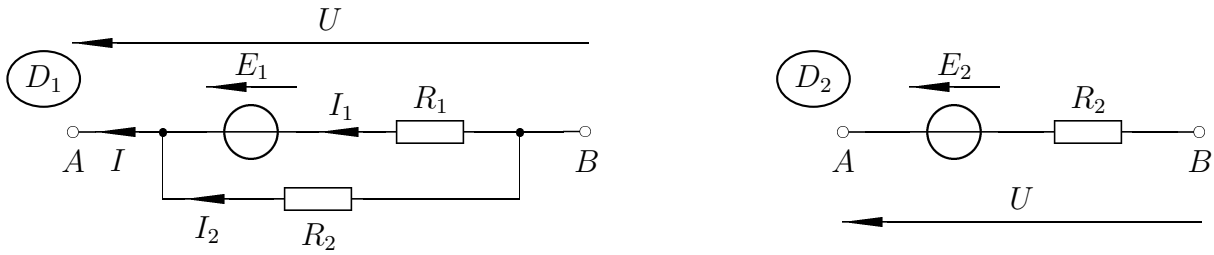
2. Le résistor R reçoit (en convention récepteur) et dissipe la puissance $\mathcal{P} = U_R.I = RI^2 = \frac{RE^2}{(r+R)^2}$
Pour déterminer son (ou ses) extremum, on résout l'équation

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = 0 \Rightarrow \frac{(r+R)^2 - R \times 2(R+r)}{(R+r)^4} = 0 \Rightarrow \frac{R+r-2R}{(R+r)^3} = 0 \Rightarrow R - r = 0 \Rightarrow R = r$$

Pour tracer l'allure de la courbe $\mathcal{P}(R)$, on remarque que $\mathcal{P}$ s'annule quand R tend vers 0 ou vers l'infini. C'est une fonction positive qui n'admet qu'un seul extremum : un maximum.
On remarque que pour avoir un transfert maximum de puissance entre la source (générateur de tension (E,r)) et la charge (résistor R), il faut que $r = R$. On parle d'adaptation d'impédance.

Exercice 7 : Caractéristiques de dipôles actifs

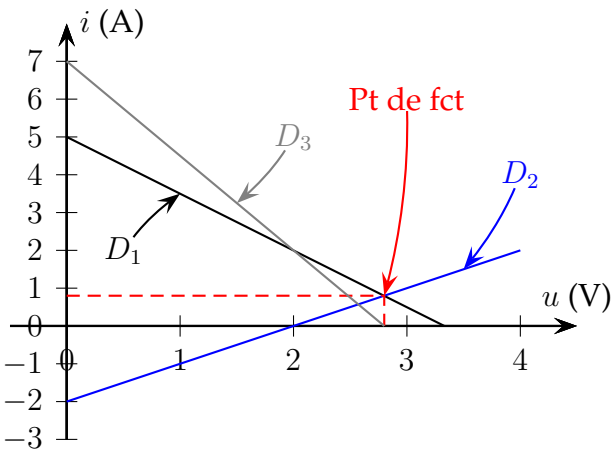
1. Tracer la caractéristique du dipôle D_1 représenté ci-dessous à gauche.

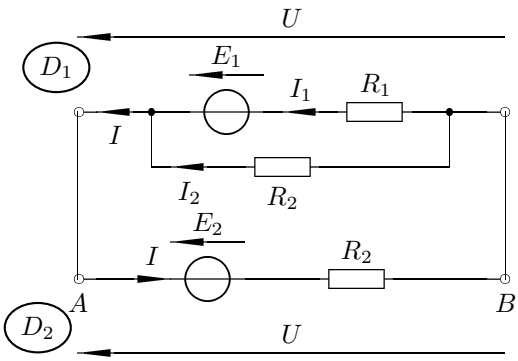


$E_1 = 10$ V, $E_2 = 2$ V, $R_1 = 2\ \Omega$ et $R_2 = 1\ \Omega$.

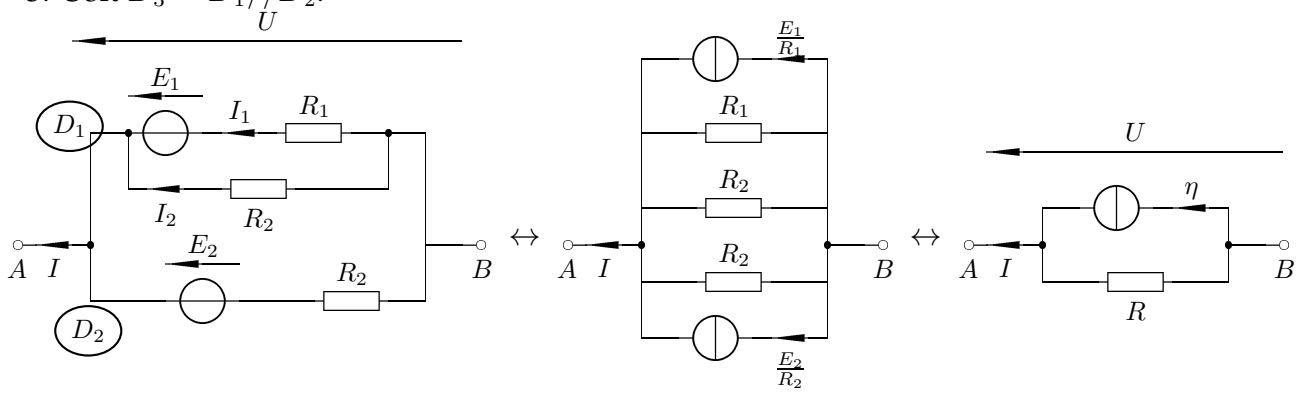
2. On ferme D_1 sur D_2 représenté ci dessus. Trouver graphiquement le point de fonctionnement du circuit constitué.
3. On considère le dipôle D_3 constitué par les dipôles D_1 et D_2 montés en parallèle entre A et B. En utilisant les transformations générateur de tension $\Longleftrightarrow$ générateur de courant, trouver son dipôle actif équivalent, puis sa caractéristique.

1. La caractéristique du dipôle D_1 est la portion de droite (dipôle linéaire en régime permanent) $I = f(U)$. On peut donc la tracer en déterminant l'expression de I en fonction de U.
Pour le dipôle D_1, la loi des nœuds (Cf figure ci-dessous) donne $I = I_1 + I_2$ avec d'après la loi d'Ohm $U = -R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = -\frac{U}{R_2}$ et $U = E_1 - R_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - U}{R_1}$ d'où $I = \frac{E}{R_1} - \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] U = 5 - \frac{3}{2}U$. On en déduit l'allure de la caractéristique.





2. En fermant D_1 sur D_2, D_1 sera en convention générateur et D_2 en convention récepteur.
   Au graphe précédent, on superpose la caractéristique du dipôle D_2 en convention récepteur : $u = E_2 + R_2 I \Rightarrow I = \frac{U}{R_2} - \frac{E_2}{R_2} = U - 2$ (Cf figure ci-dessus).
   L'intersection des deux caractéristique donne le point de fonctionnement du circuit.
   Sur le graphe, on relève : $U = 2{,}8$ V et $I = 0{,}8$ A.
   Remarque : on peut retrouver ce résultat en résolvant le système d'équations $\begin{cases} I = 5 - 1{,}5U \\ I = U - 2 \end{cases}$
3. Soit $D_3 = D_1 // D_2$.

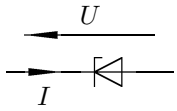


avec $\eta = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$, $R = R_1 // R_2 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{2R_1 + R_2}$ et $E = \eta R$ on en déduit $I = \eta - \frac{U}{R} = 7 - 2{,}5u$ d'où la caractéristique D_3 sur la figure.
Remarque : on pouvait retrouver cette caractéristique à partir de celles de D_1 et D_2 en convention générateurs. Comme il s'agit d'une association parallèle, il suffisait d'additionner les intensités à tension constante (Cf. cours).

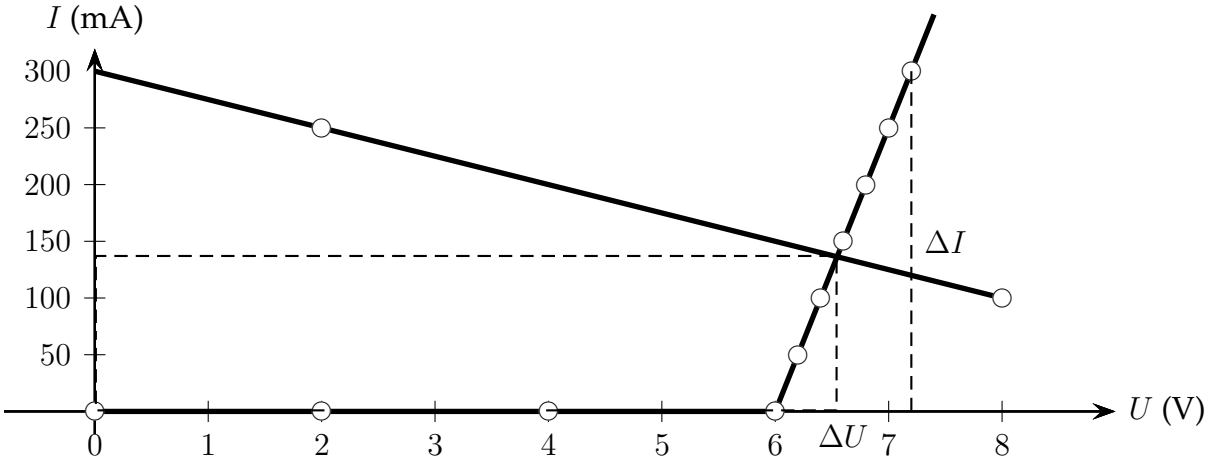
Exercice 8 : Point de fonctionnement d'une diode Zener
On a relevé la caractéristique statique d'un dipôle appelé "Diode Zener", en convention récepteur.

U (V)	0	2,0	4,0	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2
I (mA)	0	0	0	0	50	100	150	200	250	300

1. Tracer la caractéristique $I = f(U)$. S'agit-il d'un dipôle linéaire ?
2. Modélisation : linéarisation par partie.
   (a) Comment ce dipôle se comporte-t-il pour $0 \text{ V} \leqslant U \leqslant 6 \text{ V}$?
   (b) Déterminer l'équation de la courbe $I = f(U)$ puis $U = f(I)$ pour $6{,}0 \text{ V} \leqslant U \leqslant 7{,}2 \text{ V}$.
   En déduire un modèle de Thévenin équivalent à ce dipôle sur cet intervalle.
3. On associe à cette diode une pile de fem $E = 12$ V et de résistance interne $r = 40\ \Omega$. Déterminer graphiquement le point de fonctionnement (valeur de U et I pour la diode quand elle est connectée à la pile).

1. Caractéristique $I = f(U)$ de la diode Zener en convention récepteur (

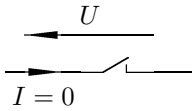
)



La caractéristique statique n'est pas rectiligne donc le dipôle n'est pas linéaire.

2. Modélisation : linéarisation par partie.

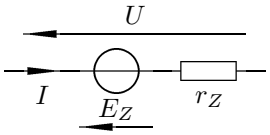
   (a) Pour 0 V $\leqslant U \leqslant 6$ V, $I = 0$, le courant ne passe pas, le composant se comporte comme un interrupteur ouvert (ou un résistor de résistance infinie).



   (b) Pour $6{,}0$ V $\leqslant U \leqslant 7{,}2$ V, I est une fonction affine de U soit $I = aU + b$ avec a la pente qu'on détermine à l'aide du graphe $a = \frac{\Delta I}{\Delta U} = \frac{0{,}3}{1.2} = 0{,}25$ A.V^{-1}. La courbe passe par $U = 6$ V, $I = 0$ mA, on en déduit la valeur de b car $0 = 6 \times 0{,}25 + b \Rightarrow b = -1{,}5$ A.

   On a finalement $I = 0{,}25U - 1{,}5 \Rightarrow U = \frac{I+1{,}5}{0{,}25} = 4I + 6$ avec I en A et U en V.

   Pour un générateur de Thévenin de fem E_Z et de résistance interne r_Z, en convention récepteur (c'est le cas ici !), on a $U = E_Z + r_Z I$.



   Par identification on en déduit $E_Z = 6$ V et $r_Z = 4\Omega$.

3. On obtient le point de fonctionnement en superposant les deux caractéristiques : celle de la diode en convention récepteur et celle du générateur de tension (la pile) en convention générateur : $u = E - rI$.

   La pile est un dipôle linéaire donc deux points nous suffiront pour effectuer le tracé :

   - pour $I = 250$ mA $= 0{,}25$ A on a $u = E - rI = 12 - 40 \times 0{,}25 = 2$ V
   - pour $U = 8$ V on a $I = \frac{E-U}{r} = \frac{12-8}{40} = 0{,}1$ A $= 100$ mA.

   On place ces deux points et on en déduit la caractéristique complète.

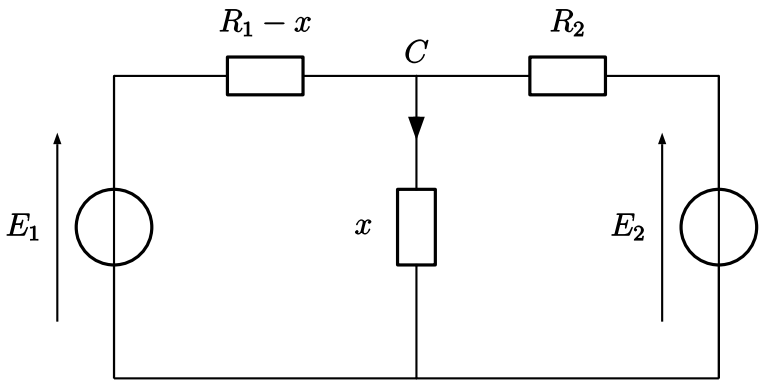
   On lit les coordonnées du point de fonctionnement sur le graphe : $U \simeq 6{,}6$ V et $I \simeq 140$ mA.

   Remarque : on obtient des valeurs plus précises en écrivant $U = E - rI$ la tension aux bornes de la pile est égale à $U = E_Z + r_Z I$ celle aux bornes de la diode Zener.

$$\Rightarrow E - rI = E_Z + r_Z I \Rightarrow I = \frac{E - E_Z}{r + r_Z} = \frac{12 - 6}{40 + 4} \simeq 0{,}136 \text{ A soit } 136 \text{ mA.}$$

   puis $u = E - rI = 12 - 40 \times 0{,}136 \simeq 6{,}56$ V

Exercice 9 : Comparaison de deux tensions

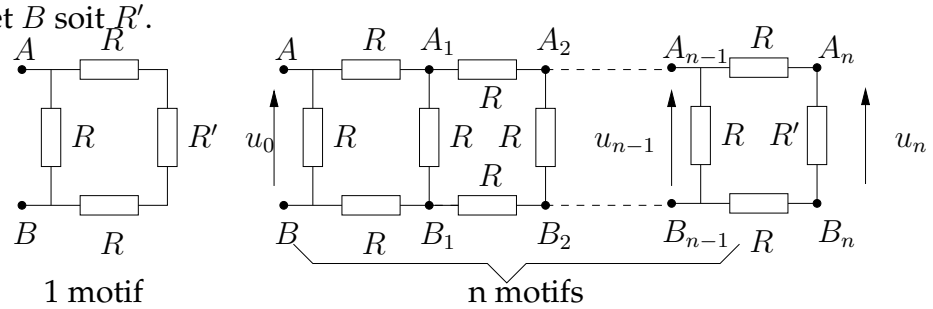


1. On considère le circuit représenté ci-dessus. On notera I_1 l'intensité du courant traversant $R_1 - x$ et I_2 celle traversant R_2. Peut-on appliquer la relation du pont diviseur de tension pour déterminer la tension aux bornes de x ? Justifier.
2. On cherche à calculer toutes les intensités du circuit. Montrer qu'il suffit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues pour cela.
3. Écrire ce système en prenant I_1 et I_2 comme inconnues.
4. Le résoudre.
5. En déduire l'intensité dans x.
6. On règle x pour que I_2 soit nulle. Que vaut alors le rapport $\frac{E_2}{E_1}$?
7. Justifier que l'on puisse comparer deux tensions à l'aide de ce dispositif.
8. Que pensez-vous de son utilisation lorsque les tensions sont très différentes ?

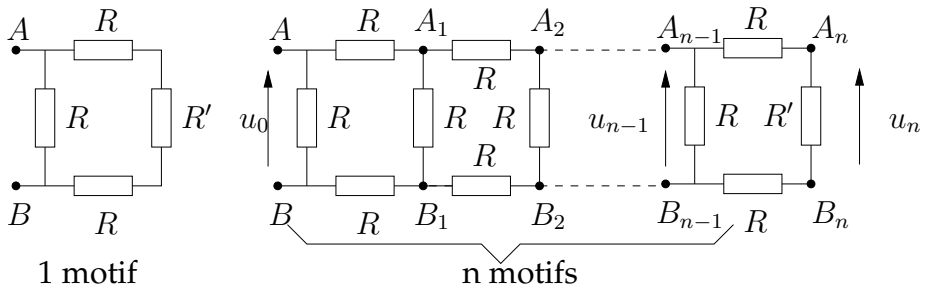
1. On ne peut pas appliquer la relation des ponts diviseurs de tension car l'intensité passant par x n'est a priori pas la même que I_1 ou I_2.
2. Il y a trois branches donc a priori trois intensités à déterminer. Elles ne sont pas indépendantes à cause de la loi des nœuds, d'où deux intensités, donc a priori deux équations.
3. La loi des mailles donne :
$$\begin{cases} E_1 = R_1 I_1 + x I_2 \\ E_2 = (R_2 + x) I_2 + x I_1 \end{cases}$$
4. Par combinaison linéaire ou substitution, on obtient :
$$I_1 = \frac{x E_2 - (x + R_2) E_1}{x^2 - R_1 (x + R_2)} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{x E_1 - R_1 E_2}{x^2 - R_1 (x + R_2)}$$
5. L'intensité dans x s'obtient alors par la loi des nœuds soit $i = I_1 + I_2 = \frac{(x - R_1) E_2 - R_2 E_1}{x^2 - R_1 (x + R_2)}$
6. Si la valeur de x est telle que $I_2 = 0$, on en déduit le rapport $\frac{E_2}{E_1} = \frac{x}{R_1}$.
7. La connaissance de x et R_1 permet donc de comparer les deux tensions E_1 et E_2.
8. Il est possible de comparer des tensions très différentes à conditions de pouvoir faire varier x et R_1 sur de larges gammes.

Exercice 10 : Résistance itérative

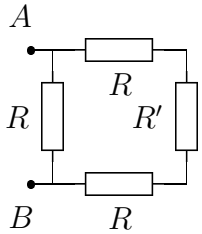
1. Déterminer la valeur du résistor R' telle que la résistance équivalente au réseau de gauche entre A et B soit R'.



2. Dans le réseau de droite, R' a la valeur calculée précédemment. Quelle est la résistance R_{AB} du réseau entre les bornes A et B ?
3. On applique la tension u_0 entre A et B (réseau de droite).
   (a) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}, R et R' puis u_{n-1} en fonction de u_{n-2}, R et R'.
   (b) En déduire la valeur de la différence de potentiel u_n en fonction de u_0 et n.



1. Entre les points A et B, la résistance est équivalente à l'association de R en parallèle avec R, R' et R en série.
   On a donc $R_{AB} = R//(2R+R') = \frac{R(2R+R')}{R+2R+R'}$ et $R_{AB} = R' \Rightarrow R' = \frac{R(2R+R')}{3R+R'} \Rightarrow 2R^2 + RR' = 3RR' + R'^2$.
   On se ramène à une équation du second degré en R' : $R'^2 + 2RR' - 2R^2 = 0$.
   Le discriminant est $\Delta = 4R^2 + 8R^2 = 12R^2 > 0$ il y a donc deux solutions réelles mais on ne conserve que celle qui est positive (il s'agit d'une résistance) : $R' = \frac{-2R+\sqrt{\Delta}}{2} = -R + \frac{\sqrt{12}}{2}R = (\sqrt{3}-1)R$.



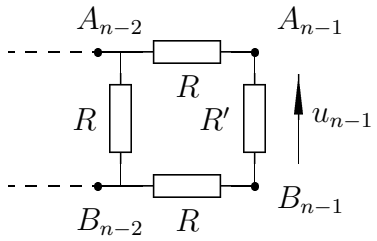
2. La résistance entre les points A_{n-1} et B_{n-1} est $R//(2R+R')$ c'est à dire R'.

On retrouve donc à nouveau $R//(2R+R')$ entre les points A_{n-2} et B_{n-2}.

En remontant de proche en proche tout le réseau et en remplaçant chaque motif par sa résistance équivalente, c'est à dire R' à chaque fois, on aboutit au réseau de gauche, lui même équivalent à R'. On en déduit $R_{AB} = R' = (\sqrt{3}-1)R$.

3. Tensions.
   (a) En nommant I l'intensité du courant qui traverse R, R' et R qui sont montées en série à l'extrême droite du réseau, on peut écrire $u_n = R'.I$ et $u_{n-1} = RI + R'I + RI = (2R+R')I$.
   En éliminant I, on obtient $u_n = \frac{R'}{2R+R'}u_{n-1}$.
   Remarque : on retrouve cette relation en utilisant la formule des ponts diviseurs de tension (Cf. EC_2).

Comme le dernier motif est équivalent à R', la partie située à droite du réseau est équivalente au circuit représenté ci-contre.



En appliquant exactement la même méthode que plus haut, on peut écrire $u_{n-1} = \frac{R'}{2R+R'}u_{n-2}$ d'où $u_n = \left[\frac{R'}{2R+R'}\right]^2 u_{n-2}$.

(b) De même, $u_n = \left[\frac{R'}{2R+R'}\right]^3 u_{n-3}$ si on répète trois fois les calculs. Au bout de k opérations, on obtient $u_n = \left[\frac{R'}{2R+R'}\right]^k u_{n-k}$ et pour $k = n$, on obtient finalement $u_n = \left[\frac{R'}{2R+R'}\right]^n u_0$.

Exercice 11 : Puissance en régime continu - Association de dipôles
La force électromotrice d'un moteur électrique réversible est $E = 24$ V.
Lors d'un fonctionnement en récepteur, il est traversé par un courant I et absorbe une puissance $P = 180$ W.
Pour qu'il fournisse une puissance égale à P quand il fonctionne en générateur, il faut lui faire débiter un courant $I' = 2I$.
Calculer la résistance interne de ce moteur.

$r = 0{,}77\,\Omega$

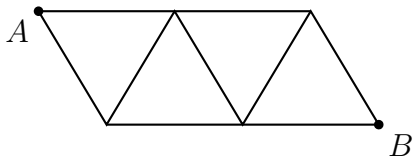
Exercice 12 : Charge d'une batterie
Une batterie de voiture est déchargée. Pour recharger cette batterie, modélisée par une F.É.M. $e = 12$ V en série avec une résistance $r = 0{,}2\,\Omega$, elle la branche sur un chargeur de F.É.M. $E = 13$ V et de résistance interne $r = 0{,}3\,\Omega$.
On lit sur la batterie qu'elle a une « capacité » de 50 A.h (ampère-heures).

1. Déterminer le courant I circulant dans la batterie et la tension U à ses bornes en convention récepteur lors de la charge.
2. Calculer la puissance délivrée par la source E, la puissance dissipée par effet Joule et la puissance reçue par la batterie (stockée sous forme chimique). Déterminer le rendement.
3. On suppose qu'au cours de la charge, la tension de la F.É.M. reste constante (ce qui n'est pas tout à fait exact, voir cours d'électrochimie).
   (a) À quelle grandeur physique la capacité de 50 A.h est-elle homogène ?
   (b) Initialement la batterie est déchargée, avec seulement 10% de sa capacité. Déterminer le temps de charge pour la recharger complètement.
   (c) Que vaut l'énergie dissipée par effet Joule pendant la charge.

1. $I = \frac{E-e}{r+R} = 2$ A et $U = e + rI = e + r\frac{E-e}{r+R} = \frac{rE+Re}{r+R} = 12{,}4$ V.
2. $P_f = EI = E\frac{E-e}{r+R} = 26$ W, $P_J = \frac{(E-e)^2}{r+R} = 2$ W, $P_r = eI = e\frac{E-e}{r+R} = 24$ W. $\rho = \frac{P_r}{P_f} = \frac{e}{E} = 92\%$.
3. (a) charge
   (b) Il faut fournir une charge $Q = 90/100 \times 50 = 45$ A.h. $It = Q$ car $I = cte$, d'où $t = Q/I = 22{,}5$ h.
   (c) $RI^2t = 160$ kJ

Exercice 13 : Résistance équivalente : utilisation du théorème de Kenely. Pour le théorème de Kenely, voir exercice précédent dans la feuille de TD.

Chaque trait représente un résistor de résistance R.
Déterminer la résistance équivalente du réseau vu des points A et B.



$R_{AB} = \frac{15}{11}R$.