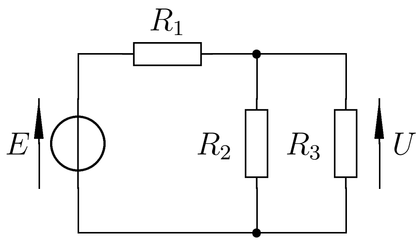
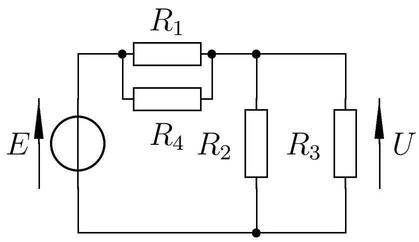
TRAVAUX DIRIGÉS EC_2

Exercice 1 : Ponts diviseurs de tension

Utiliser les formules des diviseurs de tension pour déterminer la tension U aux bornes de R_3 dans les montages suivants.

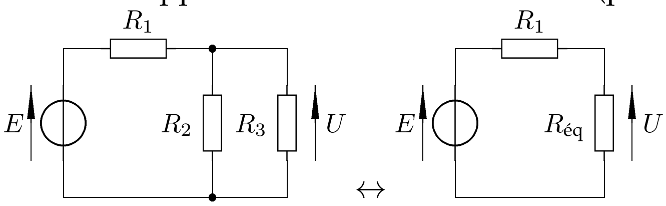


Circuit 1

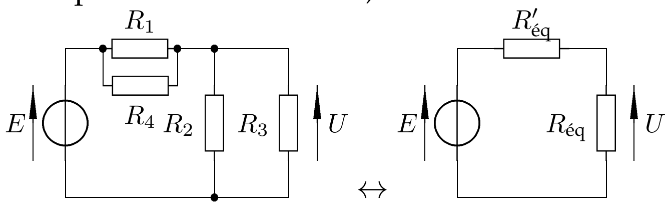


Circuit 2

Pour utiliser les formules des diviseurs de tension, il faut se ramener à ce type de ponts. On doit donc faire apparaître des résistors en série (parcourus par le même courant).



Circuit 1



Circuit 2

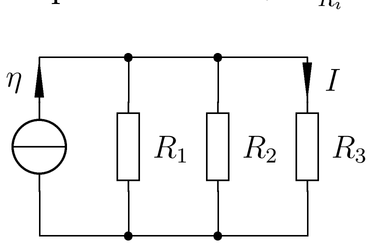
Circuit 1 : $u = \frac{R_{éq}}{R_{éq}+R_1}E$ avec $R_{éq} = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3} \Rightarrow u = \frac{ER_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}$

Circuit 2 : $u = \frac{R_{éq}}{R_{éq}+R'_{éq}}E$ avec $R_{éq} = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$ et $R'_{éq} = \frac{R_1R_4}{R_1+R_4} \Rightarrow u = \frac{ER_2R_3(R_1+R_4)}{R_2R_3(R_1+R_4)+R_1R_4(R_2+R_3)}$

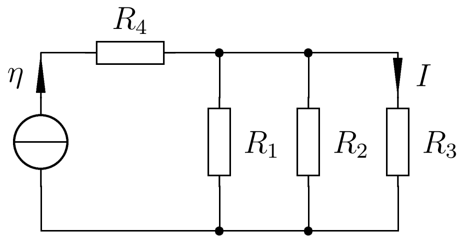
Exercice 2 : Ponts diviseurs de courant

Utiliser les formules des diviseurs de courant pour déterminer l'intensité du courant I qui traverse R_3 dans les montages suivants.

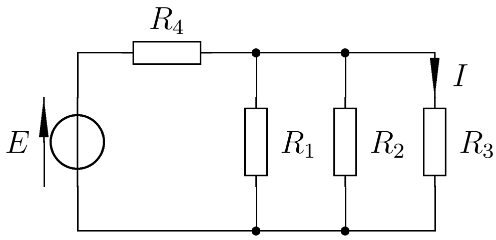
On pourra noter $G_i = \frac{1}{R_i}$ la conductance du résistor R_i.



Circuit 1



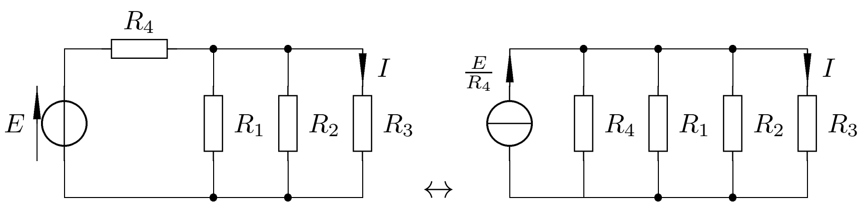
Circuit 2



Circuit 3

Pour utiliser les formules des diviseurs de courant, il faut se ramener à ce type de ponts. On doit donc faire apparaître des résistors en parallèle (soumis à la même tension).

- Circuit 1 : on a directement un pont diviseur de courant et $I = \frac{G_3\eta}{G_1+G_2+G_3}$.
- Circuit 2 : la présence de R_4 ne modifie en rien la valeur du courant η qui alimente le pont. On a donc également $I = \frac{G_3\eta}{G_1+G_2+G_3}$.
- Circuit 3 : on doit transformer le circuit pour faire apparaître le courant qui alimente le pont :

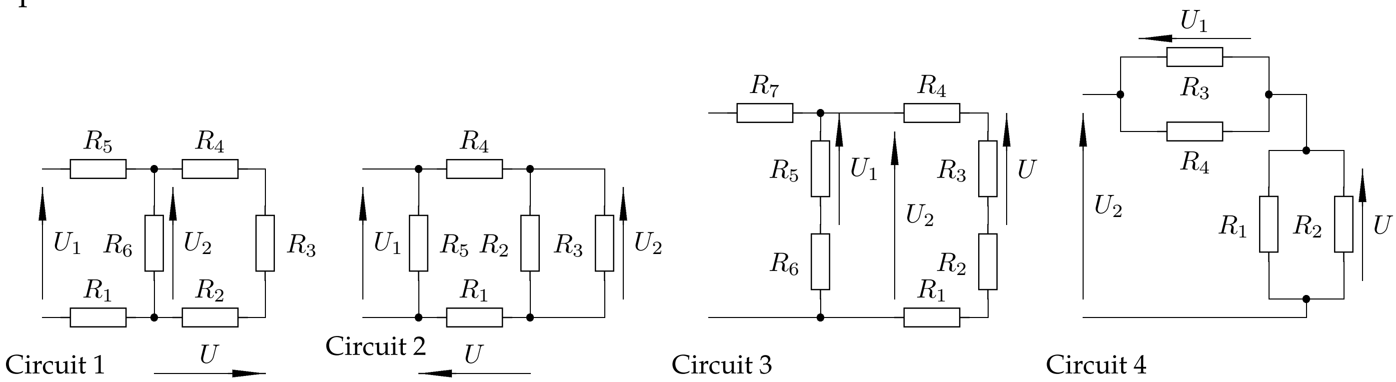


Circuit 3

On a ainsi $I = \frac{G_3}{G_1+G_2+G_3+G_4}\frac{E}{R_4} = \frac{G_3G_4E}{G_1+G_2+G_3+G_4}$

Exercice 3 : Ponts diviseurs de tension

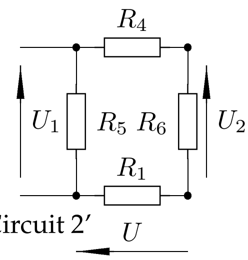
Dans les quatre circuits suivants, écrire U en fonction de U_1 ou U_2 et des résistances à l'aide de ponts diviseurs de tension.



Circuit 1 Circuit 2 Circuit 3 Circuit 4

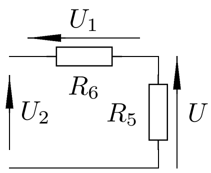
Par définition, un pont diviseur de tension est constitué de résistors parcourus par le même courant (en série sur la même branche).
On cherche donc une telle association sur les différents circuits proposés.
À défaut, on associe des résistors pour obtenir un pont diviseur de tension.

- Circuit 1 : R_2, R_3 et R_4 sont en série. U_2 est la tension aux bornes de l'ensemble et U est celle aux bornes de R_2. On en déduit directement $U = \frac{R_2}{R_2+R_3+R_4}U_2$.



Circuit 2′

- Circuit 2 : en associant R_2 et R_3, on se ramène au circuit 2′ pour lequel R_1, $R_6 = R_2//R_3$ et R_4 sont en série. U_1 est la tension aux bornes de l'ensemble et U est celle aux bornes de R_1. Comme par ailleurs U et U_1 sont en opposition, on en déduit $U = -\frac{R_1}{R_1+R_6+R_4}U_1$ avec $R_6 = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$.
- Circuit 3 : R_1, R_2, R_3 et R_4 sont en série. U_2 est la tension aux bornes de l'ensemble et U est celle aux bornes de R_3. On en déduit directement $U = \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3+R_4}U_2$.

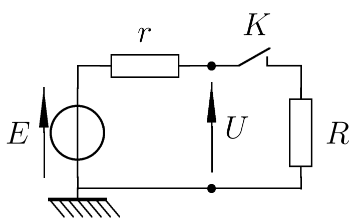


Circuit 4′

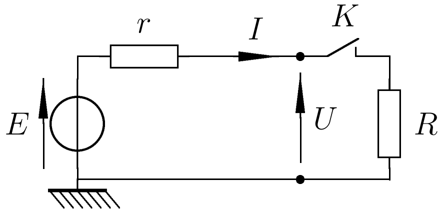
- Circuit 4 : on associe $R_1//R_2 = R_5$ et $R_3//R_4 = R_6$ pour obtenir le circuit 4′. Ainsi, R_5 et R_6 sont en série. U_2 est la tension aux bornes de l'ensemble et U est celle aux bornes de R_5. On en déduit $U = \frac{R_5}{R_5+R_6}U_2$ avec $R_5 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ et $R_6 = \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}$.

Exercice 4 : Mesure de la résistance de sortie d'un GBF

On a représenté un générateur de tension réel par son équivalent Thévenin (E,r). On cherche à mesurer r, la résistance interne de ce générateur, sa force électromotrice étant E connue.



1. Dans un premier temps, on mesure U, la tension à ses bornes lorsque l'interrupteur K est ouvert. Quelle est, en fonction des données, la valeur de la tension U_0 mesurée ? Le voltmètre est parfait.
2. On ferme ensuite K. R est un résistor de résistance R variable. Quelle est, en fonction des données, la valeur de la tension U mesurée ?
3. Pour quelle valeur de R obtient-on $U = \frac{U_0}{2}$? En déduire une méthode de mesure de r. Quelle est l'ordre de grandeur de la valeur mesurée sur les GBF utilisés en TP ?



1. Premier temps : K est ouvert, $I = 0$ et une loi des mailles donne $E - r \times 0 - U = 0 \Rightarrow U = U_0 = E$.

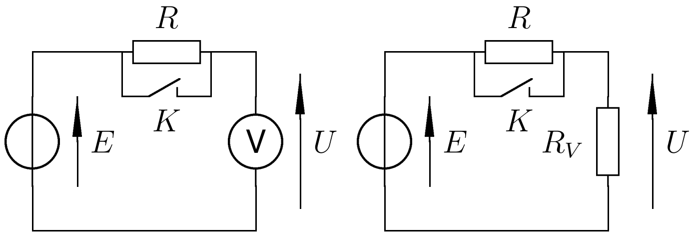
   Le voltmètre indique donc la force électromotrice (ou tension à vide du générateur : aucun courant débité).
2. Deuxième temps : K fermé, r et R sont traversés par le même courant et la formule des ponts diviseurs de tension donne directement $U = \frac{R}{R+r}E = \frac{R}{R+r}U_0$.
3. On obtient $U = \frac{U_0}{2} \Rightarrow \frac{R}{R+r}U_0 = \frac{U_0}{2} \Rightarrow R = r$.

Pour mesurer r en TP, on mesure la fem du GBF à l'aide du voltmètre (idéal) qu'on branche directement à ses bornes (par exemple, $E = U_0 = 2{,}0$ V). On place ensuite un résistor R de résistance variable (boite à décade) à ses bornes comme indiqué sur la figure. Le voltmètre, placé aux bornes de R indique $U = \frac{RU_0}{R+r} \leqslant U_0$ et on modifie R jusqu'à obtenir $U = \frac{U_0}{2}$ (par exemple 1,0 V). On a alors $r = R$ et il suffit de lire la valeur de la résistance de la boite à décade.

L'ordre de grandeur est de 50 Ω.

Exercice 5 : Mesure de la résistance d'entrée d'un voltmètre

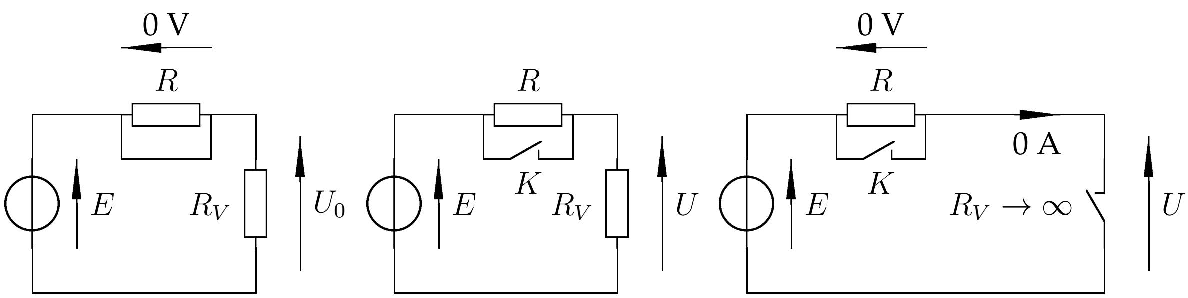
Soit le montage représenté ci-contre. Le voltmètre réel peut être est modélisé (figure de droite) par un résistor de résistance R_V (résistance d'entrée).



1. L'interrupteur K est tout d'abord fermé. Quelle est la valeur de la tension affichée par le voltmètre $U = U_0$?
2. On ouvre ensuite K, quelle est la valeur indiquée si le voltmètre est équivalent à un résistor de résistance R_V ?

   Exprimer alors U en fonction de E, R et R_V. Que devient ce résultat si le voltmètre est idéal, c'est à dire équivalent à un résistor de résistance infinie ?
3. Pour quelle valeur de R a-t-on $U = \frac{U_0}{2}$? En déduire une méthode de mesure de R_V.
4. En pratique, pour un voltmètre numérique, on se contentera plutôt d'obtenir $U = \frac{9}{10}U_0$. Expliquer pourquoi.

1. Si K est fermé, le résistor R est court-circuité, la tension à ses bornes est nulle et une loi des mailles (sens horaire) donne $E - 0 - U = 0 \Rightarrow U = U_0 = E$: le voltmètre affiche la valeur de la force électromotrice du générateur.



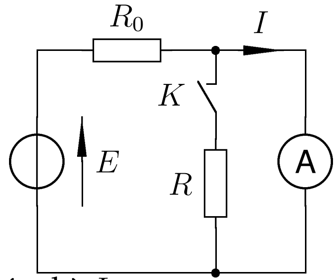
K fermé K ouvert K ouvert, voltmètre idéal.

2. Comme K est ouvert, R et R_V sont en série, on reconnaît un pont diviseur de tension et $U = \frac{R_V}{R+R_V}E = \frac{R_V}{R+R_V}U_0$ inférieur à U_0 : on observe une chute de tension quand on ferme K.

   Dans le cas où le voltmètre est idéal, $R_V \to \infty$ et $R + R_V \simeq R_V$ d'où $U = \frac{R_V}{R+R_V}U_0 \simeq \frac{R_V}{R_V}U_0 = U_0$: on retrouve la valeur initiale.

3. On résout $U = \frac{U_0}{2} \Rightarrow \frac{R_V}{R+R_V}U_0 = U_0 \Rightarrow R = R_V$.
   La méthode de mesure de R_V est alors la suivante : on utilise une alimentation stabilisée délivrant la tension E et on construit le circuit représenté en utilisant une boite de résistances variables (boite à décades par exemple) pour R_V. On ferme K pour mesurer $U_0 = E$ (le voltmètre indique 2,0 V par exemple). On ouvre ensuite K et on fait varier R jusqu'à ce que le voltmètre indique $U = \frac{U_0}{2}$ (1,0 V par exemple). On n'a plus qu'à lire la valeur affichée sur la résistance variable car on a $R_V = R$.
4. En pratique, pour un voltmètre numérique, R_V est très grand (de l'ordre de 10 à 100 MΩ) alors que les boites à décade utilisées en TP ont une valeur maximale de 1 MΩ.
   On n'obtiendra pas une diminution de U d'un facteur deux au voltmètre mais de 10 % : $U = \frac{9}{10}U_0$ dès que $R = \frac{R_V}{9}$.

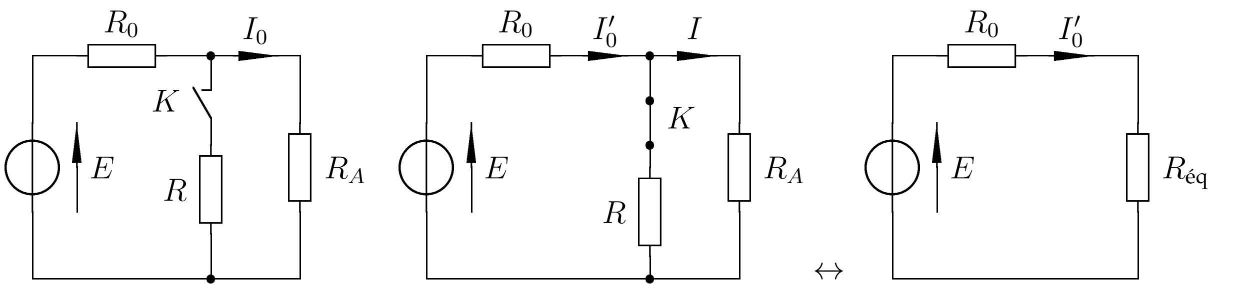
Exercice 6 : Mesure de la résistance d'entrée d'un ampèremètre



On considère le montage représenté ci-dessous avec R une résistance variable. On gardera toujours $R \ll R_0$.

1. Lorsque l'interrupteur K est ouvert, quelle est l'intensité I_0 mesurée par l'ampèremètre si on suppose qu'il est équivalent à un résistor de résistance $R_A \ll R_0$?
2. K est maintenant fermé.
   (a) Montrer que le courant débité par le générateur est quasiment égal à I_0.
   On rappelle que $R \ll R_0$ et on supposera l'ampèremètre équivalent à un résistor de résistance $R_A \ll R_0$.
   (b) Pour quelle valeur de R, l'intensité du courant mesurée vaut-elle $\frac{I_0}{2}$?
   (c) En déduire une méthode pour mesurer R_A.
3. Quelle est l'utilité de prendre $R_0 \gg R$ et R_A ?

1. Premier temps : K ouvert, l'ampèremètre est équivalent à un résistor de résistance $R_A \ll R_0$.
   On a affaire à l'équivalent d'un circuit à une seule maille (K ouvert) et par utilisation de la loi de Pouillet, $I = I_0 = \frac{E}{R_0+R_A} \simeq \frac{E}{R_0}$.



K ouvert K fermé K fermé, circuit équivalent.

2. K est maintenant fermé.
   (a) Soit I'_0 le courant débité par le générateur. En associant R et R_A montés en parallèle en un résistor de résistance $R_{éq} = \frac{RR_A}{R+R_A}$, on peut écrire $I'_0 = \frac{E}{R_0+R_{éq}}$ (loi de Pouillet) mais comme R et R_A sont très inférieurs à R_0, $R_{éq} \ll R_0$ et $I'_0 \simeq \frac{E}{R_0} = I_0$
   (b) Circuit ci-dessus au centre, on reconnaît un pont diviseur de courant et l'ampèremètre est traversé par le courant $I = \frac{G_A}{G_A+G}I'_0 \simeq \frac{G_A}{G_A+G}I_0 = \frac{R}{R_A+R}I_0$ et $I = \frac{I_0}{2}$ si $R = R_A$.

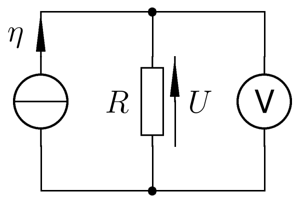
(c) En TP, pour mesurer R_A, on construit le circuit à l'aide d'une alimentation stabilisée ($E = 2{,}0$ V par exemple), d'un résistor de résistance connue ($R_0 = 1$ kΩ par exemple), d'une résistance variable (boite à décade) et de l'ampèremètre.

On mesure $I = I_0$ pour K ouvert (2 mA par exemple) puis on ferme K et on modifie R jusqu'à obtenir $I = \frac{I_0}{2}$ à l'ampèremètre (1 mA par exemple).

3. Le fait d'utiliser R_0 très grand par rapport aux autres résistances du circuit permet de transformer l'alimentation stabilisée en série avec R_0 en l'équivalent d'un générateur de courant idéal.

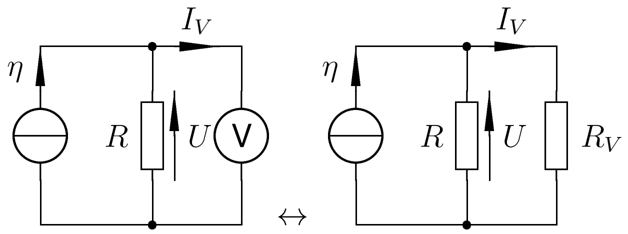
Exercice 7 : Voltmètre réel

On considère le montage ci-dessous dans lequel R est une résistance variable.
Le voltmètre V mesure la tension aux bornes de R.



1. Quelle est la tension U_0 affichée si le voltmètre est idéal (c'est à dire si sa présence ne modifie en rien les grandeurs électriques présentes dans le circuit.)
2. On considère maintenant que le voltmètre est modélisé par un résistor de résistance R_V (sa résistance d'entrée).
   (a) Quelle est la tension U affichée par le voltmètre ?
   (b) À partir de quelle valeur de R la tension affichée par le voltmètre s'écarte-t-elle de plus de 5 % de U_0 ?

1. Si le voltmètre est idéal, aucun courant ne le parcourt ($I_V = \frac{U}{R_V} \to 0$), le résistor est donc traversé par le courant η et la tension à ses bornes en convention récepteur est $U = R.\eta$.
2. Le voltmètre est modélisé par un résistor de résistance R_V (sa résistance d'entrée).
   (a) Cette fois, seule la partie $I = \eta - I_V < \eta$ du courant η traverse R. La tension à ses bornes est donc $U = RI$ avec $I = \frac{G}{G+G_V}\eta = \frac{R_V}{R_V+R}\eta$ d'après la formule des ponts diviseurs de courant. On a donc $U = \frac{RR_V}{R+R_V}\eta = \frac{R_V}{R+R_V}U_0$ et on vérifie que $U \to U_0$ si $R_V \gg R$.



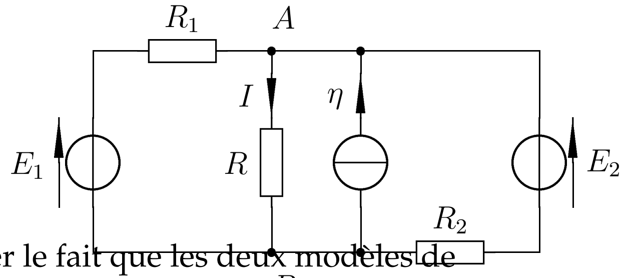
   (b) Comme $U = \frac{R_V}{R+R_V}U_0 < R.\eta = U_0$, la seule présence du voltmètre perturbe la mesure.

On cherche la valeur de R à partir de laquelle l'écart relatif est supérieur à 5 % telle que $\frac{|U-U_0|}{\overline{U}}$ avec $\overline{U} = \frac{U+U_0}{2}$ et $2.\frac{|U-U_0|}{U+U_0} = 2.\frac{U_0-U}{U+U_0} \geqslant 5\% \Rightarrow 2.\frac{1-U/U_0}{1+U/U_0} \geqslant \frac{5}{100} \Rightarrow \frac{1-\frac{R_V}{R+R_V}}{1+\frac{R_V}{R+R_V}} \geqslant \frac{5}{200} \Rightarrow \frac{R}{2R_V+R} \geqslant \frac{1}{40}$

soit $40R_V \geqslant 2R_V + R$ et finalement, $R > \frac{2}{39}R \simeq \frac{R_V}{20}$.
Si R prend une valeur supérieure à un vingtième de R_V, l'erreur n'est plus négligeable.
Pour un voltmètre numérique, R_V est au moins égale à 10 MΩ ce qui limite R en environ 500 kΩ.

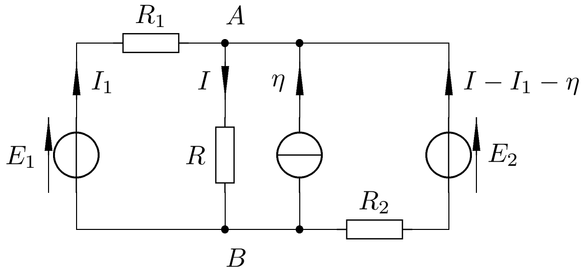
Exercice 8 : Application des théorèmes généraux

Calculer l'intensité I du courant qui traverse R dans le circuit suivant, en utilisant successivement.



1. Les lois de Kirchhoff (on se contentera d'un système d'équations).
2. La loi des nœuds en terme de potentiels.
3. La simplification du circuit. On pourra utiliser le fait que les deux modèles de générateurs réels (Thévenins (E,R) et Norton (η,R)) sont équivalent à condition de poser $\eta = E/R$.

1. Lois de Kirchhoff : on pose I_1 l'intensité du courant débitée par le générateur de tension idéal E_1 et on applique directement la loi des nœuds en C pour limiter le nombre d'inconnues : on lieu d'introduire I_2 l'intensité du courant débitée par E_2, on écrit $I_2 = I - I_1 - \eta$ sur cette branche. On a alors 2 inconnues (I_1 et I_2) et il suffit décrire deux lois des mailles.



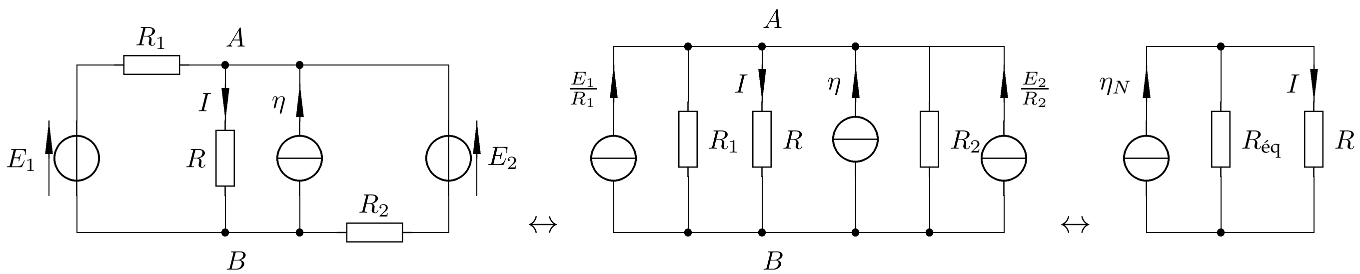
Comme on ne connaît pas la tension aux bornes du générateur de tension η, il serait maladroit de prendre une maille passant par ce dipôle. On travaillera donc sur la maille de gauche (maille (1) passant par e_1, R_1 et R) et la maille (2) passant par E_2, R et R_2. En les orientant dans le sens horaire pour (1) et trigonométrique pour (2), on écrit : $\left\{\begin{array}{l} E_1 - R_1 I_1 - RI = 0 \\ E_2 - RI - R_2(I - I_1 \end{array}\right.$

système de deux équations à deux inconnues dont on peut extraire I.

2. On peut également utiliser la loi des nœuds en terme de potentiels. Pour cela, on commence par poser un nœud à la masse (on fixe ainsi l'origine des potentiels électriques). Prenons par exemple $V_B = 0$.
On a alors $I = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{V_A - V_B}{R} = \frac{V_A}{R}$.Tout le problème est ainsi de trouver l'expression de V_A.
Pour cela, on applique la loi des nœuds en termes de potentiels en A :

$$\frac{0 - V_A + E_1}{R_1} + \frac{0 - V_A}{R} + \eta + \frac{0 - V_A + E_2}{R_2} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \eta + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow I = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2 + R_1 R_2 \eta}{R R_1 + R_1 R_2 + R R_2}$$

3. La première méthode à envisager doit être la simplification du circuit :



Avec $\eta_N = \frac{E_1}{R_1} + \eta + \frac{E_1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_{éq}} = G_{éq} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ et par utilisation de la formule des ponts diviseurs de tension, $I = \frac{G}{G + G_{éq}} \eta_N = \frac{1/R}{1/R + 1/R_1 + 1/R_2} [\frac{E_1}{R_1} + \eta + \frac{E_1}{R_1}]$.

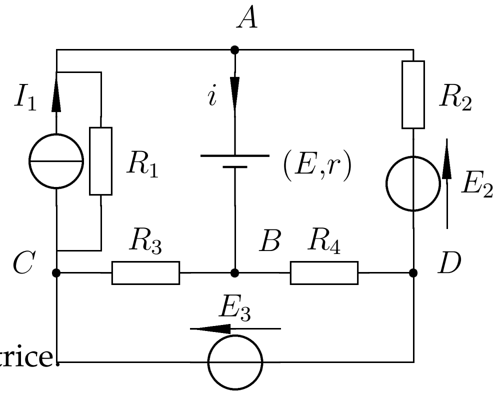
Exercice 9 : Loi des nœuds en terme de potentiels

Considérons le circuit représenté ci-contre :

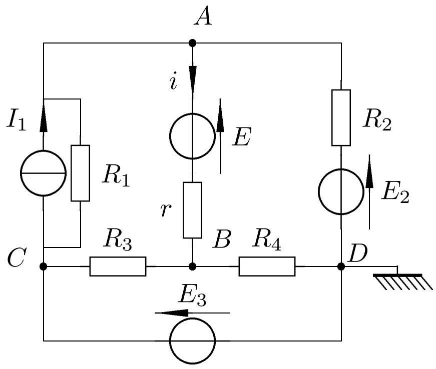
On cherche à déterminer l'intensité qui traverse le générateur de f.é.m E et de résistance interne r.

Établir un système d'équations qui permette de résoudre le problème.

A.N : $I_1 = 10$ mA, $E_2 = E_3 = 10$ V, $R_1 = R_3 = 1$ kΩ,
$R_2 = R_4 = 500\ \Omega$, $E = 2$ V et $r = 10\ \Omega$.
On pourra résoudre numériquement en utilisant une calculatrice.



On commence par représenter le générateur de tension réel par son équivalent Thévenin (ou Norton). Comme l'énoncé spécifie qu'on doit utiliser la loi des nœuds en terme de potentiels, on pose la référence des potentiels, par exemple en D.
Cela permet de déterminer $V_C = V_C - V_D = U_{CD} = E_3$.
Ainsi, il reste à écrire la loi des nœuds en termes de potentiels en A et B les seuls points dont le potentiels reste inconnu. On écrira ensuite $V_A - V_B = U_{AB} = E + ri \Rightarrow i = \frac{V_A - V_B - E}{r}$
Loi des nœuds en terme de potentiels :



- en A : $\frac{E_3 - V_A + R_1 I_1}{R_1} + \frac{V_B - V_A + E}{r} + \frac{0 - V_A + E_2}{R_2} = 0.$
- en B : $\frac{V_A - V_B - E}{r} + \frac{E_3 - V_B}{R_3} + \frac{0 - V_B}{R_4} = 0.$

Puis $i = \frac{V_A - V_B - E}{r}$ donne $i = 11{,}8$ mA.
Code Maple :

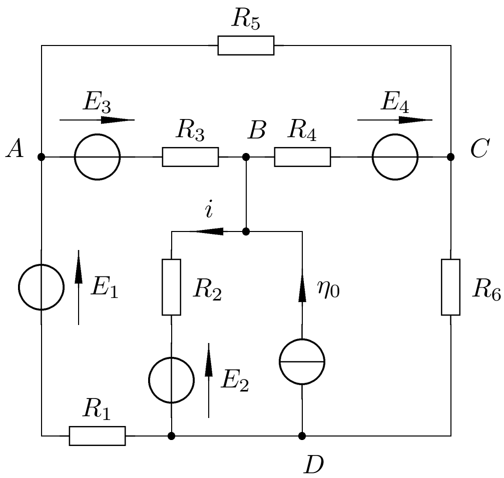
```
> restart;
> equ1 :=(E3-VA+R1*I1)/R1+(VB-VA+E)/r+(0-VA+E2)/R2=0;
> equ2 :=(VA-VB-E)/r+(E3-VB)/R3+(0-VB)/R4=0;
> sys :=equ1,equ2;
> I1 :=0.01;E2 :=10;E3 :=10;R1 :=1000;R3 :=1000;R2 :=500 :R4 :=500;E :=2;r :=10;
> solve(sys); assign('');
> i :=(VA-VB-E)/r;
```

Exercice 10 : Mise en équation d'un problème

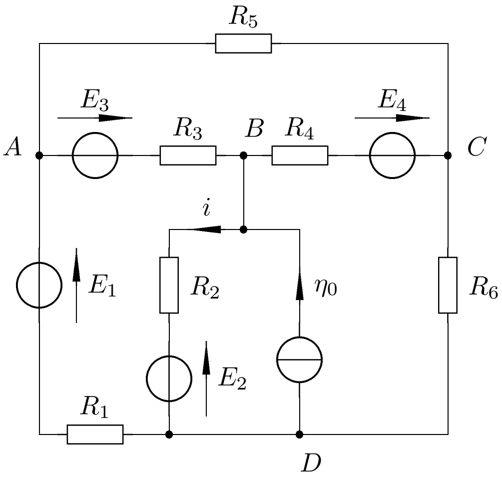
Soit le circuit représenté ci-contre dans lequel on cherche à calculer l'intensité i du courant circulant dans le résistor R_2.

Montrer que la loi des nœuds en termes de potentiels permet de résoudre le problème posé.

Attention, *on ne demande pas de donner l'expression littérale de i mais seulement d'écrire les équations nécessaires à la résolution du problème.*



L'énoncé demande d'utiliser la loi des nœuds en termes de potentiels.



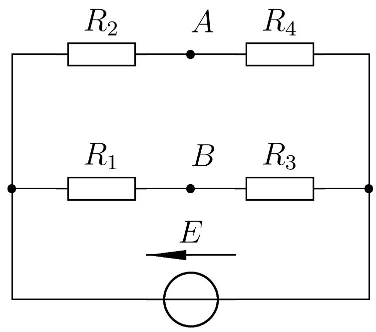
On commence par poser la masse, par exemple en D : on pose ainsi $V_D = 0$ et il ne reste plus qu'à écrire une loi des nœuds en terme de potentiels en A, B et C, seuls nœuds dont le potentiel reste inconnu.

- en A : $\frac{0-V_A+E_1}{R_1} + \frac{V_B-V_A-E_3}{R_3} + \frac{V_C-V_A}{R_5} = 0$
  $\Rightarrow V_A = \frac{G_1E_1-G_3E_3+G_3V_B+G_4V_C}{G_1+G_3+G_4}$
- en B : $\frac{V_A-V_B+E_3}{R_3} + \frac{0-V_B+E_2}{R_2} + \eta_0 + \frac{V_C-V_B-E_4}{R_4} = 0$
  $\Rightarrow V_B = \frac{G_3E_3+G_3V_A-G_4E_4+G_4V_C+\eta_0+G_2E_2}{G_3+G_4+G_2}$
- en C : $\frac{V_A-V_C}{R_5} + \frac{V_B-V_C+E_4}{R_4} + \frac{V_D-V_C}{R_6} = 0$
  $\Rightarrow V_C = \frac{G_5V_A+G_4E_4+G_4V_B}{G_5+G_4+G_6}$

On aboutit donc à un système de trois équations à trois inconnues, on peut déterminer la valeur des trois potentiels puis en déduire $i = \frac{V_B-E_2}{R_2}$.

Exercice 11 : Pont de Wheatstone et application

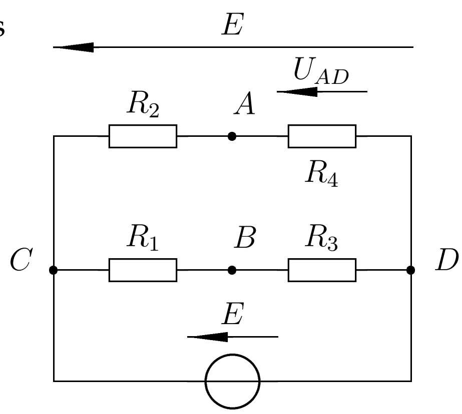
On considère le circuit suivant :



1. Calculer de U_{AB} par la méthode de votre choix.
2. À quelle condition sur les résistances, cette tension est-elle nulle ?
3. On prend maintenant $R_3 = R_4 = R$ et les résistors R_1 et R_2 sont en fait des jauges de contrainte fixées sur une barre métallique.
   Lorsque celle-ci se déforme, les résistances R_1 et R_2 varient suivant une loi du type $R_1 = R+x$ avec $x \ll R$ et $R_2 = R-x$.
   Exprimer alors U_{AB}, mesurée par un voltmètre, en fonction de R et x.

Montrer que dans la mesure où $x \ll R$, il y a proportionnalité entre la tension mesurée et x. Voyez-vous une application ?

1. On remarque que R_2 et R_4 sont en série, on a donc un pont diviseur de tension et $U_{AD} = \frac{R_4}{R_4+R_2}U_{CD} = \frac{R_4}{R_4+R_2}E$. De même, R_1 et R_3 en série et $U_{BD} = \frac{R_3}{R_1+R_3}E$ et on en déduit
   $$U_{AB} = U_{AD} + U_{DB} = \frac{R_4}{R_4+R_2}E - \frac{R_3}{R_1+R_3}E = \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{(R_2+R_4)(R_1+R_3)}E$$
   Remarque : on pouvait également utiliser la loi des nœuds en termes de potentiels en posant $V_D = 0 \Rightarrow V_C = E$ puis en exprimant $U_{AB} = V_A - V_B$.



2. En reprenant l'expression précédente, on voit pour que $U_{AB} = 0$ il faut et il suffit que $R_1R_4 = R_2R_3$.
3. On remplace R_3 et R_4 par R, R_1 par $R+x$ et R_2 par $R-x$ dans l'expression de U_{AB}.

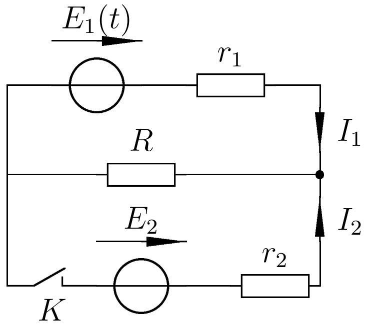
$$U_{AB} = \frac{(R+x)R-(R-x)R}{[(R-x)+R][(R+x)+R]}E = \frac{2xRE}{4R^2-x^2} \simeq \frac{2xRE}{4R^2} = \frac{xE}{2R}$$

On remarque en effet que si $x \ll R \Rightarrow 4R^2 - x^2 \simeq 4R^2$, U_{AB} est proportionnel à x.

Une application possible est le pèse personne électronique : la déformation des jauges de contraintes due au poids de la personne, modifie la tension U_{AB} ce qui rend possible un affichage de la masse.

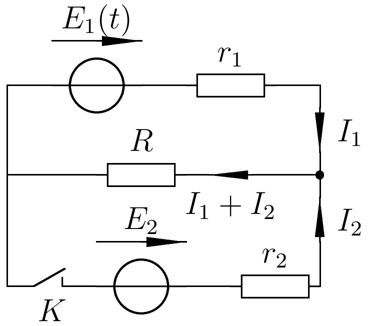
Exercice 12 : Stabilisation du courant. Batterie Tampon

On réalise le montage ci-contre dans lequel $E_2 = 2$ V $= Cte$; $r_2 = 0{,}2\ \Omega$; $R = 50\ \Omega$ et la force électromotrice E_1 décroit linéairement de 6,0 V à 5,0 V en 24 h.
On choisit la résistance r_1 de façon que la fermeture de l'interrupteur K (à l'instant 0) ne provoque aucun courant dans r_2.



1. Exprimer en fonction du temps t (en jour), les intensités $I_1(t)$ et $I_2(t)$ (K fermé).
2. Déterminer la diminution relative de l'intensité $i(t)$ qui traverse la résistance R, un jour si K est ouvert puis si K est fermé.
   En déduire le rôle du générateur de tension de f.é.m E_2.

1. On applique les lois Kirchhoff : lois des nœuds directement sur la figure puis dans la maille qui passe par E_1, r_1 et R (maille (1) orienté dans le sens horaire) et dans la maille qui passe par K, E_2, r_2 et R (maille (2) orientée dans le sens trigonométrique),



$$\begin{cases} E_1 - r_1 I_1 - R(I_1 + I_2) = 0 & (1) \\ E_2 - r_2 I_2 - R(I_1 + I_2) = 0 & (2) \end{cases}$$

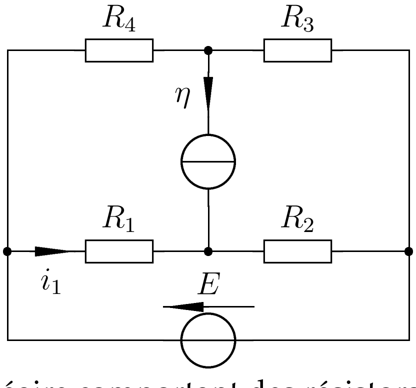
$$\Rightarrow I_1(t) = \frac{RE_1 + r_2E_1 - RE_2}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)} \text{ et } I_2 = \frac{RE_2 + r_1E_2 - RE_1}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}$$

   or pour respecter $I_2 = 0$ à $t = 0$, $r_1 = R(\frac{E_1(0)}{E_2} - 1) = 100\ \Omega$ d'où $I_1 = 0{,}04 - 0{,}01t$ et $I_2 = 0{,}01t$.

2. Si K ouvert, $I = I_1 = \frac{E_1}{R+r1} = \frac{6-t}{150}$ et en 24 h, I_1 passe de 40 mA à 33 mA. On a donc $\frac{\Delta I}{I} = \frac{40-33}{40} = 0{,}17$ soit environ 17 %.
   Si K est fermé, $I = I_1 + I_2 = I_1 = 0{,}04 - 0{,}01t$ d'après la question précédente. En 24 h, I passe alors de 40 mA à 39,96 mA d'où $\frac{\Delta I}{I} = \frac{40-39{,}96}{40} \ll 1$ %.
   On voit ainsi que E_2 stabilise le courant même si E_1 varie beaucoup, on parle de batterie "tampon".

Exercice 13 : Théorème de superposition

On considère le circuit représenté ci-dessous dans lequel on cherche à déterminer le courant i_1 qui traverse le résistor R_1.



1. Par une méthode directe.
2. En calculant les courants imposés dans R_1 par chaque générateur présent dans le circuit :
   - i_1' si générateur E seul : $\eta = 0$ ce qui revient à remplacer le générateur de courant par un interrupteur ouvert.
   - i_1'' si générateur η seul : $E = 0$ ce qui revient à remplacer le générateur de tension par un interrupteur fermé.

   puis en prenant $i_1 = i_1' + i_1''$.

Remarque : la deuxième méthode est généralisable à tout réseau linéaire comportant des résistors et des sources linéaires indépendantes (théorème de superposition).

1. Méthode directe : comme il n'y a pas de simplifications possibles (R_3 et R_2 ne sont pas montés en parallèle, R_1 et R_2 ne sont pas en série ...) , on peut par exemple utiliser la loi des nœuds en termes de potentiels (Figure 1).

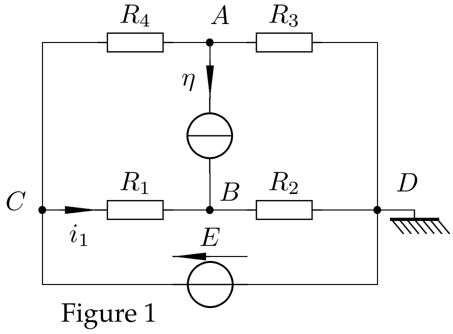


Figure 1

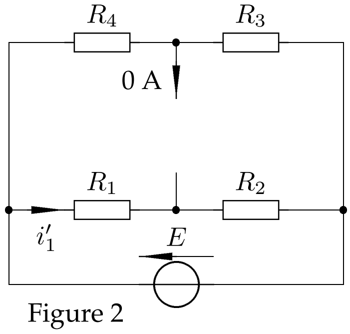


Figure 2

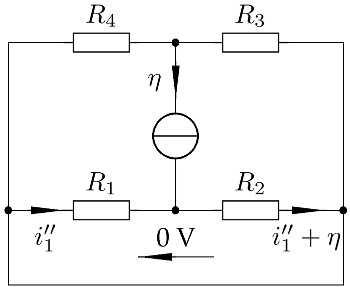


Figure 3

On pose le nœud D à la masse ce qui impose $V_D = 0$ et $U_{CD} = V_C - V_D = V_C = E$.
On détermine le potentiel du point B à l'aide de la loi des nœuds en terme de potentiels :

$$\frac{V_C - VD}{R_1} + \eta + \frac{0 - V_B}{R_2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{R_2E + R_1R_2\eta}{R_1 + R_2}$$

On en déduit ensuite

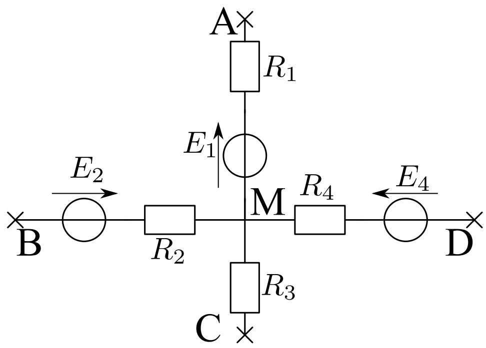
$$i_1 = \frac{U_{CD}}{R_1} = \frac{V_C - V_B}{R_1} = \frac{E - V_B}{R_1} = \frac{E(R_1 + R_2)}{R_1(R_1 + R_2)} - \frac{ER_2 + R_1R_2\eta}{R_1(R_1 + R_2)} = \frac{E - R_2\eta}{R_1 + R_2}$$

2. Par utilisation du théorème de superposition :
   - soit i'_1 le courant qui parcourt R_1 si on "éteint" le générateur de courant idéal ($\eta = 0$ A : Figure 2). R_1 et R_2 sont maintenant en série et $i'_1 = \frac{E}{R_1+R_2}$.
   - soit i''_1 le courant qui parcourt R_1 si on "éteint" le générateur de tension idéal ($E = 0$ V : Figure 3). En appliquant la loi des nœuds, on voit que R_2 est traversé par $i''_1 + \eta$ et $0 = R_1i''_1 + R_2(i''_1 + \eta) \Rightarrow i''_1 = -\frac{R_2\eta}{R_1+R_2}$

   On en déduit ensuite $i_1 = i'_1 + i''_1 = \frac{E-R_2\eta}{R_1+R_2}$

Exercice 14 : Théorème de Millman

On considère le circuit ci-contre. Exprimer la loi des nœuds en terme de potentiel pour le point M. En déduire le potentiel V_M au point M en fonction des potentiels des nœuds voisins et des différentes résistances et forcse électromotrices. Généraliser au cas d'un circuit quelconque. Rajouter des générateurs de courrant. Le résultat s'appelle le théorème de Millman.



LNTP en M :

$$\frac{V_A - V_M - E_1}{R_1} + \frac{V_B - V_M + E_2}{R_2} + \frac{V_C - V_M}{R_3} + \frac{V_D - V_M + E_4}{R_4} = 0$$

On pose $g_k = 1/R_k$ et on inverse la relation précédente :

$$V_M(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) = g_1(V_A - E_1) + g_2 * (V_B + E_2) + g_3V_C + g_4(V_D + E_4)$$

Et en généralisant :

$$V_N = \frac{\sum_k g_k(V_k + \epsilon_k E_k)}{\sum_k g_k}$$

Avec $\epsilon_k = 1$ si E_k orienté vers le nœud et -1 sinon.
En rajoutant des sources de courant :

$$V_N = \frac{\sum_k g_k(V_k + \epsilon_k E_k) + \sum_j \epsilon_j \eta_j}{\sum_k g_k}$$