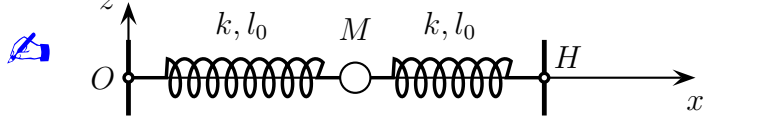
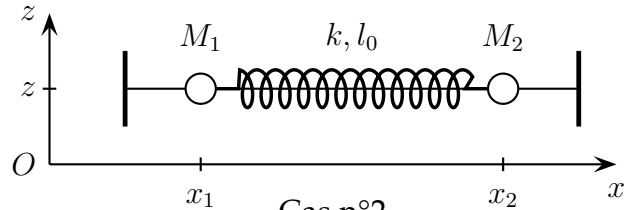
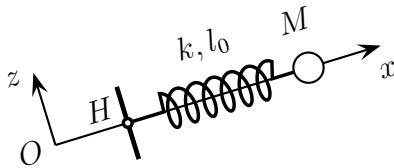
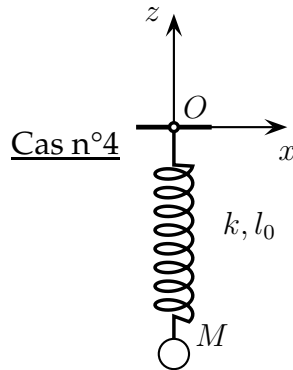
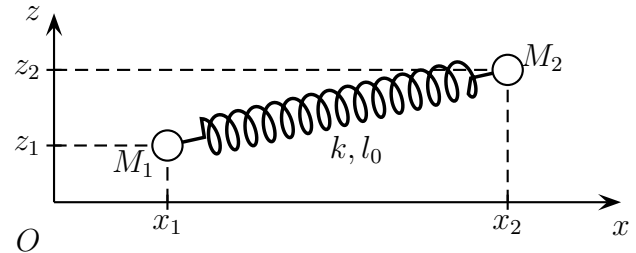


TRAVAUX DIRIGÉS DE EC_{03.5}
Exercice 1 : Forces exercées par quelques ressorts

Cas n°1

Cas n°2

Cas n°3

Cas n°4

Cas n°5

Dans tout l'exercice, les réponses sont à donner en fonction des seuls paramètres x, x_1, x_2 (les abscisses des points M, M_1, M_2), z, z_1, z_2 (leur cote), h (l'abscisse du point H), k, l_0 (la raideur et la longueur à vide des ressorts), et enfin $\vec{u}_x, \vec{u}_z$ (les vecteurs unitaires selon les axes Ox et Oz). Ici, on ne s'intéresse pas aux poids des masses ni aux réactions des supports mais simplement aux forces exercées par les ressorts.

1. Dans le cas 1, les deux ressorts ont la même longueur à vide l_0 et la même raideur k . La masse M ne peut se déplacer que selon l'axe Ox . Quelle est la force totale subie par le point M ?
2. Dans le cas 2, les masses M_1 et M_2 d'abscisses respectives x_1 et x_2 peuvent se déplacer sur une tige d'ordonnée z . Un ressort relie les deux masses. Quelle est la force $\vec{F}_1$ subie par la masse M_1 et celle $\vec{F}_2$ subie par M_2 .
3. La masse M peut se déplacer selon l'axe x , quelle est la force exercée par le ressort sur cette masse ?
4. Dans le cas 4, la masse M est suspendue à un ressort. Quelle est l'expression de la force du ressort ?
5. Le cas 5 est un peu plus délicat. La question est toujours la même : quelles sont les forces subies par les deux masses ?

1. $\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{u}_x + k(h - x - l_0)\vec{u}_x$
2. $\vec{F}(M_2) = -k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{u}_x$ et $\vec{F}(M_1) = -\vec{F}(M_2) = +k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{u}_x$
3. $\vec{F} = -k(x - h - l_0)\vec{u}_x$
4. $\vec{F} = k\overrightarrow{MM_0} = k\overrightarrow{OM_0} - k\overrightarrow{OM} = -kl_0\vec{u}_z - kz\vec{u}_z$
5. $\vec{F}(M_2) = -k(M_1M_2 - l_0)\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2} = -k\overrightarrow{M_1M_2} + kl_0\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2} = -k(x_2 - x_1)\vec{e}_x - k(y_2 - y_1)\vec{e}_y + kl_0\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\vec{e}_x + kl_0\frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\vec{e}_y$
 $\vec{F}(M_1) = -\vec{F}(M_2)$

Exercice 2 : Homogénéité

1. Montrer que l'expression obtenue en cours $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est homogène.
2. On trouve expérimentalement $\omega = 250^\circ/\text{min}$, convertir ce résultat en rad/s.

1. $[k].L = [F] = M.L.T^{-2}$ d'où $[k] = M.T^{-2}$. On a donc $[k/m] = T^{-2}$ d'où $[\sqrt{k/m}] = T^{-1}$. $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ est aussi de dimension T^{-1} donc la formule est bien homogène. 2.

$$\omega = \frac{250^\circ}{1\text{min}} = \frac{250 \times \frac{\pi}{180} \text{rad}}{60\text{sec}} = 0,0727 \text{ rad/s}$$

Exercice 3 : Vitesse d'un vélo

Sous l'effet d'une accélération constante, un vélo initialement immobile parcourt un mètre en une seconde. À cet instant (une seconde après avoir démarré), le conducteur regarde son compteur. Quelle est la vitesse affichée?

Propositions : 1. $v = 0,5 \text{ m/s}$ 2. $v = 1,0 \text{ m/s}$ 3. $v = 1,5 \text{ m/s}$ 4. $v = 2,0 \text{ m/s}$ 5. $v = 2,5 \text{ m/s}$

$\ddot{x} = a$ une constante (inconnue certe, mais constante). On peut donc facilement intégrer $\dot{x}(t) = at + cte = at$ car à $t = 0$ le vélo est immobile.

D'où $x(t) = \frac{1}{2}at^2$. On utilise le fait qu'en une seconde on a parcouru un mètre pour trouver a : $a = 2x/t^2$, soit $a = 2 \text{ m/s}^2$.

On utilise ensuite l'expression de la vitesse pour trouver $\dot{x}(t = 1 \text{ s}) = 2,0 \text{ m/s}$

Exercice 4 : Ressort vertical.

Établissez à partir des loi de la physique l'équation différentielle qui décrit le mouvement d'une masse suspendue à un ressort vertical de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k .

Résolvez la pour les conditions initiales suivantes : à $t = 0$ la masse est écartée d'une distance d à partir de sa position d'équilibre (distance algébrique pouvant être positive ou négative) puis lâchée sans vitesse initiale.

Indications si vous avez du mal à démarrer :

1. Faites un schéma
2. Choisir un sens pour l'axe vertical z . Je conseille de l'orienter vers le bas.
3. Faire le bilan des forces et déterminer la position d'équilibre.
4. Établir l'équation différentielle sur z .
5. Montrer que le second membre vaut $\omega_0^2 z_{eq}$
6. Poser $Z = z - z_{eq}$, quelle est la nouvelle équation ?
7. Résoudre et déterminer les conditions initiales.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } x = l - l_{eq}.$$

Exercice 5 : Ressorts en série ou en parallèles

On considère une masse qui est reliée à un mur via deux ressorts (k, l_0) (ressorts en parallèle).

1. Ce système est-il un oscillateur harmonique ? Si oui, quelle est sa pulsation propre ?
2. Résoudre l'équation en supposant que les ressorts sont initialement à l'équilibre et que l'on impose une vitesse v_0 à la mase.

On considère maintenant un ressort attaché à un mur d'un coté et à un deuxième ressort de l'autre coté. Ce deuxième ressort est lui même attaché à une masse M de masse m .

Les deux ressorts ont pour raideur k et pour longueur à vide l_0 .

- En introduisant un point M' de masse nulle entre les deux ressorts et en appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir un lien entre les longueurs l_1 et l_2 des deux ressorts.
- À l'aide d'un schéma, établir un lien entre les longueurs des ressorts et la position x de la masse M .
- En déduire l'équation du mouvement de M , a-t-on affaire à un oscillateur harmonique? si oui quelle est sa pulsation?

- La force est $\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{e}_x$ pour chacun des ressorts, l'équation est donc

$$m\ddot{x} = -2kx + 2kl_0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\frac{k}{m}x = 2\frac{k}{m}l_0,$$

on a donc un OH de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{2\frac{k}{m}}$

- $x(t) = \frac{v}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + l_0$
- $k(l_1 - l_0) - k(l_2 - l_0) = 0$ d'où $l_1 = l_2$
- graphiquement $x = l_1 + l_2$ donc d'après la question précédente $x = 2l_2$
- $m\ddot{x} = -k(l_2 - l_0) = -k(\frac{x}{2} - l_0) = -\frac{k}{2}(x - 2l_0)$. On a donc un OH de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$

idée : prendre des ressorts de l_0 différents

Exercice 6 : Masse liée à un ressort sur un plan incliné

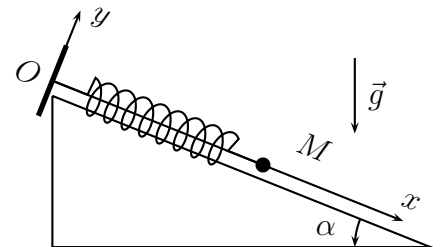
On considère un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k , dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et un point matériel M de masse m .

On néglige tout frottement.

Soit un axe Ox sur le plan incliné (voir figure).

- Déterminer l_e , la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de l_0 , m , g , k et α .
- À partir de la position d'équilibre M est déplacé d'une distance $d < l_e$ comptée algébriquement sur Ox et lâché sans vitesse initiale à $t = 0$.

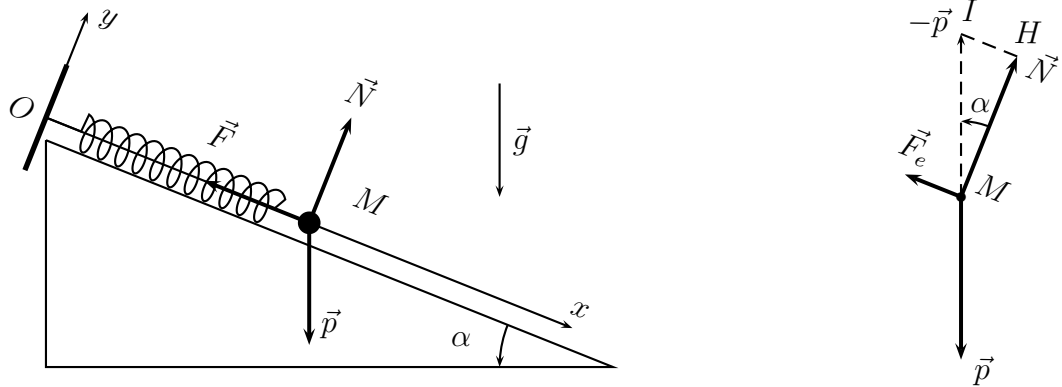
Établir, pour $t \geq 0$, l'équation horaire du mouvement de M en fonction de d , k , m et l_e .



- Étude statique. On va utiliser la première loi de Newton, ou principe d'inertie pour déterminer la longueur l_e du ressort à l'équilibre.

Le référentiel utilisé est celui lié au sol et considéré comme galiléen. Le système d'axes est imposé par l'énoncé. On choisit le système $\{ M \}$ le point matériel. Les forces appliquées à ce système sont : le poids $\vec{p} = m \cdot \vec{g}$, la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(l - l_0) \cdot \vec{e}_x$ ici et la réaction du support $\vec{R} = \vec{N}$ normale au support car il n'y a pas de frottement.

On représente ces forces sur la figure ci-dessous à gauche.



Comme on se place à l'équilibre ($\vec{F} = \vec{F}_e$), la somme vectorielle des forces appliquées est nulle : $\vec{p} + \vec{F}_e + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e + \vec{N} = -\vec{p}$.

En se reportant à la figure ci-dessus à droite, dans le triangle IHM , on peut écrire $\sin \alpha = \frac{F_e}{p}$ (on s'arrange pour ne pas faire apparaître la norme N de $\vec{N}$ qu'on ne connaît pas).

On fait ensuite apparaître l_e dans $F_e = \|\vec{F}_e\| = k(l_e - l_0) > 0$ et comme $p = \|\vec{p}\| = mg$, on en déduit $\sin \alpha = \frac{k(l_e - l_0)}{mg} \Rightarrow l_e = l_0 + \frac{mg}{k} \sin \alpha$.

2. Étude dynamique : on s'attend à observer des oscillations de M autour de la position d'équilibre précédente. Hors équilibre, c'est la seconde loi de Newton i.e le principe fondamental de la dynamique (PFD) qui s'applique.

En conservant le même référentiel et le même système, le PFD prend la forme : $m \cdot \vec{a} = \vec{p} + \vec{F} + \vec{N}$ avec ici $\vec{F} = -k(l - l_0) \cdot \vec{e}_x$ et $l = x(t)$ dépendant du temps.

De façon à faire disparaître $\vec{N}$ dont on ne connaît pas la norme, on projette le PFD selon l'axe Ox . Dans la base $(\vec{e}_x; \vec{e}_y)$, on a $\vec{a} = \ddot{x}(t) \cdot \vec{e}_x + \ddot{y}(t) \cdot \vec{e}_y$, $\vec{p} = +mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_y$; $\vec{N} = N \vec{e}_y$ et enfin $\vec{F} = -k(x(t) - l_0) \cdot \vec{e}_x$. On en déduit l'équation différentielle

$$m\ddot{x}(t) = +mg \sin \alpha - kx(t) + kl_0 \Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}(l_0 + \frac{mg}{k} \sin \alpha) = \frac{kl_e}{m}$$

On écrit cette équation sous la forme canonique $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 l_e$.

La solution est de la forme $sol = sol_H + sol_P$ soit ici $x(t) = A \cdot \cos \omega_0 t + B \cdot \sin \omega_0 t + l_e$.

Reste à déterminer les constantes d'intégration A et B (homogène à des distances) par utilisation des conditions initiales.

À $t = 0^-$, on a $l = x(0^-) = l_e + d$ et $\dot{x}(0^-) = 0$ la position et la vitesse de M ne peuvent pas subir de discontinuité. On en déduit $x(0^+) = l_e + d \Rightarrow l_e + d = A + l_e \Rightarrow A = d$ et $\dot{x}(0^+) = 0 = 0 + \omega_0 \cdot B + 0 \Rightarrow B = 0$.

Et finalement $x(t) = l_e + d \cos \omega_0 t$.

On retrouve donc bien un mouvement rectiligne sinusoïdal avec $l_e - d \leq x(t) \leq l_e + d$.

Exercice 7 : Oscillateur harmonique ?

Soit l'équation différentielle suivante : $\ddot{x}(t) - \omega_0^2 x(t) = 0$, où ω_0 est une constante.



1. La fonction $x(t) = X_0 \sin(\omega_0 t)$ est-elle solution de cette équation différentielle ?
2. En réfléchissant au type de force mise en jeu dans une telle équation différentielle, pouvait-on s'attendre au résultat précédent ?

1. non.
2. oui, on a une force du type $f = kx$ qui tend à éloigner le point M de l'abscisse 0.

Exercice 8 : Conservation de l'énergie

On considère un système masse m reliée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . Le déplacement est horizontal selon l'axe $x'x$.

1. Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit $x(t)$.
2. A l'instant initial, on lâche le mobile sans vitesse initiale après l'avoir comprimé d'une longueur $d < l_0$. Déterminer $x(t)$, la solution de cette équation différentielle.
3. Montrer que l'énergie mécanique du système est constante.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0$$

Exercice 9 : Bus et dos d'âne

Un bus vide de masse $M = 5$ tonnes passe au-dessus d'un dos d'âne. Il oscille alors verticalement à la fréquence $f = 1$ Hz. Au retour, le bus est rempli d'une cinquantaine de passagers de masse moyenne $m = 60$ kg.

Quelle sera la fréquence des oscillations après le dos d'âne ?

Le bus peut être assimilé à un système masse (véhicule à vide puis avec passagers) – ressorts (système suspensions, d'amortisseurs) et en faisant l'hypothèse qu'il se comporte comme un oscillateur (pas forcément harmonique car il n'oscille heureusement pas pendant une durée infinie), sa pulsation propre sera :

- A vide,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = 2\pi f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}}$$

- En présence des 50 passagers de masse totale $50m$,

$$\omega'_0 = \sqrt{\frac{k}{M + 50m}} = 2\pi f'_0 \Rightarrow f'_0 = \frac{\omega'_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M + 50m}}$$

En faisant le rapport des deux expressions, de façon à éliminer k qu'on ne connaît pas, on en déduit :

$$\frac{f'_0}{f_0} = \sqrt{\frac{M}{M + 50m}} \Rightarrow f'_0 = \frac{1}{T_0} \sqrt{\frac{M}{M + 50m}}$$

Remarque : réaliser les calculs avec les expressions littérales jusqu'au bout nous permet de vérifier que la relation est bien homogène.

L'application numérique donne

$$f'_0 = \frac{1}{1} \times \sqrt{\frac{5 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3 + 50 \times 60}} \simeq 0,8 \text{ Hz}$$

Exercice 10 : Conservation de l'énergie

On considère un système masse m reliée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 .

Le déplacement est horizontal selon l'axe $x'x$. La solution de l'équation différentielle est de la forme $x(t) = l_0 + A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

À l'instant initial on lâche le mobile d'une position $x(t) = l_0 - d$ avec une vitesse v_0 .

1. Par une méthode énergétique, déterminer l'amplitude des oscillations (c'est-à-dire l'expression de A).
2. Par une méthode énergétique, déterminer la vitesse maximale des oscillations. Vérifier que cela correspond à $A\omega_0$ (résultat que l'on peut obtenir par dérivation de la solution).

On utilise la conservation (montrée en cours) de l'énergie mécanique entre l'instant initial et un instant où le mobile fait demi-tour. Lorsque le mobile fait demi-tour, sa vitesse s'annule et son élongation est maximale.

1. $E_{m,ini} = E_{m,demi-tour} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(l_0 - d - l_0)^2 = 0 + \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{d^2 + \frac{m}{k}v_0^2}$ (car $A > 0$)
 2. de même, la vitesse est maximale lorsque l'élongation $x - l_0$ est nulle. $\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(l_0 - d - l_0)^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + 0 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}d^2}$.
- Si on fait $A\omega_0 = \sqrt{d^2 + \frac{m}{k}v_0^2} \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}d^2}$ on trouve bien le même résultat.

Exercice 11 : Détermination de constante d'intégration

On considère un oscillateur harmonique d'équation différentielle $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{eq}$ où ω_0 et z_{eq} sont des constantes et $z(t)$ une fonction inconnue. Résoudre l'équation différentielle avec les conditions initiales suivantes :

1. À $t = 0$, $z = z_{eq}$ et $v = v_0$.
2. À $t = t_0$, $z = z_0$ et $v = 0$.
3. À $t = t_0$, $z = z_{eq}$ et $v = v_0$.
4. À $t = 0$, $z = z_{eq} + h_0$ et $v = v - 0$.

La solution particulière et la solution homogène ne dépendent pas des conditions initiales. Les solutions sont donc toujours de la forme $z = z_{eq}(sol_P) + A \cos(\omega_0 t + \varphi)(sol_H)$ ou bien (et c'est équivalent) $z = z_{eq} + B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t)$. Les conditions initiales nous permettent de déterminer A et φ (ou B et C) qui sont les deux constantes d'intégrations (équation différentielles d'ordre 2). On a alors $\dot{z} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ ou bien $\dot{z} = -B\omega_0 \sin(\omega_0 t) + C\omega_0 \cos(\omega_0 t)$. Il suffit maintenant d'écrire les systèmes d'équations en choisissant si on travaille avec le couple d'inconnu (A, φ) ou (B, C) .

1.
$$\begin{cases} z(t=0) = z_{eq} \\ \dot{z}(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{eq} + A \cos(\varphi) = z_{eq} \\ -A\omega_0 \sin \varphi = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ A = -v_0/\omega_0 \end{cases}$$

Soit $z = z_{eq} + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.

2.
$$\begin{cases} z(t=t_0) = z_0 \\ \dot{z}(t=t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{eq} + A \cos(\varphi + \omega_0 t_0) = z_0 \\ -A\omega_0 \sin(\varphi + \omega_0 t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi + \omega_0 t_0 = 0 \\ A = z_0 - z_{eq} \end{cases}$$

Soit $z = z_{eq} + (z_0 - z_{eq}) \cos(\omega_0(t - t_0))$.

3.
$$\begin{cases} z(t=t_0) = z_{eq} \\ \dot{z}(t=t_0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{eq} + A \cos(\varphi + \omega_0 t_0) = z_{eq} \\ -A\omega_0 \sin(\varphi + \omega_0 t_0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi + \omega_0 t_0 = -\pi/2 \\ A = v_0/\omega_0 \end{cases}$$

Soit $z = z_{eq} + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_0))$.

4. Cet exemple est plus délicat, la deuxième forme est plus pratique. Nous allons résoudre avec les deux formes.

$$\begin{cases} z(t=0) = z_{\text{eq}} + h_0 \\ \dot{z}(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cos(\varphi) = h_0 \\ -A\omega_0 \sin(\varphi) = v_0 \end{cases}$$

pour faire disparaître A , on peut faire le rapport des équations. Pour faire disparaître φ , on peut sommer les deux équations au carré (on utilise $\cos^2 + \sin^2 = 1$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan \varphi = \frac{v_0}{h_0 \omega_0} \\ A^2 = h_0^2 + v_0^2 / \omega_0^2 \end{cases}$$

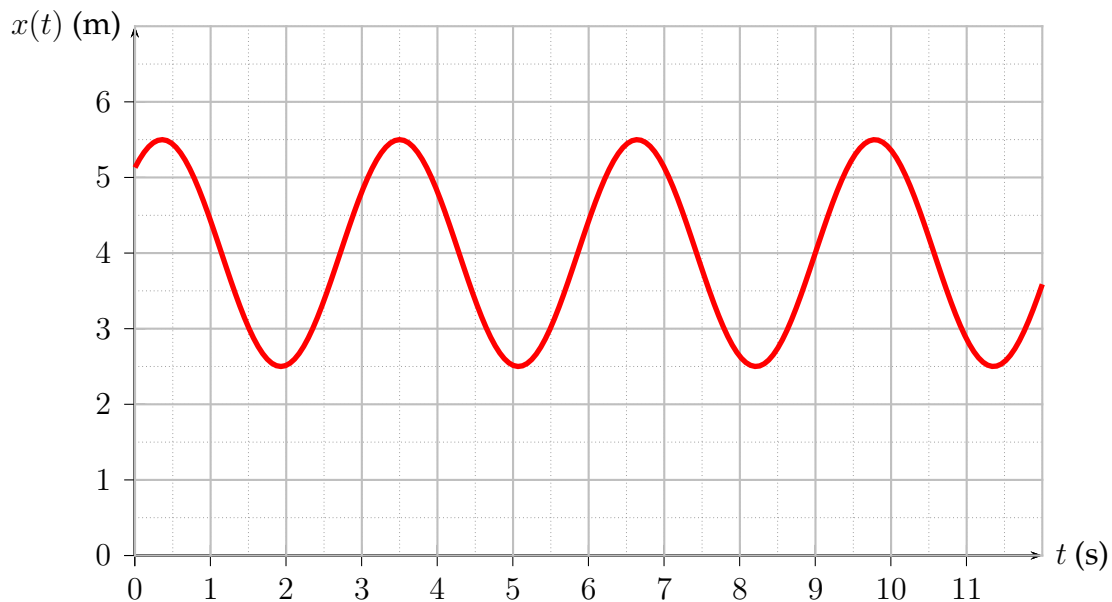
Soit $z = z_{\text{eq}} + \sqrt{h_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \cos\left(\omega_0 t + \arctan \frac{v_0}{h_0 \omega_0}\right)$ (résultat en fait un peu faux car on n'a pas fait attention au signe de h_0 , cf cours de S.I. et de physique sur les diagrammes de bodes). En utilisant la 2e forme

$$\begin{cases} z(t=0) = z_{\text{eq}} + h_0 \\ \dot{z}(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = h_0 \\ C\omega_0 = v_0 \end{cases}$$

$z = z_{\text{eq}} + h_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$. Le résultat est beaucoup plus simple, mais ne montre pas bien l'amplitude des oscillations.

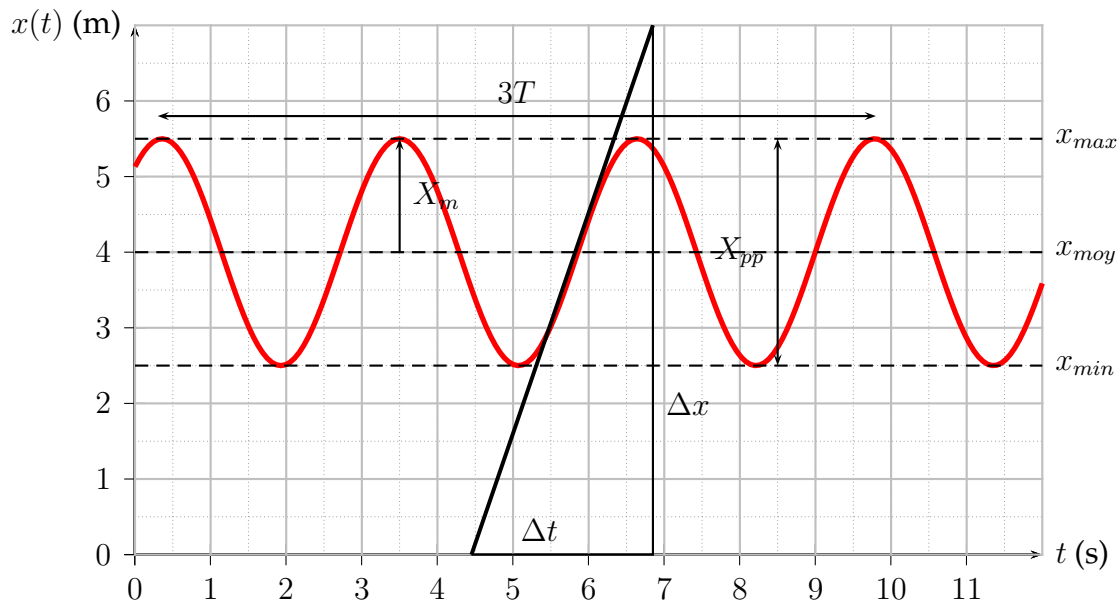
Exercice 12 : Caractéristiques d'une sinusoïde

1. Déterminer l'amplitude, la période, la fréquence et la valeur moyenne du signal sinusoïdal représenté ci-dessous.



2. Il s'agit en fait de la longueur $x(t) = l(t)$ d'un ressort de constante de raideur k , lié à un point M de masse $m = 20$ kg. La masse se déplace horizontalement, on procédera aux applications numériques.
- Quelle est la valeur de la position d'équilibre x_{eq} ?
 - Estimez la valeur maximale de la vitesse du mobile.
 - Estimez la valeur de l'énergie mécanique du système masse-ressort.
 - Estimez la valeur de la constante de raideur.

1. Par lecture graphique,



- L'amplitude est la demi-différence de la valeur maximale ($x_{max} = 5,5 \text{ m}$) et de la valeur minimale ($x_{min} = 2,5 \text{ m}$) d'où $X_m = \frac{5,5-2,5}{2} = 1,5 \text{ m}$.
Remarque : ne confondez pas l'amplitude et la valeur crête à crête ($X_{pp} = 2X_m = 3,0 \text{ m}$).
- Pour plus de précision on peut mesurer la durée de plusieurs périodes, trois ici. On estime

$$3T \simeq 9,75 - 0,25 = 9,5 \text{ s soit } T \simeq 3,2 \text{ s et } f = \frac{1}{T} \simeq 0,32 \text{ Hz.}$$

- La valeur moyenne est la demi-somme de la valeur maximale et de la valeur minimale d'où

$$x_{moy} = \frac{5,5 + 2,5}{2} = 4,0 \text{ m.}$$

2. Oscillateur mécanique horizontal.

- Les oscillations ont lieu autour de la position d'équilibre, la valeur moyenne $x_{eq} = x_{moy} = 4 \text{ m}$. Comme la masse se déplace horizontalement, on a directement $l_0 = x_{eq} = 4 \text{ m}$.
- La vitesse $v = \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$ du mobile correspond à la pente de la courbe. Elle est maximale lorsque $x = x_{eq}$ et une mesure graphique de la pente nous donne

$$v_{max} \simeq \frac{\Delta x}{\Delta t} \simeq \frac{7}{6,9 - 4,5} \simeq 2,9 \text{ m.s}^{-1}$$

Autre méthode : comme $x(t)$ est de la forme $x_{moy} + X_m \cos(\omega t + \varphi)$, la vitesse est égale à $-\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)$, elle même sinusoïdale d'amplitude

$$V_m = v_{max} = \omega X_m = \frac{2\pi}{T} X_m \simeq \frac{2 \times 3,14 \times 1,5}{3,2} \simeq 2,9 \text{ m.s}^{-1}$$

- L'énergie mécanique du système est la somme de son énergie cinétique et son énergie potentielle

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(l(t) - l_0)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}k(x(t) - l_0)^2$$

à tout instant et en particulier lorsque $x(t) = x_{eq} = l_0$, le ressort n'est pas déformé et toute l'énergie est sous la forme énergie cinétique soit

$$E_m = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + 0 \simeq 0,5 \times 20 \times (2,9)^2 \simeq 84 \text{ J}$$

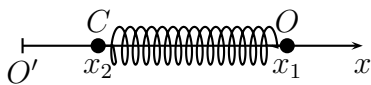
- (d) Au contraire, lorsque le ressort est déformé au maximum, $x(t) = X_m$ et la masse s'arrête avant de repartir dans l'autre sens. L'énergie mécanique est alors uniquement sous la forme potentielle et

$$E_m = 0 + \frac{1}{2}k(x_{max} - l_0)^2 = \frac{1}{2}kX_m^2 \Rightarrow k = \frac{2E_m}{X_m^2} \simeq \frac{2 \times 84}{(1,5)^2} \simeq 75 \text{ N.m}^{-1}$$

Exercice 13 : Oscillations d'une molécule

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par deux masses m_1 et m_2 mobiles sur l'axe $O'x$ et liées par un ressort de raideur k et longueur à vide l_0 . La position de l'atome d'oxygène (respectivement carbone) est repérée par l'abscisse x_1 (respectivement x_2). Initialement, les deux atomes sont immobiles et leur position notées x_1^0 et x_2^0 .

1. Effectuer un bilan des forces sur l'atome d'oxygène (on négligera le poids). Établir l'équation différentielle de son mouvement.
2. Effectuer un bilan des forces sur l'atome de carbone (on négligera le poids). Établir l'équation différentielle de son mouvement.
3. Ces deux équations sont couplées : le mouvement d'un atome dépend du mouvement de l'autre. On introduit deux fonctions : $s = m_1x_1 + m_2x_2$ et $d = x_1 - x_2$. Quelles sont les équations différentielles satisfaites par s et d ? Sont-elles couplées?
4. Quelle est la forme des solutions correspondantes?
5. Donner les expressions de x_1 et x_2 .
6. Quelle est la période des oscillations? Dans le cas où l'une des deux molécules est beaucoup plus lourde que l'autre, quel résultat retrouve-t-on?



1. $m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2 - l_0)$
2. $m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2 - l_0)$
3. En additionnant membre à membre les deux équations on obtient $\ddot{s} = 0$,
en les soustrayant (et en divisant la première par m_1 et la deuxième par m_2) on obtient :
 $\ddot{d} + k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)d = k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)l_0$.
4. $s = m_1x_1^0 + m_2x_2^0$ $d = l_0 + (x_1^0 - x_2^0 - l_0) \cos(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{k\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}}$
5. $x_1(t) = \frac{s+m_2d}{m_1+m_2} = \frac{m_1x_1^0+m_2x_2^0}{m_1+m_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2}(l_0 + (x_1^0 - x_2^0 - l_0) \cos(\omega t))$, $x_2(t) = \frac{s-m_1d}{m_1+m_2} = \frac{m_1x_1^0+m_2x_2^0}{m_1+m_2} - \frac{m_1}{m_1+m_2}(l_0 + (x_1^0 - x_2^0 - l_0) \cos(\omega t))$
6. La période des oscillations est $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Dans le cas $m_1 \gg m_2$ $\omega \simeq \sqrt{\frac{k}{m_2}}$ donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$.
L'objet le plus lourd ne se déplace presque pas et se comporte comme un « mur ».