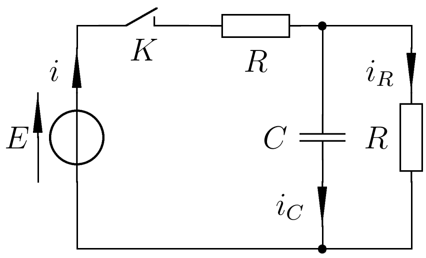
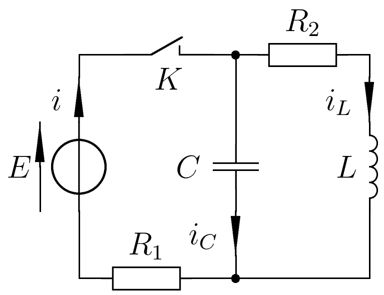
TRAVAUX DIRIGÉS EC_3

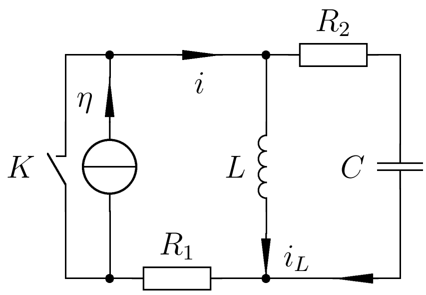
Exercice 1 : Comportement de C et L en RP et à l'instant initial.
Que vaut l'intensité du courant dans les différentes branches à $t = 0^+$ sachant qu'on ferme l'interrupteur K à $t = 0$ dans les deux premiers circuits alors qu'on l'ouvre à $t = 0$ dans le dernier ? Même question en régime permanent.



Circuit 1



Circuit 2



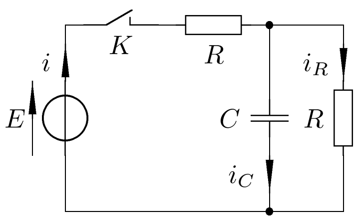
Circuit 3

Pour déterminer les conditions initiales , on représente chaque circuit à $t = 0^-$ puis à $t = 0^+$ en tenant compte de la continuité de la tension aux bornes des condensateurs et de l'intensité du courant dans les bobines.

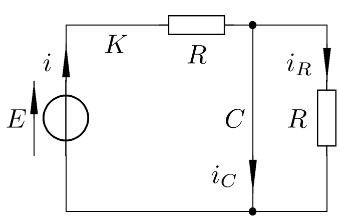
- $u_C(0^-) = u_C(0^+) = U_0 \Rightarrow$, le condensateur est équivalent à un générateur idéal de tension U_0 (un interrupteur fermé dans le cas usuel où $U_0 = 0$: condensateur déchargé).
- $i_L(0^-) = i_L(0^+) = I_0 \Rightarrow$, la bobine est équivalente à un générateur idéal de courant I_0 (un interrupteur ouvert dans le cas usuel où $I_0 = 0$: pas de courant dans la branche).

Pour le régime permanent, on remplace les condensateurs par des interrupteurs ouverts ($i_C = C.\frac{du_C}{dt} = 0$) et les bobines par des interrupteurs fermés ($u_L = L.\frac{di_L}{dt} = 0$).
Une fois les circuits simplifiés, on utilise les lois étudiées lors du chapitre précédent.

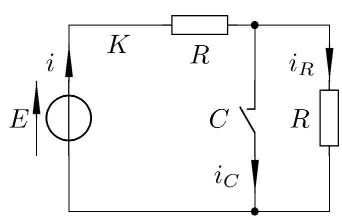
Circuit 1



$t = 0^-$, $u_C(0^-) = 0$



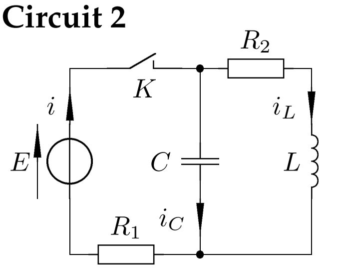
$t = 0^+$, $u_C(0^+) = 0$



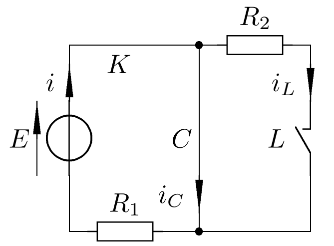
$t \to \infty$, $i_C(\infty) = 0$

À $t = 0^+$, le résistor de droite est court circuité, aucun courant ne le traverse et $i_R(0^+) = 0$. On se retrouve avec un circuit équivalent à une seule maille et la loi de Pouillet donne $i(O^+) = i_C(0^+) = \frac{E}{R}$.
Pour $t \to \infty$, aucun courant ne traverse le condensateur, $i_C(\infty) = 0$. On se retrouve à nouveau avec un circuit équivalent à une seule maille et la loi de Pouillet donne cette fois $i(\infty) = i_R(\infty) = \frac{E}{2R}$.

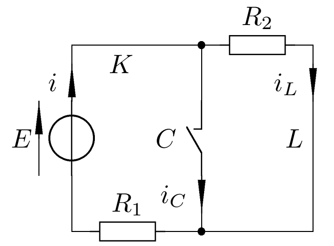
Circuit 2



$t = 0^-$, $u_C(0^-) = 0$, $i_L(0^-) = 0$.



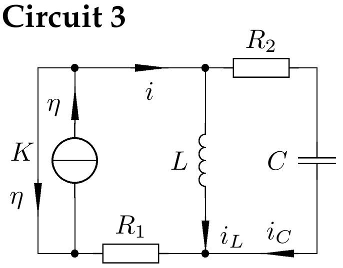
$t = 0^+$, $u_C(0^+) = 0$, $i_L(0^+) = 0$.



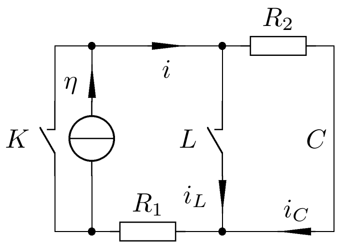
$t \to \infty$, $i_C(\infty) = 0$, $u_L(\infty) = 0$.

À $t = 0^+$, le résistor R_2 est dans une branche ouverte, on a donc $i_L(0^+) = 0$, on se ramène à un circuit équivalent à une seule maille et d'après la loi de Pouillet, $i(0^+) = i_C(0^+) = \frac{E}{R_1}$.
En régime permanent, c'est le condensateur qui est équivalent à un interrupteur ouvert ($i_C(\infty) = 0$), on se ramène à un circuit équivalent à une seule maille et d'après la loi de Pouillet on a cette fois $i(\infty) = i_L(\infty) = \frac{E}{R_1+R_2}$.

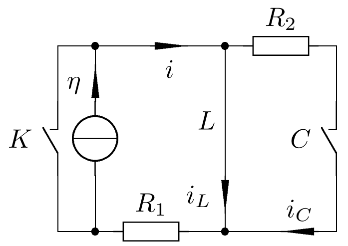
Circuit 3



$t = 0^-$, $i_L(0^-) = 0$, $u_C(0^-) = 0$



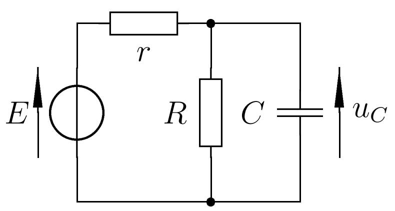
$t = 0^+$, $u_C(0^+) = 0$, $i_L(0^+) = 0$.



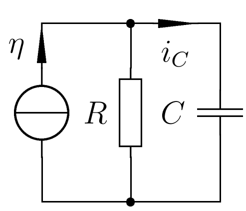
$t \to \infty$, $u_L(\infty) = 0$, $i_C(\infty) = 0$.

Pour $t < 0^-$, K est fermé et la partie située à droite du générateur de courant est court circuitée : tout le courant passe par K fermé et toutes les intensités et tensions sont nulles à droite du générateur.
À $t = 0^+$, $i_L(0^+) = 0$ et le générateur impose $i(0^+) = i_C(0^+) = \eta$.
En régime permanent, $i_C(\infty) = 0$ et $i_L(\infty) = i(\infty) = \eta$.

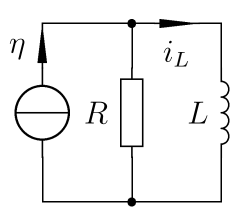
Exercice 2 : Détermination rapide de la réponse d'un circuit
On considère les quatre circuits suivants :



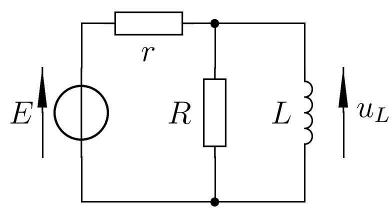
Circuit 1



Circuit 2



Circuit 3



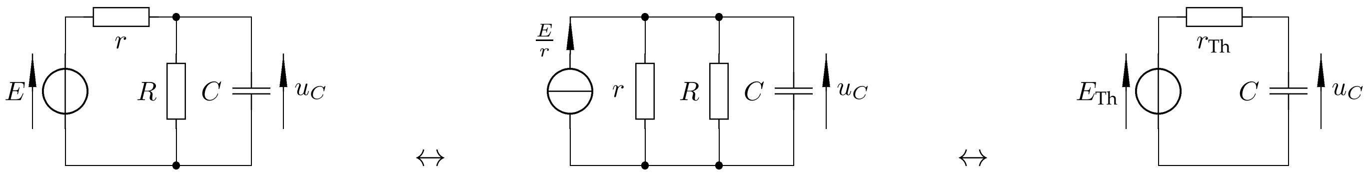
Circuit 4

Pour $t < 0$, E et η sont nuls et pour $t \geqslant 0$, ils sont constants.
À $t = 0^-$, les condensateurs sont déchargés et les bobines ne sont parcourues par aucun courant.

Déterminer les réponses $u_C(t)$, $i_C(t)$, $i_L(t)$ et $u_L(t)$.

Plutôt que de se lancer dans les calculs, on peut essayer de se ramener à un circuit étudié en classe en utilisant les transformations Thévenin $\leftrightarrow$ Norton. On pourra en déduire l'équation différentielle et en déduire l'expression cherchée en tenant compte des conditions initiales.

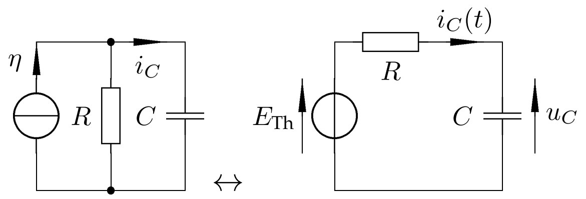
Circuit 1



On se ramène au circuit du cours avec les mêmes conditions initiales d'où $u_C(t) = E_{\text{Th}}[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}]$ avec $E_{\text{Th}} = \frac{RE}{R+r}$ et $\tau = R_{\text{Th}}.C$ où $R_{\text{Th}} = \frac{Rr}{R+r}$.

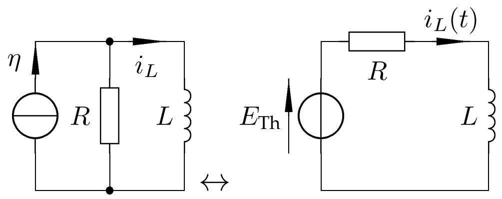
Circuit 2

On se ramène au circuit du cours avec les mêmes conditions initiales d'où $i_C(t) = C.\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{E_{\text{Th}}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $E_{\text{Th}} = R\eta$ et $\tau = RC$.

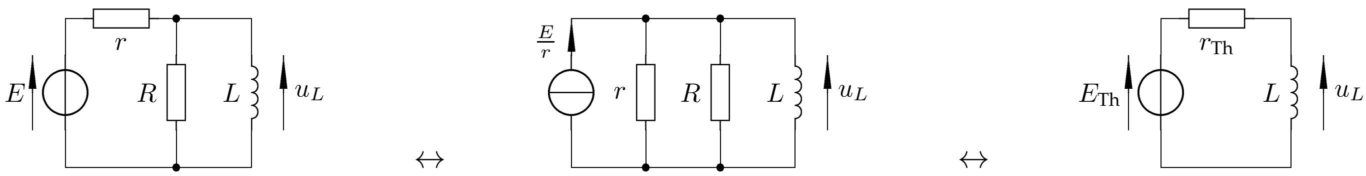


Circuit 3

On se ramène au circuit du cours avec les mêmes conditions initiales d'où $i_L(t) = \frac{E_{\text{Th}}}{R}[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}]$ avec $E_{\text{Th}} = R\eta$ et $\tau = \frac{L}{R}$.



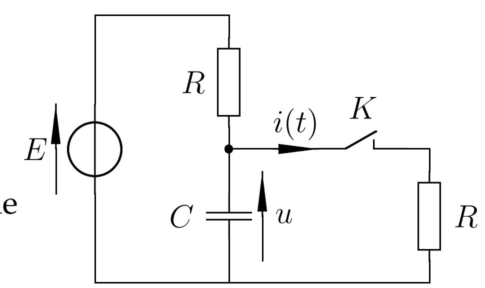
Circuit 4



On se ramène au circuit du cours avec les mêmes conditions initiales d'où $u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = E_{\text{Th}}[e^{-\frac{t}{\tau}}]$ avec $E_{\text{Th}} = \frac{RE}{R+r}$ et $\tau = \frac{L}{r_{\text{Th}}}$ où $r_{\text{Th}} = \frac{Rr}{R+r}$.

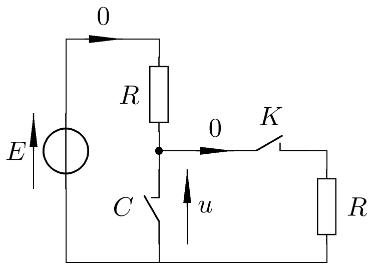
Exercice 3 : Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension.

Soit le montage représenté ci-contre. Pour $t < 0$, le circuit est en régime permanent, c'est à dire que le générateur de tension est allumé depuis longtemps et K ouvert depuis longtemps. On ferme K à $t = 0$.

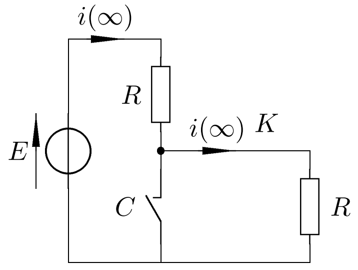


1. Donner les valeurs initiales $i(0^-)$, $i(0^+)$ et la valeur finale $i(\infty)$ de $i(t)$.
2. Déterminer $i(t)$.
3. Tracer son allure.

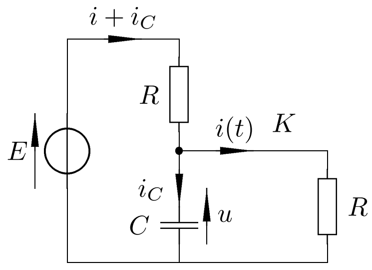
1. Représentons (ci-dessous à gauche) le circuit juste avant $t = 0^-$ c'est à dire en régime permanent et avec K ouvert. Le condensateur est alors équivalent à un interrupteur ouvert. On voit clairement que $i(0^-) = 0$.



à $t = 0^-$



à $t \to \infty$



Pour déterminer $i(0^+)$, on doit utiliser une grandeur qui ne peut pas subir de discontinuité : la tension u aux bornes du condensateur.

À $t = 0^-$, une loi des mailles donne $E - R.0 - u = 0$ d'où $u(0^-) = E$. À $t = 0^+$, K est fermé, le condensateur est en parallèle avec le résistor R traversé par i d'où $u(0) = Ri(0^+)$.

On en déduit $u(0^-) = E = u(0^+) = R.i(0^+) \Rightarrow i(0^+) = \frac{E}{R}$: on a discontinuité de $i(t)$ à $t = 0$.

Pour fini, quand $t \to \infty$ le circuit est à nouveau en régime permanent, C est équivalent à un interrupteur ouvert mais cette fois, K est fermé (ci-dessus au centre).

On se ramène ainsi à un circuit à une maille et la loi de Pouillet donne directement $i(\infty) = \frac{E}{2R}$.

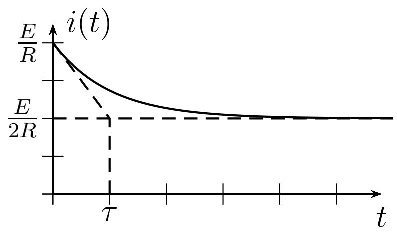
2. Pour déterminer $i(t)$ on commence par établir l'équation différentielle du circuit (premier ordre)

   Pour introduire le minimum d'inconnues, on commence par écrire la loi des nœuds sur le circuit (figure ci-dessus à droite). La loi des mailles donne $E - R(i(t) + i_C(t)) - Ri(t) = 0$ en posant $i_C(t)$ l'intensité qui traverse le condensateur. On a une équation en $i(t)$ mais il reste $i_C(t)$ que l'on exprime en fonction de $i(t)$ en remarquant que comme R (traversé par $i(t)$) est en parallèle avec C, on a $u(t) = Ri(t)$ avec $i_C(t) = C.\frac{du(t)}{dt} = RC\frac{di(t)}{dt}$.

   En reportant dans la loi des mailles, on établit $E - 2Ri(t) - R^2C\frac{di(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} + \frac{2i(t)}{RC} = \frac{E}{R^2C}$ et sous la forme canonique, $\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{E}{2R\tau}$ avec $\tau = \frac{RC}{2}$.

   La solution de cette équation est de la forme $i(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{2R}$ (on remarque que la solution particulière correspond au régime permanent).

   On détermine enfin la constante A en utilisant la condition initiale : $i(0^+) = \frac{E}{R} = A + \frac{E}{2R}$ d'où $i(t) = \frac{E}{2R}[1 + e^{-\frac{t}{\tau}}]$ avec $\tau = \frac{RC}{2}$.



3. On trace l'allure de $i(t)$ en précisant la valeur initiale, l'asymptote et la tangente à l'origine (qui coupe l'asymptote en $t = \tau$).

Exercice 4 : Charge puis décharge

On considère un circuit RC série branché à un générateur de tension idéal de f.é.m. E_0. À $t = 0$, on allume le générateur qui était éteint depuis longtemps. Au bout d'un temps t_1, on éteint le générateur (on admettra alors que la tension à ses bornes devient nulle).
Numériquement : $R = 1{,}00\,\mathrm{k}\Omega$; $C = 5{,}00\,\mu\mathrm{F}$; $t_1 = 15\,\mathrm{s}$ et $E_0 = 2{,}0\,\mathrm{V}$.

1. Comment interpréter « qui était éteint depuis longtemps » en terme de conditions initiales pour la tension u aux bornes du condensateur ?

2. On s'intéresse à la charge du condensateur. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la tension aux bornes du condensateur et la résoudre complètement (c'est-à-dire en tenant compte des conditions initiales). On fera apparaitre une constante de temps τ.

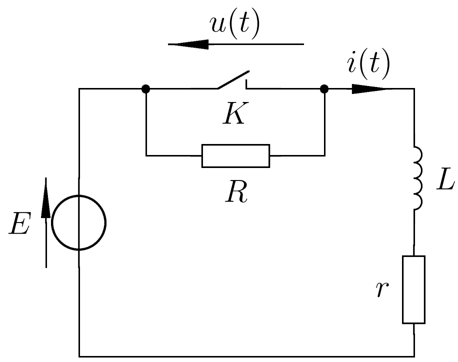
3. Tracer le graphique correspondant.

4. Comparer t_1 et τ. Sans calculatrice, que vaut $u(t_1^-)$?
5. Déterminer la fonction $u(t)$ pour $t \geqslant t_1$ et tracer le graphique correspondant. On fera tout particulièrement attention aux conditions initiales.

1. complètement déchargé grâce/à cause de sa résistance de fuite. tension nulle.
2. cf cours $\dot{u} + \frac{1}{\tau}u = \frac{1}{\tau}E_0$ avec $\tau = RC$. $u(0 \leqslant t \leqslant t_1) = E_0(1 - \exp(-t/\tau)$
3. cf cours.
4. $\tau \ll t_1$. On en déduit que l'on a atteint le régime permanent et donc que $u = E_0$.
5. il faut ici être prudent car la condition initiale est en $t_1 \neq 0$. $\dot{u} + \frac{1}{\tau}u = 0$. L'équation est homogène et la solution générale est $Ae^{-t/\tau}$. On utilise les conditions initiales : $u(t_1) = E_0 \Rightarrow Ae^{-t_1/\tau} = E_0$ d'où $A = E_0e^{t_1/\tau}$ et finalement $u(t) = E_0e^{-(t-t_1)/\tau}$. La courbe est la même que dans le cours mais décalée de t_1 vers la droite.

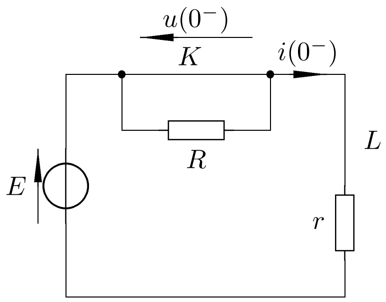
Exercice 5 : Étincelle de rupture

Soit le circuit représenté ci-contre.

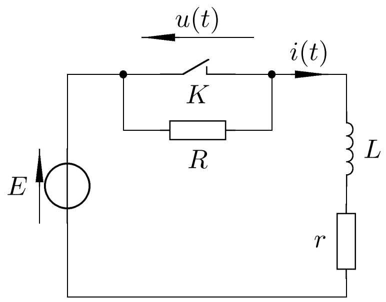


1. Quelle est la valeur de l'intensité $i(0)$ dans le circuit sachant que le courant est établi depuis longtemps et K fermé ?
2. On ouvre K à $t = 0$.
   Déterminer $i(t)$ et tracer son allure.
   Que se passe-t-il si R devient très grande ?
3. Déterminer $u(t)$ et tracer son allure.
   Que se passe-t-il si R devient très grande ?

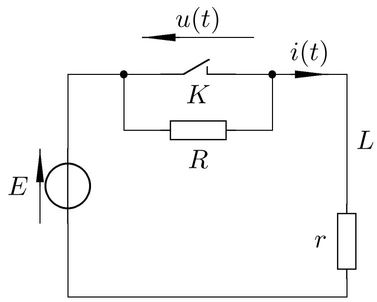
1. Pour déterminer la valeur initiale de $i(t)$, on représente le circuit à $t = 0^-$, c'est à dire avec K fermé et en régime permanent. On peut alors remplacer la bobine par un interrupteur fermé (circuit ci-dessus) et Quelle est la valeur de l'intensité $i(0)$ dans le circuit sachant que le courant est établi depuis longtemps et K fermé ?

   à $t = 0^-$

   à t

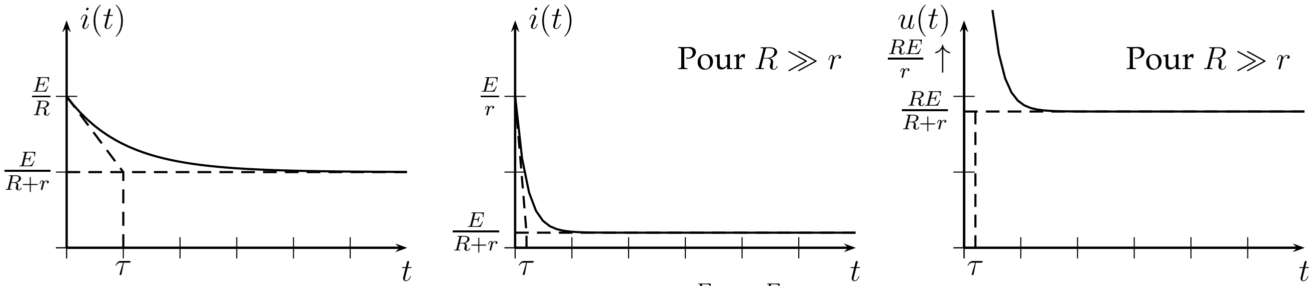
   pour $t \to \infty$

   Le résistor étant court circuité, on a simplement $i(0^-) = \frac{E}{r}$.
   L'intensité du courant qui traverse une bobine ne peut pas subir de discontinuité, on a donc $i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{r}$.
2. On ouvre K à $t = 0$, l'application de la loi des mailles donne alors (circuit ci-dessus au centre) $E - Ri(t) - L\frac{di(t)}{dt} - ri(t) = 0 \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{E}{L}$ avec $\tau = \frac{L}{R+r}$
   La solution de cette équation est du type $i(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\tau E}{L} = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R+r}$.

On vérifie au passage que la solution particulière correspond au régime permanent (K ouvert et L assimilable à un interrupteur fermé : circuit ci-dessus à droite).

On détermine la constante A en utilisant la condition initiale : $i(0^-) = \frac{E}{r} = i(0^+) = A + \frac{E}{R+r} \Rightarrow A = \frac{E}{r} - \frac{E}{R+r}$ et $i(t) = \frac{E}{R+r} + (\frac{E}{r} - \frac{E}{R+r})\exp(-\frac{t}{\tau})$ avec $\tau = \frac{L}{R+r}$.

On trace l'allure de $i(t)$ en précisant la valeur initiale, l'asymptote et la tangente à l'origine.



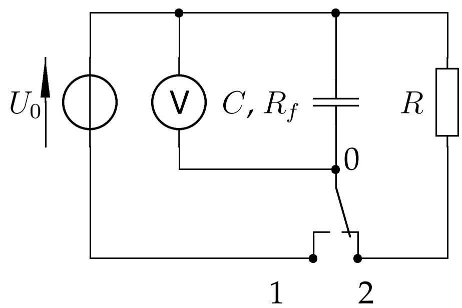
Si $R \to \infty$, $\tau \to 0$ et i passe très rapidement de $\frac{E}{r}$ à $\frac{E}{R+r} \to 0$, on tend vers une discontinuité de i dans la bobine.

3. On a simplement $u(t) = Ri(t) = \frac{RE}{R+r} + (\frac{RE}{r} - \frac{RE}{R+r})\exp(-\frac{t}{\tau})$ avec $\tau = \frac{L}{R+r}$ et si $R \to \infty$, $u(0^+) = \frac{RE}{r} \to \infty$, une très grande tension apparaît aux bornes de l'interrupteur, cela peut conduire à l'apparition d'une étincelle (dite "étincelle de rupture") lors de l'ouverture d'un circuit inductif.

Exercice 6 : Mesure d'une résistance par la méthode de “perte de charge”.

Pour mesurer une résistance R élevée de plusieurs mégaohms, on réalise le montage électrique ci-dessous où C est un condensateur réel de résistance de fuite R_f non représentée sur la figure, on donne $C = 10\ \mu$F.

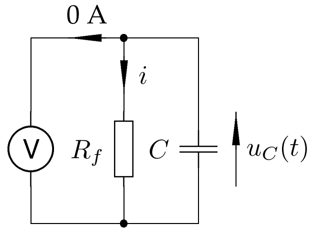
- On abaisse l'interrupteur double en position 1 ; lorsque le condensateur est chargé, le voltmètre numérique V (supposé parfait) indique la tension $U_0 = 6{,}00$ V.
- On ouvre l'interrupteur (position intermédiaire) ; au bout du temps $t_1 = 20$ s, le voltmètre V indique $U_1 = 5{,}10$ V.
- On charge de nouveau le condensateur sous la tension U_0 (interrupteur dans la position 1) puis on l'abaisse brusquement dans la position 2 ; au bout du temps $t_2 = 20$ s, le voltmètre indique $U_2 = 4{,}60$ V.



1. En déduire les valeurs de la résistance de fuite R_f du condensateur et de la résistance R.
2. Dans la dernière expérience, déterminer à quel instant le condensateur est déchargé de la moitié de son énergie initiale ?

Le condensateur réel est équivalent à un condensateur idéal de capacité C en parallèle avec un résistor de résistance R_f.

1. Tant que l'interrupteur est en position 1, on charge le condensateur.

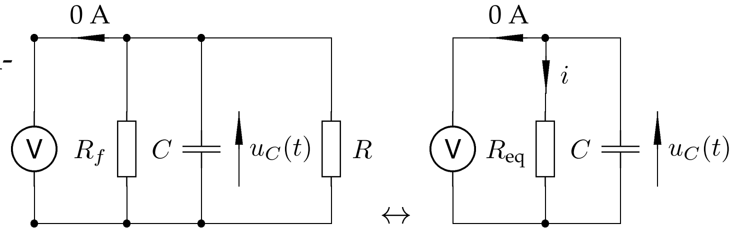


On prend l'origine des temps au moment où on ouvre l'interrupteur, le circuit est alors en régime libre et équivalent à celui représenté ci contre.

Le condensateur se décharge dans R_f avec la constante de temps $\tau = R_f C$.

On peut retrouver l'équation différentielle à l'aide d'une loi des mailles (le voltmètre étant parfait, aucune intensité ne le traverse) : $R_f.i(t) - u_C(t) = 0$ avec $i(t) = -C.\frac{du_C(t)}{dt}$ d'où $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{\tau} = 0$.

La solution est $u_C(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$ et par continuité de $u_C(t)$, $u_C(0^-) = U_0 = u_C(0^+) = A$ d'où finalement $u(t) = U_0.e^{-\frac{t}{\tau}}$. L'énoncé nous indique qu'à $t_1 = 20$ s, $u_C(t = t_1) = U_1 = U_0.e^{-\frac{t_1}{\tau}}$ $\Rightarrow \tau = \frac{t_1}{\ln \frac{U_0}{U_1}} = R_f C$ et finalement, $R_f = \frac{t_1}{C \ln \frac{U_0}{U_1}} \simeq 12{,}3\ \text{M}\Omega$.



Si on bascule l'interrupteur en position 2 après avoir rechargé le condensateur, on se ramène au circuit représenté ci-contre.

Après association des deux résistors en parallèle, on se ramène au cas précédent et $R_{\text{éq}} = \frac{t_2}{C \ln \frac{U_0}{U_2}} \simeq 5{,}2\ \text{M}\Omega$ avec $\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_f}$ d'où $R \simeq 19{,}4\ \text{M}\Omega$.

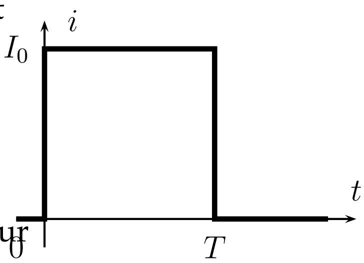
2. L'énergie $E_C(t)$ contenue dans un condensateur aux bornes duquel la tension est $u_C(t)$ s'exprime sous la forme $E_C(t) = \frac{1}{2} C u_C(t)^2$.

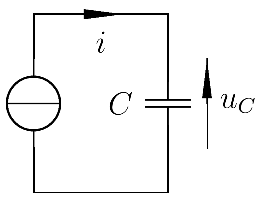
On cherche t_3 tel que $\frac{E_C(t_3)}{E_C(0)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \times \frac{1}{2} C u_C(t_3)^2 = \frac{1}{2} C U_0^2 \Rightarrow u_C(t_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0$ avec $u_C(t_3) = U_0.e^{-\frac{t_3}{\tau_{\text{éq}}}}$ avec $\tau_{\text{éq}} = R_{\text{éq}}.C = \frac{R R_f C}{R + R_f}$.

On en déduit $t_3 = \tau_{\text{éq}} \ln \sqrt{2} = \frac{R R_f C}{R + R_f} \ln \sqrt{2} \simeq 26{,}0$ s.

Exercice 7 : Charge d'un condensateur à courant constant

Le générateur de courant supposé parfait fournit le courant correctionrésenté sur la figure.
Le condensateur est initialement déchargé.





1. Calculer et tracer l'allure de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.
2. Comparer l'énergie fournie par le générateur et l'énergie reçue par le condensateur.

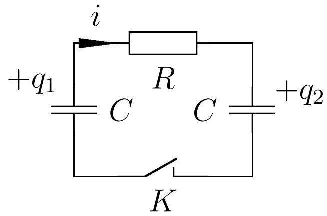
1. Si $t \leqslant T$, $u = \frac{I_0}{C} t$ et $t \geqslant T$, $u = \frac{I_0}{C} T$. 2. $E_G = \frac{I_0^2 T^2}{2C}$ et $E_C = E_G$.

Exercice 8 : Décharge d'un condensateur dans un autre condensateur

À l'instant $t = 0$, l'interrupteur K ferme le circuit où le condensateur de gauche a été préalablement chargé sous la tension U_0 et le condensateur de droite identique est déchargé.

On appelle $q_1(t)$ et $q_2(t)$ les charges respectives des condensateurs à l'instant t (voir dessin).

On choisit le sens positif pour le courant indiqué sur la figure.



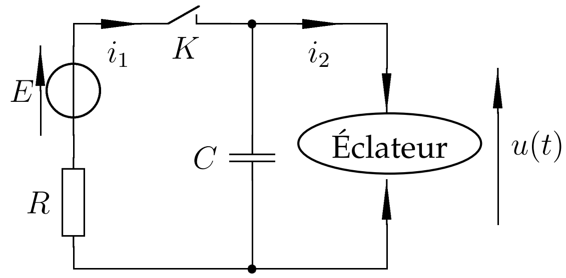
1. Déduire des relations entre le courant et les charges que la somme des charges ne dépend pas du temps : $q_1(t) + q_2(t)$ est constant.
2. Déterminer la charge de chaque condensateur à l'équilibre, c'est à dire après un temps assez long pour que le courant puisse être considéré comme nul.
3. Déterminer les énergies E_{C1} et E_{C2} stockées dans les condensateurs à l'équilibre.
4. En déduire l'énergie dissipée dans le résistor.

5. Écrire l'équation différentielle décrivant l'évolution de $q_1(t)$ avec le temps.
6. Déterminer $q_1(t)$, $q_2(t)$ et $i(t)$. Tracer l'allure des courbes obtenues.
7. À partir de l'expression de $i(t)$, retrouver le résultat de la question 4.

1. $i = \frac{dq_1}{dt} = -\frac{dq_2}{dt} \iff \frac{dq_1+dq_2}{dt} = 0$ et $q_1 + q_2 = Cte = CU_0$. 2. $q_1(\infty) = q_2(\infty) = \frac{U_0}{2}$ 3. $E_{C1} = E_{C2} = \frac{CU_0^2}{8}$. 4. $E_R = \frac{CU_0^2}{4}$. 5. $\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{\tau} = \frac{U_0}{R}$ avec $\tau = \frac{RC}{2}$. 6. $q_1 = \frac{CU_0}{2}(1 + \exp(-\frac{t}{\tau}))$, $q_2 = \frac{CU_0}{2}(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$ et $i = \frac{U_0}{R}\exp(-\frac{t}{\tau})$. 7. $E_R = \int Ri^2 dt$.

Exercice 9 : Éclateur

Un éclateur est connecté comme indiqué sur la figure ci-dessous. Il fonctionne de la manière suivante :



- Dans un premier temps, tant que $u < U_a$ (tension d'amorçage), alors $i_2 = 0$, l'éclateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
- Puis, si $u > U_e$ (tension d'extinction $U_e < U_a$), l'éclateur se comporte comme un conducteur ohmique de résistance r et u décroît.
- Enfin, si $u < U_e$ alors $i_2 = 0$, l'éclateur se comporte à nouveau comme un interrupteur ouvert et u croît jusqu'à u_a.

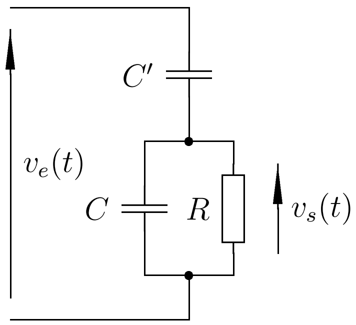
À $t = 0$, C est déchargé et on ferme K, on observe alors une suite d'allumages et d'extinctions de période T.

1. Déterminer t_a, la date du premier allumage.
2. Déterminer t_e, la date de la première extinction. On posera $\alpha = \frac{r}{R+r}$
3. Représenter l'allure de $u(t)$ et déterminer la période T du phénomène.

1. $t_a = -\tau \ln(1 - \frac{U_a}{E})$ avec $\tau = RC$. 2. $t_e = t_a - \alpha\tau \ln \frac{U_e-\alpha E}{U_a-\alpha E}$. 3. $T = \tau(\alpha \ln \frac{U_a-\alpha E}{U_e-\alpha E} + \ln \frac{E-U_e}{E-U_a})$

Exercice 10 : Réponse à une tension dent de scie : *Mines de Douai 1991*.

On considère le circuit de la figure ci-contre. À l'instant initial, les condensateurs C et C' sont déchargés. On applique aux bornes d'entrée de ce circuit une tension variable $v_e(t)$. On appelle $v_s(t)$ la tension de sortie.



1. Établir l'équation différentielle reliant la tension de sortie $v_s(t)$, sa dérivée par rapport au temps $\dot{v}_s(t)$, et la dérivée par rapport au temps de la tension d'entrée $\dot{v}_e(t)$.
2. La tension d'entrée $v_e(t)$ est une impulsion de durée T telle que :
   $v_e(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et $t > T$ et $v_e(t) = kt$ pour $0 < t \leqslant T$ où k est une constante.
   (a) Exprimer $v_s(t)$ pour tout t. On supposera $T \gg R(C + C') = \tau$.
   (b) Représenter la courbe $v_s(t)$ pour $0 < t < 2T$, associée à la courbe $v_e(t)$.

1. $\frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{\tau} = \frac{RC}{\tau}\frac{dv_e}{dt}$ avec $\tau = R(C + C')$. 2. Si $t \leqslant T$, alors $v_s = kRC(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$ et si $t \geqslant T$, alors $v_s = kRC\exp(-\frac{t-T}{\tau})$.

Exercice 11 : Réponse d'un circuit $RC1C2$ série à un échelon de tension

On considère le circuit de la figure ci-dessous. À l'instant initial, les condensateurs C_1 et C_2 sont déchargés. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

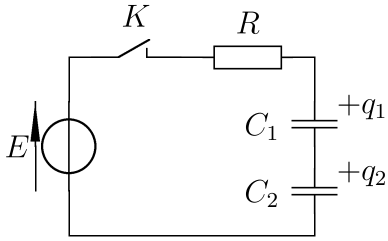
1. Association série.

(a) Établir la relation entre $q_1(t)$ et $q_2(t)$ à tout instant.

(b) Déterminer $q_1(\infty)$ et $q_2(\infty)$ la charge des condensateurs au bout d'une durée très longue devant le temps caractéristique du circuit.

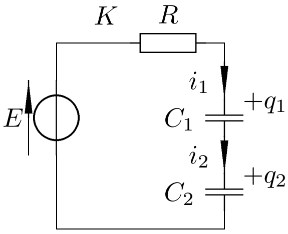
(c) Quelle est l'expression de $q_1(t)$ et $q_2(t)$,

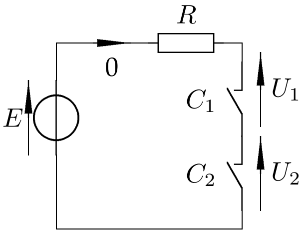
(d) Comparer l'énergie contenue dans chaque condensateur à l'instant t.

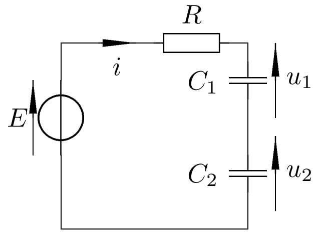


2. Reprendre la question 1.c. si les condensateurs sont montés en parallèle.

1. Association série.







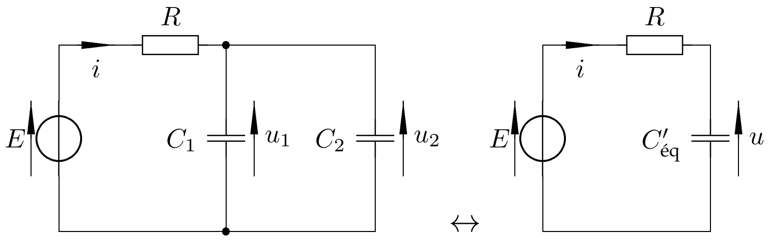
(a) Les deux condensateurs étant en convention récepteur (circuit ci-dessus à gauche), on peut écrire $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$ et $i_2 = \frac{dq_2}{dt}$. Comme ils sont également montés en série, on a aussi $i_1 = i_2$ à tout instant d'où par intégration, $q_1(t) = q_2(t) + Cte$.
Enfin, comme $q_1(0) = q_2(0)$, la constante d'intégration est nulle et à tout instant, $q_1(t) = q_2(t)$.

(b) Au bout d'un temps très long (devant la durée caractéristique du circuit), le régime permanent est atteint et on se ramène au circuit représenté ci-dessus au centre.
À $t \to \infty$ comme à tout instant, $q_1(\infty) = q_2(\infty) \Rightarrow C_1U_1 = C_2U_2$. Par ailleurs, une loi des nœuds donne $E - U_1 - U_2 = 0 \Rightarrow U_2 = E - U_1$.
On en déduit $U_1 = \frac{C_2}{C_1}(E - U_1) \Rightarrow U_1 = \frac{C_2}{C_1+C_2}E$ et $q_1(\infty) = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}E = q_2(\infty)$.

(c) À l'instant t (figure ci-dessus à droite), une loi des maille permet d'écrire :
$E - Ri - u_1 - u_2 = 0$ avec $i = \frac{dq_1}{dt}$, $u_1 = \frac{q_1}{C_1}$ et $u_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_1}{C_2}$ d'où $\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{\tau} = \frac{E}{R}$ avec $\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1+C_2} = RC_{\text{éq}}$ où $C_{\text{éq}}$ est la capacité du condensateur équivalent à l'association série de C_1 et C_2.
La solution de cette équation différentielle est du type $q_1 = \frac{E}{R\tau} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ et en utilisant la condition initiale $q_1(0) = 0$, on en déduit $q_1(t) = q_2(t) = C_{\text{éq}}E(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$ avec $\tau = R_{\text{éq}}$

(d) À l'instant t, l'énergie contenue dans le condensateur 1 est $E_{C,1} = \frac{1}{2}C_1u_1^2 = \frac{q_1^2}{2C_1}$. De même, $E_{C,2} = \frac{1}{2}C_Cu_2^2 = \frac{q_2^2}{2C_2} = \frac{q_1^2}{2C_2}$ d'où $\frac{E_{c,1}}{E_{c,2}} = \frac{C_2}{C_1}$

2. Si les deux condensateurs sont montés en parallèle, ils sont équivalent à un condensateur de capacité $C'_{\text{éq}} = C_1 + C_2$.
On établit la même équation en $q(t)$ où $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ est la charge portée par le condensateur équivalent :
$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau'} = \frac{E}{R}$ avec $\tau' = RC'_{\text{éq}}$.
Comme $q(0) = q_1(0) + q_2(0) = 0$,



la solution de cette équation est $q(t) = C'_{\text{éq}}E(1 - \exp(-\frac{t}{\tau'}))$.
Pour établir $q_1(t)$ et $q_2(t)$, on utilise $u = u_1 = u_2 \Rightarrow \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow q_2 = \frac{C_1}{C_2}q_2 = \frac{C_1}{C_2}(q - q_1) \Rightarrow q_1 = \frac{C_1q}{C_1+C_2} = C_1E(1 - \exp(-\frac{t}{\tau'}))$ et de même $q_2 = \frac{C_2q}{C_1+C_2} = C_2E(1 - \exp(-\frac{t}{\tau'}))$.