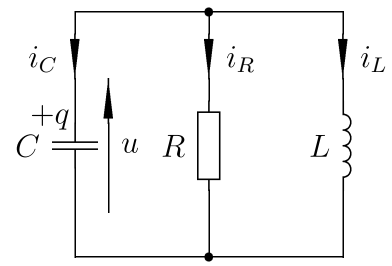
TRAVAUX DIRIGÉS DE EC_4

Exercice 1 : Circuit RLC parallèle

Soit le circuit représenté ci-contre.



1. Montrer que $u(t)$ vérifie l'équation :

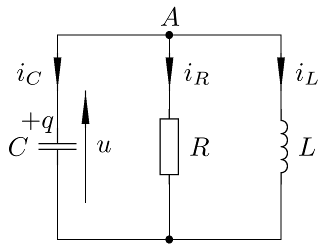
$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0$$

On donnera l'expression de ω_0 et Q en fonction de R, L et C.

2. Déterminer R_c, l'expression résistance pour laquelle on observe un régime critique.
Exprimer Q en fonction de R et R_c. Que peut-on dire de Q si $R \gg R_c$ comparer avec le cas du circuit RLC série.

3. En supposant que C est initialement chargé sous une tension U_0 et que tous les courants sont nuls, calculer l'expression approchée de $u(t)$ si $Q \gg 1$ (régime harmonique).

Soit le circuit représenté ci-contre.

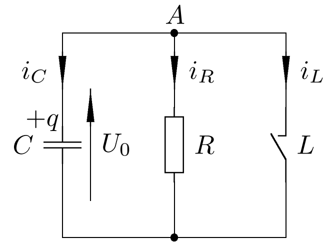


1. Une loi des mailles en A permet d'écrire $i_C + i_R + i_L = 0$ avec $i_C = C.\frac{du_C(t)}{dt} = C.\frac{du(t)}{dt}$, $i_R = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{du(t)}{dt}$ et $u_L = L.\frac{di_L(t)}{dt} = u$ car les trois dipôles sont montés en parallèle.
Pour éviter de faire apparaître i_L sous la forme $\frac{1}{L}\int u(t)dt$, on va dériver la première équation par rapport au temps :
$\frac{di_C(t)}{dt} + \frac{di_R(t)}{dt} + \frac{di_L(t)}{dt} = 0 \Rightarrow C.\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{1}{R}.\frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{L} = 0$ soit $\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}.\frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{LC} = 0$. On obtient ainsi une équation différentielle du second ordre (circuit d'ordre deux), sans second membre (régime libre) à cœfficients constants et tous de même signe.

On met ensuite cette équation sous la forme canonique $\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}.\frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2.u(t) = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (comme pour le circuit RLC série) et $Q = RC\omega_0 = R.\sqrt{\frac{C}{L}}$ c'est à dire l'expression inverse de celle obtenue pour une RLC série ($Q_{\text{série}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$).

2. Le régime permanent est atteint quand $Q = \frac{1}{2} = R.\sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow R = R_c = \frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{C}}$.
On a ainsi $\sqrt{\frac{L}{C}} = 2R_c$ d'où $Q = R.\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2R_c}$.
Si $R \gg R_c$, $Q \to \infty$ et le circuit est en régime harmonique. Dans le cas d'un circuit RLC série, il faut faire tendre R vers 0 pour obtenir un régime harmonique (circuit LC série, $Q_{\text{série}} \to \infty$) alors qu'ici, il faut $R \gg R_c$ (si R tend vers l'infini, on a $Q \to \infty$ et un circuit LC série).

3. Dans le cas où $R \gg R_c \Rightarrow Q \gg \frac{1}{2}$, on peut considérer que le circuit est en régime harmonique, l'équation différentielle devient $\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 0 \times d\frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0 \Rightarrow \frac{d^2u(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 u(t)$.
La solution est du type $u(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$. Comme l'équation est du second ordre, il faut deux conditions initiales pour déterminer les constantes A et B.
On a déjà, par continuité de la tension aux bornes du condensateur $u(0^-) = U_0 = u_(0^+) = A$.
On cherche ensuite $\left[\frac{du(t)}{dt}\right]_{0^+}$. On utilise pour cela $i_C(t) = C.\frac{du(t)}{dt}$ et en particulier à $t = 0^+$, $\left[\frac{du(t)}{dt}\right]_{0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C}$.



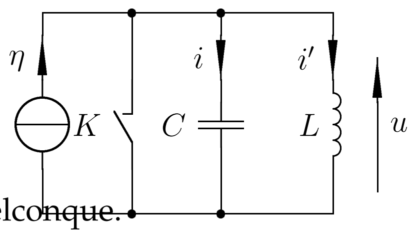
à $t = 0^+$

On représente alors le circuit à $t = 0^+$ avec

- par continuité de $u(t) = u_C(t)$, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$ et
- par continuité $i_L(t)$, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$.

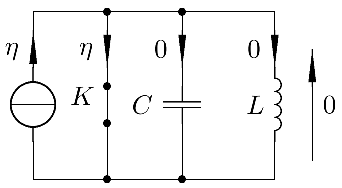
Sur la figure, on lit $i_C(0^+) = -i_R(0^+) = -\frac{U_0}{R}$.
On en déduit $\left[\frac{du(t)}{dt}\right]_{0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\frac{U_0}{RC}$ et comme $u(t) = U_0 \cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$, $\frac{du(t)}{dt} = -\omega_0 U_0 \sin\omega_0 t + \omega_0 B\cos\omega_0 t$ et à $t = 0$, $\left[\frac{du(t)}{dt}\right]_{0^+} = \omega_0 B = -\frac{U_0}{RC} \Rightarrow B = -\frac{U_0}{\omega_0 RC} = -\frac{U_0}{Q} \simeq 0$.
Finalement, on obtient $u(t) = U_0 \cos\omega_0 t$.

Exercice 2 : Circuit LC parallèle

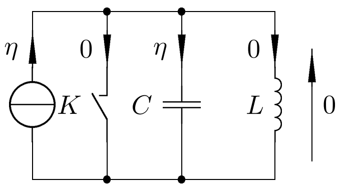


Dans le circuit représenté ci-dessous, à l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur K, le condensateur C étant déchargé.
Déterminer les intensités $i(t)$ et $i'(t)$ ainsi que la réponse du circuit $u(t)$.

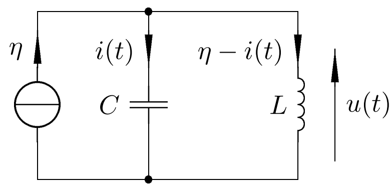
Représentons le circuit à $t = 0^-$, à $t = 0^+$ puis à un instant $t > 0$ quelconque.



à $t = 0^-$



à $t = 0^+$



à $t > 0$

- Pour $t < 0$, le condensateur est déchargé (par hypothèse) d'où $u = 0$ constant. On a donc $i = 0$ (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert).
  i' est constante et comme l'interrupteur K fermé court circuite la bobine on peut estimer que $i' = 0$ également.
- La continuité de i' (l'intensité qui traverse L) et de u (la tension aux bornes de C) permet de déterminer i à $t = 0^+$ (important pour la détermination des constantes d'intégration). Circuit ci-dessus au centre.
- Pour $t > 0$, K reste ouvert, on ne représente plus cette branche du circuit.
  À tout instant, $i'(t) = \eta - i(t)$ ce qui permet de diminuer le nombre d'inconnues.

On établit alors l'équation différentielle (en $i(t)$ ou $u(t)$) qui décrit l'évolution du circuit.
Les relations constitutives s'écrivent $i(t) = C.\frac{du(t)}{dt}$ et $u(t) = L.\frac{di'(t)}{dt} = L.\frac{d(\eta - i(t))}{dt} = -L.\frac{di(t)}{dt}$.
En les combinant de façon à faire disparaître $u(t)$, on obtient immédiatement

$$i(t) = C.\frac{du(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[-L\frac{di(t)}{dt}\right] = -LC\frac{d^2i(t)}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \omega_0^2 i(t) = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

On obtient ainsi une équation différentielle du second degré, sans second membre, à coefficients constants, tous de même signe. La solution de cette équation est de la forme

$$i(t) = A.\cos\omega_0 t + B.\sin\omega_0 t$$

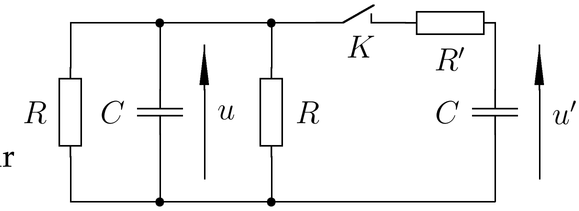
où A et B sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales :
En se reportant à la figure ci dessus, on a $i(0^+) = \eta = A\cos 0 + B\sin 0 \Rightarrow A = \eta$.

De même, $u(0^+) = 0 = L.\left[\frac{di(t)}{dt}\right]_{0^+} = -\omega_0 A \sin 0 + \omega_0 B \cos 0 \Rightarrow B = 0$ et finalement,

$$i(t) = \eta \cos \omega_0 t \Rightarrow i'(t) = \eta(1 - \cos \omega_0 t) \Rightarrow u = L.\frac{di'(t)}{dt} = \omega_0 L \eta \sin \omega_0 t$$

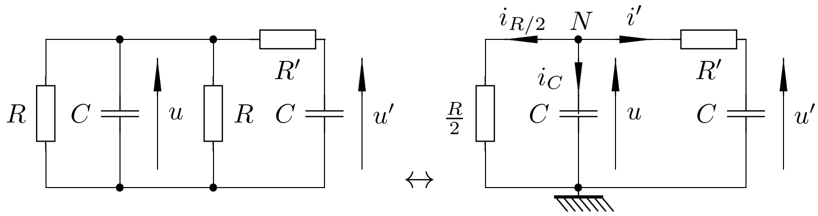
Exercice 3 : Circuit RC du deuxième ordre

Dans le circuit représenté ci-dessous, à l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et le condensateur de droite est chargé sous une tension U'_0 tandis que celui de gauche est non chargé.



1. Trouver l'équation différentielle de ce réseau relative à la tension u aux bornes du condensateur de gauche.
2. Démontrer que cette équation différentielle a pour solution une fonction de la forme $u(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B.e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ où A, B, $\tau_1 > 0$ et $\tau_2 > 0$ sont des constantes.
3. Combien de conditions initiales est-il nécessaire d'écrire pour résoudre cet exercice ? Les déterminer.
4. Représenter l'allure de $u(t)$.

1. Avant tout calcul, on peut commencer par simplifier le circuit en associant les deux résistors R en parallèle (pour $t \geqslant 0$, K est fermé).



Une loi des mailles donne $u - R'i' - u' = 0$ avec $i' = C.\frac{du'(t)}{dt}$ d'où l'équation (1) $u(t) = R'C\frac{du'(t)}{dt} + u'$ dans laquelle on doit éliminer $u'(t)$.

En appliquant la loi des nœuds en N, on peut écrire :

$$i_{R/2} + i_C + i' = 0 \Rightarrow \frac{u(t)}{R/2} + C\frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t) - u'(t)}{R'} = 0 \Rightarrow u'(t) = R'C\frac{du(t)}{dt} + [\frac{2R'}{R} + 1]u(t)$$

(équation 2) et par dérivation temporelle,

$$\frac{du'(t)}{dt} = R'C\frac{d^2u(t)}{dt^2} + [\frac{2R'}{R} + 1]\frac{du(t)}{dt}$$

Remarque : comme on travaille sur un circuit du second ordre, il ne faut pas hésiter à dériver les relations constitutives (1er ordre) si nécessaire.

En remplaçant $u'(t)$ et sa dérivées à l'aide de l'équation (2) dans l'équation (1), on a donc

$$u(t) = R'C[R'C\frac{d^2u(t)}{dt^2} + [\frac{2R'}{R} + 1]\frac{du(t)}{dt}] + R'C\frac{du(t)}{dt} + [\frac{2R'}{R} + 1]u(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{2(R + R')}{RR'C}\frac{du(t)}{dt} + \frac{2}{RR'C^2}u(t) = 0$$

équation différentielle linéaire, sans second membre (pas de générateur), à cœfficients constants, tous de même signe.

2. Pour déterminer le type de solution de cette équation différentielle (régime), soit on l'écrit sous forme canonique et on compare le facteur de qualité à $\frac{1}{2}$, soit on détermine le signe du discriminant de l'équation caractéristique

$$z^2 + \frac{2(R+R')}{RR'C}.z + \frac{2}{RR'C^2} = 0$$

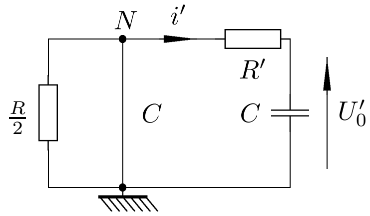
L'énoncé suggère ici la deuxième méthode.

On calcule alors $\Delta = \frac{4(R^2+R'^2)}{R^2R'^2C^2} > 0$ ce qui confirme bien que la solution de l'équation est du type

$$u(t) = A.e^{z_1 t} + B.e^{z_2 t} = A.e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B.e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

où τ_1 et τ_2 sont des constantes positives.

3. On a affaire à un circuit du second ordre d'où une équation différentielle du second ordre qui nécessite la donnée de deux conditions initiales : $u(0^+)$ et $\left[\frac{du}{dt}\right]_{0^+}$.



L'énoncé indique que le condensateur C est initialement déchargé d'où $u(0^-) = 0$ et par continuité de $u_C(t)$, on a $u_C(0^+) = 0$.

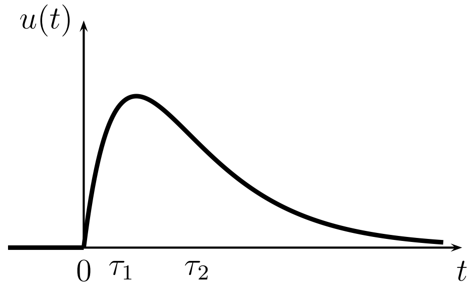
Pour déterminer $\left[\frac{du}{dt}\right]_{0^+} = \frac{i'(0^+)}{C}$, on représente le circuit à $t = 0^+$ en tenant compte de la continuité de $u(t)$ et $u'(t)$ (Cf ci-dessus).

Une loi des mailles permet d'écrire

$$u(0^+) - R'i'(0^+) - u'(0^+) = 0 \Rightarrow 0 - R'i'(0^+) - U'_0 = 0 \Rightarrow i'(0^+) = \frac{U'_0}{R'} \Rightarrow \left[\frac{du}{dt}\right]_{0^+} = \frac{U'_0}{R'C}$$

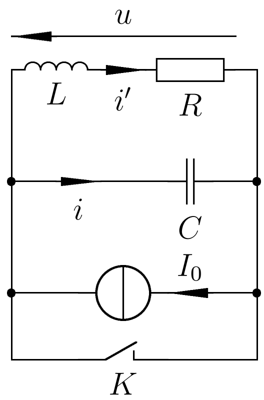
À partir de ces deux expressions et connaissant la forme de $u(t)$, on pourrait déterminer son expression littérale (Cf. cours).

4. Allure de $u(t)$: on sait que $u(0) = 0$, le régime permanent correspond à la solution particulière de l'équation différentielle, c'est à dire à $u(\infty) = 0$ ce qui donne l'asymptote. La tangente à l'origine $\left[\frac{du}{dt}\right]_{0^+}$ est positive et on est dans le cas d'un régime apériodique. On en déduit l'allure représentée ci-dessus.



Exercice 4 : Réponse d'un circuit RLC à un échelon de courant.

Soit le circuit représenté ci-contre pour lequel, $I_0 = 50$ mA, $L = 0{,}5$ H, $r = 100\ \Omega$ et $C = 10\ \mu$F.

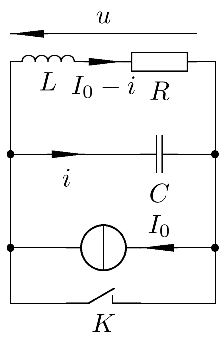


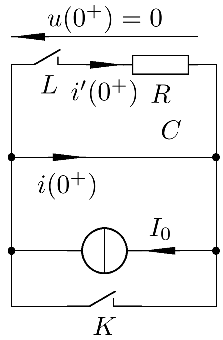
- Pour $t < 0$, K est fermé depuis longtemps.
- K est ouvert à $t = 0$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.
2. En déduire le facteur de qualité du circuit.
3. Déterminer $u(t)$ et tracer son allure.
4. Représenter l'allure de $i(t)$.
5. Commenter le cas idéal où $R \to 0$.

Pour $t < 0$, K fermé court circuite tout le reste du circuit : aucun courant ne traverse la bobine réelle (L,r) ni le condensateur et la tension aux bornes de ces derniers, en parallèle avec K est nulle : $u(t < 0) = 0$, $i(t < 0) = 0$, $i'(t < 0) = 0$.

1. Équation différentielle en $u(t)$ pour $t \geqslant 0$ c'est à dire quand K est ouvert (circuit ci-dessous à gauche)





   On commence par réduire le nombre d'inconnues en écrivant $i'(t) = I_0 - i(t)$.
   On a ensuite $i(t) = C.\frac{du(t)}{dt}$ et $u(t) = L\frac{di'(t)}{dt} + r.i'(t) = -L.\frac{di(t)}{dt} + r(I_0 - i(t))$

$$\Rightarrow u(t) = -LC\frac{d^2u(t)}{dt^2} + r[I_0 - C\frac{du(t)}{dt}] \Rightarrow LC\frac{d^2u(t)}{dt^2} + rC\frac{du(t)}{dt} + u = rI_0$$

   On obtient bien une équation différentielle linéaire du second ordre à cœfficient constants, tous du même signe, et avec second membre.

2. Pour déterminer le facteur de qualité du circuit, on met l'équation précédente sous forme canonique :

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{r}{L}.\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u(t) = \frac{rI_0}{LC}$$
$$\Rightarrow \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}.\frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \frac{rI_0}{LC}$$

   avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \simeq 447$ rad.s^{-1} et $Q = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}} \simeq 2{,}23$ d'où un régime pseudo périodique.

3. La solution de cette équation différentielle est du type $sol = sol_H + sol_P$ avec $sol_P = rI_0 = 5$ V la solution particulière et comme $Q > \frac{1}{2}$ (le circuit évolue en régime pseudo périodique), $sol_H = (A.\cos\omega t + B.\sin\omega t).e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \simeq 436$ rad.s^{-1} et $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \simeq 10^{-2}$ s et sous forme littérale,

$$u(t) = rI_0 + (A.\cos\omega t + B.\sin\omega t).e^{-\frac{t}{\tau}}$$

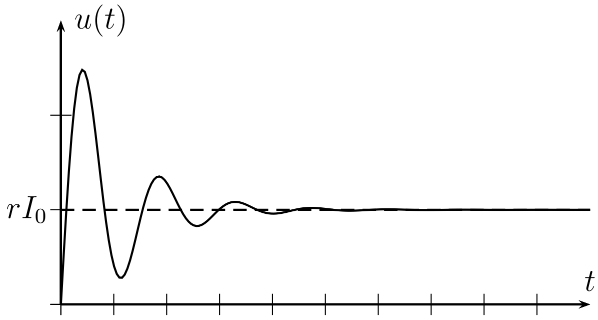
On détermine les constantes d'intégration A et B en utilisant les conditions initiales. Pour cela, on représente le circuit à $t = 0^+$ en tenant compte de la continuité de u la tension aux bornes de C et de $I_0 - i$ l'intensité du courant qui traverse L (figure ci-dessus à droite).

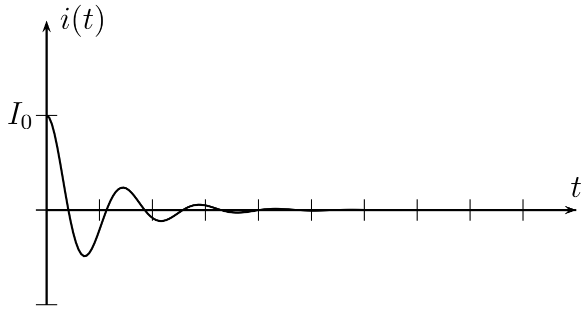
- de $u_C(t) = u(t)$:$u(0^-) = 0 = u(0^+) = rI_0 + A \Rightarrow A = -rI_0 = -5$ V ;
- de $i_L(t) = i'(t)$: $i'(0^-) = 0 = i'(0^+)$

avec $i(0+) = C\left[\frac{du(t)}{dt}\right]_{0^+} = I_0 - i'(0) = I_0 \Rightarrow \left[\frac{du(t)}{dt}\right]_{0^+} = \frac{I_0}{C}$ et comme $\frac{du(t)}{dt} = 0 + [-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t].e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau}[A.\cos \omega t + B.\sin \omega t].e^{-\frac{t}{\tau}}$, à $t = 0$ on a $\left[\frac{du(t)}{dt}\right]_{0^+} = B.\omega - \frac{A}{\tau} = \frac{I_0}{C} \Rightarrow B = \frac{I_0}{\omega_0}\left[\frac{1}{C} - \frac{r}{\tau}\right] \simeq 10{,}3$ V. Finalement,

$$u(t) = 5 + \exp(-100t)(-5\cos 436t + 10{,}3\sin 436t)$$

On trace la courbe $u(t)$ en précisant la valeur initiale et l'asymptote.

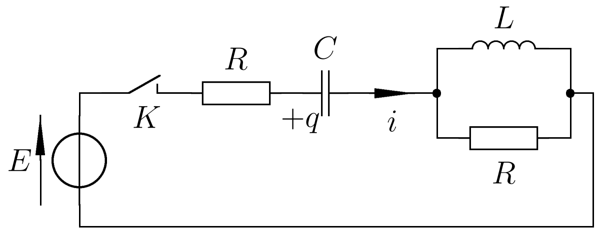




4. Comme $i(t) = C.\frac{du(t)}{dt}$, cette fonction est proportionnelle à la pente de la courbe $u(t)$.
5. Si $r \to 0$, $Q \to \infty$ et on tend vers un régime harmonique, pas de perte par effet Joule, $u(t)$ de la forme $A\cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$.

Exercice 5 : Réponse d'un circuit RLC à un échelon de tension.
Soit le circuit représenté ci-dessous avec $L = 0{,}5$ H, $R = 1$ kΩ et $C = 4$ μF.
À $t = 0$, on ferme K et le condensateur est déchargé.

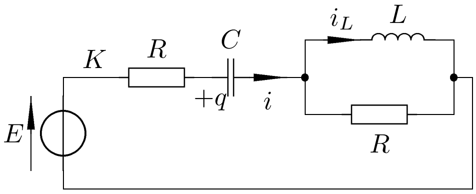
1. Déterminer la valeur littérale de u_C, la tension aux bornes du condensateur à $t = 0^+$ puis au bout d'un temps infini.
   Même question en ce qui concerne u_L, la tension aux bornes de la bobine.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par q, la charge du condensateur.
3. Dans quel régime le circuit évolue-t-il ?



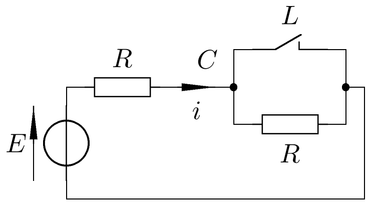
4. Préciser les conditions initiales qui permettent de résoudre l'équation différentielle.
5. Tracer l'allure des graphes $q(t)$ et $i(t)$.

On ferme K à $t = 0$.

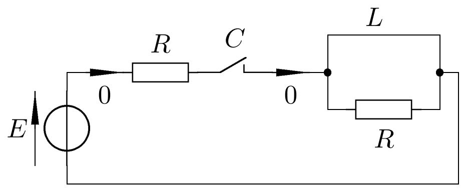
1. Pour déterminer la valeur de u_C et u_L à $t = 0^+$ et au bout d'un temps infini, on représente le circuit à $t = 0^+$ (figure ci-dessous au centre) sachant que par continuité de $u_C(t)$ et $i_L(t)$, on a $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ (le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé) et $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$ (la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert).



à $t > 0$: K fermé



à $t = 0^+$



pour $t \to \infty$

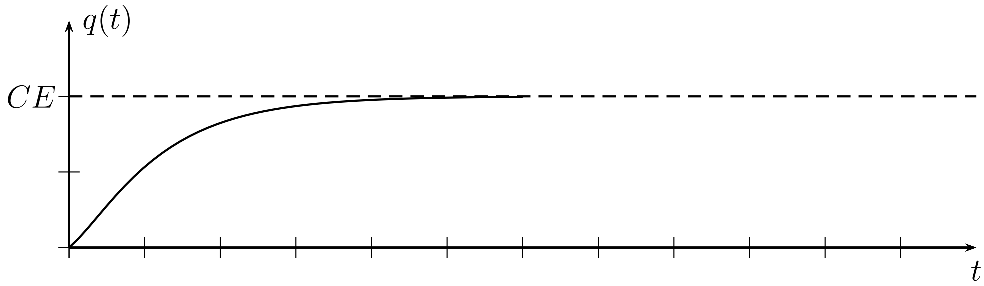
On lit alors $u_C(0^+) = 0$. Par ailleurs, comme les deux résistors sont traversés par le même courant, on reconnaît un pont diviseur de tension et $u_L(0^+) = \frac{R}{R+R}E = \frac{E}{2}$.
De même, en régime permanent, on remplace le condensateur par un interrupteur ouvert et la bobine par un interrupteur ouvert (figure ci-dessus à droite).
On lit alors directement $u_L(\infty) = 0$.
Comme aucun courant ne circule plus dans le circuit, la tension aux bornes des résistors est nulle donc une loi des mailles donne $E - 0 - u_C(\infty) - 0 = 0$ soit $u_C(\infty) = E$.

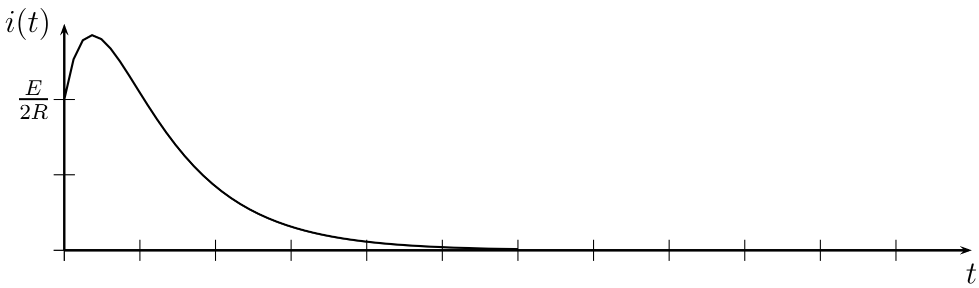
2. Pour établir l'équation différentielle en $q(t)$, on commence par écrire une loi des mailles : $E - Ri(t) - u_C(t) - R(i(t) - i_L(t)) = 0$ avec $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ et $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ d'où (équation (1)),
$$E - R\frac{dq(t)}{dt} - \frac{q(t)}{C} - R\frac{dq(t)}{dt} + Ri_L(t) = 0$$
Il faut faire disparaître la variable $i_L(t)$. On utilise pour cela le fait que la bobine est montée en parallèle avec le résistor R de droite d'où (équation (2))
$$R(i(t) - i_L(t)) = L.\frac{di_L(t)}{dt}$$
Comme il est plus difficile d'extraire $i_L(t)$ de (2) que de (1), on va plutôt isoler $i_L(t)$ à partir de (1), en déduire $\frac{di_L(t)}{dt}$ et injecter dans (2).
Ainsi, (1) $\Rightarrow i_L(t) = -\frac{E}{R} + 2\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} \Rightarrow \frac{di_L(t)}{dt} = 2\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dq(t)}{dt}$ et en remplaçant dans (2), on en déduit :
$$R.\frac{dq(t)}{dt} + E - 2R\frac{dq(t)}{dt} - \frac{q(t)}{C} = 2L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{L}{RC}\frac{dq(t)}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \left[\frac{1}{2RC} + \frac{R}{2L}\right]\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{2LC} = \frac{E}{2L}$$

3. Le type de régime dépend de la valeur du facteur de qualité Q du circuit. On met l'équation précédente sous la forme canonique
$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq(t)}{dt} + \omega_0^2 q(t) = \frac{E}{2L}$$
pour en déduire par identification, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = 500\,\text{rad.s}^{-1}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{2RC} + \frac{R}{2L} = 1125\,\text{rad.s}^{-1}$ d'où $Q = \frac{500}{1125} \simeq 0{,}44 < \frac{1}{2}$. Le circuit évolue donc en régime apériodique.

4. Il s'agit d'un circuit du second ordre, on a donc obtenu une équation différentielle du second ordre et il faut deux conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration.
On a déjà $q(0^+) = q(0^-) = 0$ par continuité de la charge du condensateur.
On détermine ensuite $\left[\frac{dq(t)}{dt}\right]_{0^+} = i(0^+) = \frac{E}{2R}$ en se reportant au circuit équivalent à $t = 0^+$.

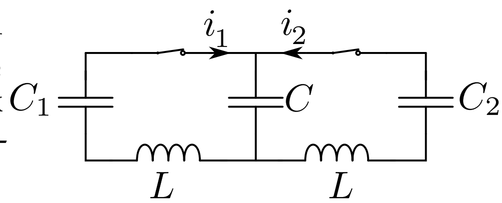
5. Connaissant le type de régime, la valeur initiale, la tangente à l'origine $\left[\frac{dq(t)}{dt}\right]_{0^+} > 0$ et le régime permanent (asymptote), on peut tracer l'allure de $q(t)$.
On en déduit ensuite l'allure de $i(t)$ qui correspond à la pente de la courbe $q(t)$ car $i = \frac{dq(t)}{dt}$
.





Exercice 6 : Couplage capacitif de circuits LC

Deux circuits LC sont branchés en parallèle sur un condensateur de capacité C. Les deux capacités C_1 et C_2 sont égales : $C_1 = C_2$. À l'instant $t = 0$ on ferme les deux intérupteurs. Le condensateur de couplage (C) est initialement déchargé.



1) Établir les équations différentielles auxquelles obéissent les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
2) On pose $i_+ = i_1 + i_2$ et $i_- = i_1 - i_2$. À partir de la question 1), déduire les équations différentielles auxquelles obéissent i_+ et i_-.
3) Résoudre les équations : on pourra définir deux pulsations ω et ω'. (On ne cherchera pas encore à déterminer les constantes d'intégration)
4) On s'intéresse au cas où les condensateurs 1 et 2 sont initialement chargés avec une charge Q_0 sous une tension $u_0 = \frac{Q_0}{C_1}$. Donner l'expression de i_1 et de i_2 ainsi que le lien entre les deux.
5) On s'intéresse au cas où le condensateur 1 est initialement chargé avec une charge Q_0 et le 2 avec une charge $-Q_0$. Donner l'expression de i_1 et de i_2 ainsi que le lien entre les deux.

1) Loi des mailles à gauche : $u_C + u_{C_1} + u_L = 0$. On a aussi $u_L = L\frac{di_1}{dt}$ et on dérive la loi des mailles par rapport au temps : $\frac{du_C}{dt} + \frac{du_{C_1}}{dt} + L\frac{d^2i_1}{dt^2} = 0$. On se rappelle que $\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}i_C$ ce qui nous donne :

$$\frac{1}{C}(i_1 + i_2) + \frac{1}{C_1}i_1 + L\frac{d^2i_1}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{LC}(i_1 + i_2) + \frac{1}{LC_1}i_1 + \frac{d^2i_1}{dt^2} = 0$$

On a donc bien entendu de l'autre coté la même équation en remplaçant i_1 par i_2 :

$$\frac{1}{LC}(i_1 + i_2) + \frac{1}{LC_1}i_2 + \frac{d^2i_2}{dt^2} = 0$$

2) Pour obtenir l'équation sur i_+ on somme les deux équations précédentes.

$$\frac{2}{LC}(i_1 + i_2) + \frac{1}{LC_1}(i_1 + i_2) + \frac{d^2(i_1 + i_2)}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow (\frac{2}{LC} + \frac{1}{LC_1})i_+ + \frac{d^2i_+}{dt^2} = 0$$

On peut donc poser $\omega' = \sqrt{\frac{2}{LC} + \frac{1}{LC_1}}$.

De même si on soustrait les deux équations :

$$0+\frac{1}{LC_1}(i_1-i_2)+\frac{d^2(i_1-i_2)}{dt^2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{LC_1}i_-+\frac{d^2i_-}{dt^2}=0$$

Et on pose alors $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$.
3) Les solutions sont alors de la forme $i_+=2I_0\sin(\omega' t+\varphi_0)$ et $i_-=2I_1\sin(\omega t+\varphi_1)$. On trouve $i_1=\frac{i_++i_-}{2}=I_0\sin(\omega' t+\varphi_0)+I_1\sin(\omega t+\varphi_1)$ et $i_2=\frac{i_++i_-}{2}=I_0\sin(\omega' t+\varphi_0)+I_1\sin(\omega t+\varphi_1)$.
4) (Par symétrie $i_-=0$). Pour le démontrer, c'est un peu embêtant : on a 4 relations de continuité. On va essayer d'être un peu malin.
On a continuité du courrant dans les deux bobines, donc i_+ et i_- sont continus aussi et valent donc 0 à t=0. Les constantes φ sont donc nulles. Il reste le cas de I_0 et I_1.
La tension aux bornes des condensateurs est continue, donc à t=0, avec la loi des mailles on a $u_L=-u_C$
$u_{L_1}=L\frac{di_1}{dt}=L(I_0\omega'\cos\omega' t+I_1\omega\cos\omega t)$ et $u_{L_2}=L\frac{di_2}{dt}=L(I_0\omega'\cos\omega' t-I_1\omega\cos\omega t)$
Donc à t=0, $u_{L_1}(t=0)=LI_0\omega'+LI_1\omega$ et $u_{L_2}(t=0)=LI_0\omega'-LI_1\omega$.
Dans le cas symétrique (même tension aux bornes des deux condensateurs à l'instant initial) $u_{L_1}=u_{L_2}=-u_0$. Ce qui donne $I_1=0$ et $I_0=\frac{-u_0}{2L\omega'}$
Comme $I_1=0$, on a bien $i_-=0$. Il s'agit du mode d'oscillation symétrique (à tout instant $i_1=i_2$).
5) (Par symétrie $i_+=0$)
Dans le cas symétrique (tension oposée aux bornes des deux condensateurs à l'instant initial) $u_{L_1}=-u_{L_2}=-u_0$. Ce qui donne $I_0=0$ et $I_1=\frac{-u_0}{2L\omega}$
Comme $I_0=0$, on a bien $i_+=0$. Il s'agit du mode d'oscillation anti-symétrique (à tout instant $i_1=-i_2$).