TRAVAUX DIRIGÉS DE EC_5

Exercice 1 : Utilisation des Complexes
On pose $x_1(t) = 2.\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$ et $x_2(t) = 3.\cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$.
En utilisant la méthode des complexes, déterminer l'amplitude X_m et la phase à l'origine φ de

1. $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.
2. $x(t) = x_1(t) - 2.x_2(t)$.
3. $x(t) = 2\dot{x}_1(t) - \int x_2(t)dt$
   en choisissant ici $\omega = 1$ rad.$^{-1}$

En passant à la notation complexe, on peut écrire les complexes associés au grandeurs sinusoïdales synchrones :

- $x_1(t) = 2.\cos(\omega t+\frac{\pi}{3}) \rightsquigarrow \underline{x}_1(t) = 2.\exp[j(\omega t+\frac{\pi}{3})] = \underline{X}_1.\exp(j\omega t)$ soit une amplitude complexe $\underline{X}_1 = 2.e^{j\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}j$
- $x_2(t) = 3.\cos(\omega t-\frac{\pi}{4}) \rightsquigarrow \underline{x}_1(t) = 3.\exp[j(\omega t-\frac{\pi}{4})] = \underline{X}_2.\exp(j\omega t)$ soit une amplitude complexe $\underline{X}_2 = 3.e^{-j\frac{\pi}{4}} = 3[\cos(-\frac{\pi}{4}) + j\sin(-\frac{\pi}{4})] = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}j$.

On procède de la même façon avec les expressions proposées :

1. $x(t) = x_1(t) + x_2(t) \rightsquigarrow \underline{x}(t) = \underline{x}_1(t) + \underline{x}_2(t) \iff \underline{X}.\exp(j\omega t) = \underline{X}_1.\exp(j\omega t) + \underline{X}_2.\exp(j\omega t)$ et après simplification par $\exp(j\omega t)$, on en déduit l'amplitude complexe

$$\underline{X} = \underline{X}_1 + \underline{X}_2 = (1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}) + (\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2})j \simeq 3{,}12 - 0{,}39j$$

   On en déduit ensuite l'amplitude et la phase à l'origine de $x(t)$

$$X_m = |\underline{X}| \simeq \sqrt{3{,}12^2 + 0{,}39^2} \simeq 3{,}14 \quad \text{et} \quad \varphi = \arg\underline{X} \simeq -\arctan(\frac{0{,}39}{3{,}12}) \simeq -0{,}12 \text{ rad}$$

2. De la même manière, si $x(t) = x_1(t) - 2.x_2(t)$, on a cette fois

$$\underline{X} = \underline{X}_1 - 2\underline{X}_2 = (1 - 3\sqrt{2}) + (\sqrt{3} + 3\sqrt{2})j \simeq -3{,}24 + 5{,}97j$$

$$X_m = |\underline{X}| \simeq \sqrt{3{,}24^2 + 5{,}97^2} \simeq 6{,}80 \qquad \text{et} \qquad \varphi = \arg\underline{X} \simeq \pi + \arctan\frac{5{,}97}{-3{,}24} \simeq 2{,}07 \text{ rad}$$

3. Une dérivation par rapport au temps revient à multiplier par $j\omega$, une intégration à diviser par $j\omega = j$ ici d'où si $x(t) = 2\dot{x}_1(t) - \int x_2(t)dt$, une amplitude complexe

$$\underline{X} = 2j\omega\underline{X}_1 - \frac{\underline{X}_2}{j\omega} = 2j(1+\sqrt{3}j) + j(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}j) = (\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3}) + (\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2)j \simeq -1{,}34 + 4{,}12j$$

$$X_m = \sqrt{1{,}34^2 + 4{,}12^2} \simeq 4{,}33 \quad \text{et} \quad \varphi = \pi + \arctan\frac{4{,}12}{-1{,}34} \simeq 1{,}88 \text{ rad}$$

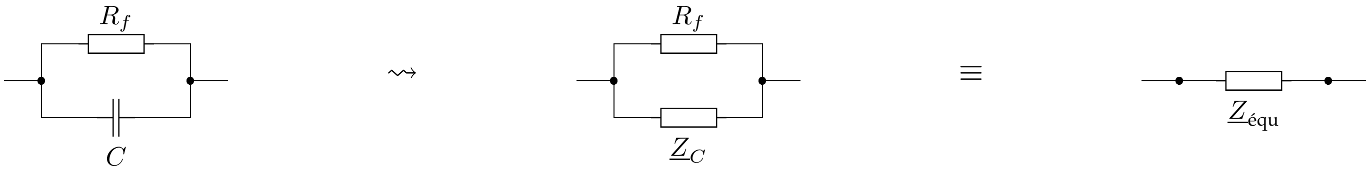
Exercice 2 : Condensateur réel
✍ Déterminer l'intensité du courant qui traverse un condensateur réel de résistance de fuite $R_f = 1$ $M\Omega$ et capacité $C = 0{,}1$ μF quand on lui applique, en convention récepteur, une tension sinusoïdale $u(t)$ de valeur efficace $U_{\text{eff}} = 220V$ de fréquence $f = 50$ Hz.
On prendra la phase à l'origine de $u(t)$ comme origine des phases.

Comme l'étude se fait en régime sinusoïdal forcé nous allons utiliser la méthode des complexes.

Connaissant les caractéristiques de $u(t)$ donc $\underline{U}_{\text{eff}}$ sa valeur efficace complexe, on utilisera la loi d'Ohm généralisée pour déterminer $\underline{I}_{\text{eff}}$ puis I_{eff} et φ (sa valeur efficace et la phase à l'origine de $i(t)$) :

$$\underline{U}_{\text{eff}} = \underline{Z}_{\text{équ}}.\underline{I}_{\text{eff}} \iff \underline{I}_{\text{eff}} = \underline{Y}_{\text{équ}}.\underline{U}_{\text{eff}}$$

On commence par déterminer l'impédance complexe du dipôle.



Ici, on a associé le résistor R_f et le condensateur C en parallèle d'où

$$\underline{Y}_{\text{équ}} = (\frac{1}{R_f} + jC\omega) \Rightarrow \underline{I}_{\text{eff}} = (\frac{1}{R_f} + jC\omega).\underline{U}_{\text{eff}}$$

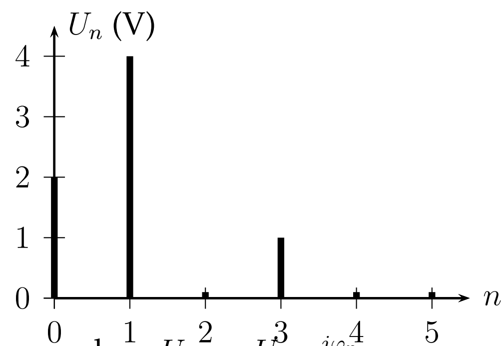
Puis $I_{\text{eff}} = |\underline{I}_{\text{eff}}| = \left|\frac{1}{R_f} + jC\omega\right|.|\underline{U}_{\text{eff}}| = \sqrt{\frac{1}{{R_f}^2} + (2\pi Cf)^2}.U_{\text{eff}} \simeq 6{,}7$ mA et
$\varphi \arg(\underline{I}_{\text{eff}}) = \arg(\frac{1}{R_f} + jC\omega) + \arg(\underline{U}_{\text{eff}}) = \arctan(2\pi R_f C) + 0 \simeq 88°$.
On a maintenant toutes les données qui apparaissent dans l'expression $i(t) = \sqrt{2}I_{\text{eff}}\cos(2\pi ft + \varphi)$.

Exercice 3 : Utilisation de la décomposition de Fourier
Soit la tension exprimée en volts : $u(t) = 2 + 4.\cos\omega t + \sin 3\omega t$ où $\omega = 100$ rad.s^{-1}.

1. Écrire $u(t)$ sous la forme
$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \text{ avec } n \text{ entier puis } \underline{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{U}_n.e^{jn\omega t}$$
On donnera l'expression de U_n, φ_n et $\underline{U}_n$ pour n entier positif ou nul.
Représenter le spectre de $u(t)$.
2. On applique cette tension aux bornes d'un condensateur de capacité $C = 1$ μF. L'intensité du courant qui le traverse est alors $i(t)$ en convention récepteur.
Déterminez $\underline{i(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{I}_n.e^{jn\omega t}$ la représentation complexe de $i(t)$: on donnera l'expression de $\underline{I}_n$. En déduire l'expression de $i(t)$ et son spectre.
3. Vérifier l'expression de $i(t)$ par application de la relation constitutive des condensateurs.

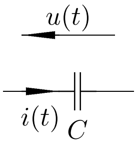
1. On donne
$u(t) = 2 + 4.\cos\omega t + \sin 3\omega t = 2.\cos(0.\omega t + 0) + 4.\cos(\omega t + 0) + 0.\cos(2\omega t + 0) + 1.\cos(3\omega t - \frac{\pi}{2})$
et par identification avec $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ on en déduit les amplitudes U_m et phases à l'origine φ_n pour chaque valeur de n entier positif : tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	$n \geqslant 4$
U_n (V)	2	4	0	1	0
φ (rad)	0	0	0	$-\frac{\pi}{2}$	0
$\underline{U}_n$	$2.e^{j.0} = 2$	4	0	$1.e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$	0

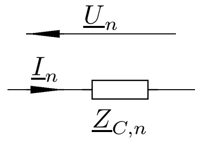


On peut également compléter le tableau en écrivant l'amplitude complexe $\underline{U}_n = U_m.e^{j\varphi_n}$ pour chaque n.
Le spectre de $u(t)$ est un diagramme "bâtons" où on représente l'amplitude de chaque harmonique d'où la figure ci-contre.

2. On considère à présent le branchement suivant :



et pour chaque n



Principe : si on imagine qu'au lieu d'appliquer directement $u(t)$ au condensateur, on applique successivement ses différentes composantes harmoniques (U_0 puis $U_1.\cos(\omega t + \varphi_1)$ ... $U_n \cos(n\omega_t + \varphi_n)$), on se ramène à une étude en régime sinusoïdale forcé. On peut alors utiliser la loi d'Ohm généralisée pour chaque harmonique de $u(t)$ et en déduire l'harmonique de $i(t)$ correspondante.

Comme le condensateur est un composant linéaire, on en déduira $i(t)$ par superposition des harmoniques obtenues.

Mise en œuvre : par application de la loi d'Ohm généralisée, pour chaque valeur de n,

$$\underline{U}_n = \underline{Z}_{C,n}.\underline{I}_n \iff \underline{I}_n = \underline{Y}_{C,n}.\underline{U}_n \text{ avec } \underline{Y}_{C,n} = jC(n\omega) = jnC\omega \Rightarrow \underline{I}_n = jnC\omega.\underline{U}_n$$

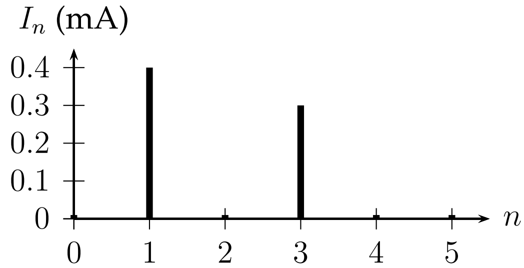
n	0	1	2	3	$n \geqslant 4$
$\underline{U}_n$	2	4	0	$-j$	0
$\underline{Y}_{C,n} = jnC\omega$	0	$jC\omega$	$2jC\omega$	$3jC\omega$	$jnC\omega$
$\underline{I}_n = \underline{Y}_{C,n}.\underline{U}_n$	0	$4jC\omega$	0	$3C\omega$	0
$I_n = \lvert\underline{I}_n\rvert$	0	$4C\omega = 0{,}4$ mA	0	$3C\omega = 0{,}3$ mA	0
$\varphi_{i,n} = \arg(\underline{I}_n)$ (rad)	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	0

Après avoir déterminé chaque $\underline{I}_n$, on en déduit l'amplitude $I_n = |\underline{I}_n|$ et la phase à l'origine $\varphi_{i,n} = \arg(\underline{I}_n)$ de chaque composante de $i(t)$. En notation complexe,
$\underline{i(t)} = 4C\omega.e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} + 3C\omega.e^{j(3\omega t + 0)}$ et $i(t) = \Re(\underline{i(t)}) = \sum_{n=0}^{\infty} I_m.\cos(n\omega t + \varphi_{i,n})$.

$$i(t) = 4C\omega\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + 3C\omega\cos 3\omega t = -4C\omega\sin\omega t + 3C\omega\cos\omega t$$

Remarque : le condensateur a "filtré la composante continue" de $u(t)$ (passage du mode DC au mode AC d'un oscilloscope).

On en déduit l'allure du spectre.



3. On pouvait également appliquer directement la relation constitutive

$$i(t) = C.\frac{du(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[2 + 4.\cos\omega t + \sin 3\omega t\right] \Rightarrow i(t) = 0 - 4C\omega\sin\omega t + 3C\omega\cos\omega t$$

Exercice 4 : Association RL parallèle.

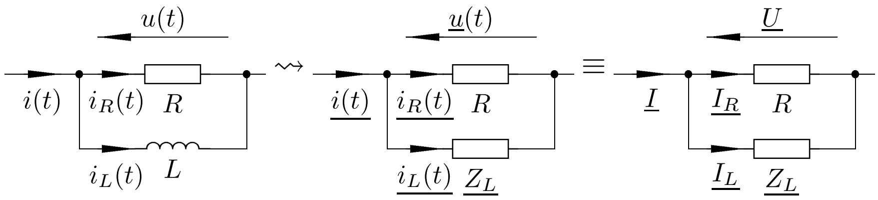
On place en parallèle une résistance $R = 40\ \Omega$ et une bobine d'inductance $L = 0{,}16$ H.

Entre leurs bornes communes, on applique la tension u du secteur (valeur efficace $U = 220$ V ; 50 Hz).

1. Calculer les valeurs efficaces I_R et I_L des courants traversant R et L ainsi que leur phase à l'origine φ_R et φ_L si on prend la phase à l'origine de u comme origine des phases.
2. Calculer, par deux méthodes, l'intensité efficace totale I et son déphasage φ par rapport à la tension.

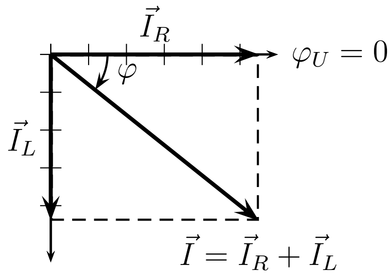
L'association RL parallèles est soumise à la tension $u = \sqrt{2}U.\cos\omega t$ si on prend la phase à l'origine de $u(t)$ pour origine des phases.

1. On représente le circuit puis son équivalent en notations complexes en remplaçant les grandeurs sinusoïdales par leurs représentations complexes.
   On peut également représenter seulement les valeurs efficaces complexes (comme si on avait divisé les grandeurs précédentes par $\sqrt{2}.e^{j\omega t}$).



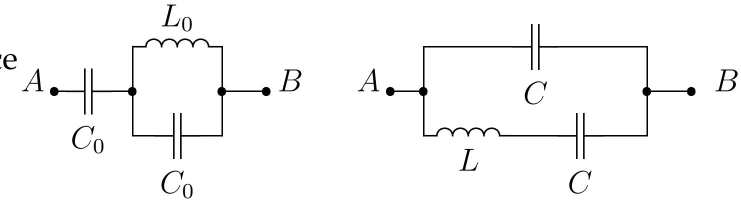
   On se retrouve alors avec un circuit sur lequel on peut directement appliquer des lois d'Ohm généralisées :
   Aux bornes de R : $\underline{U} = R.\underline{I}_R \Rightarrow I_R = |\underline{I_R}| = \frac{U}{R} \simeq 5{,}50$ A et $\varphi_R = \arg \underline{I_R} = \arg \underline{U} - \arg \underline{R} = 0$.
   Aux bornes de L : $\underline{U} = \underline{Z}_L.\underline{I}_L$ avec $\underline{Z}_L = jL\omega$ où $\omega = 2\pi f \Rightarrow I_L = |\underline{I_L}| = \frac{|\underline{U}|}{L\omega} = \frac{U}{2\pi Lf} \simeq 4{,}38$ A et $\varphi_L = \arg \underline{I_L} = \arg \underline{U} - \arg \underline{Z}_L = 0 - \arg \underline{Z}_L = -\frac{\pi}{2}$ ($i(t)$ en quadrature retard sur $u(t)$).

2. À tout instant, $i(t) = i_R(t) + i_L(t)$ soit, en notation complexe,
$$\underline{i(t)} = \underline{i_R(t)} + \underline{i_L(t)} \Rightarrow \underline{I} = \underline{I_R} + \underline{I_L} = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}}{jL\omega} = \left[\frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}\right]\underline{U}$$
   Remarque : on retrouve $\underline{I} = \underline{Y}_{\text{équ}}.\underline{U}$ avec $\underline{Y}_{\text{équ}} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L$.
   On en déduit ensuite $I = |\underline{I}| = \left|\frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}\right| \times |\underline{U}| = |\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}}U \simeq 7{,}03$ A et $\varphi = \arg \underline{I} = \arg\left[\frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}\right] + \arg \underline{U} = \arg\left[\frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega}\right]$.
   Comme $\Re(\underline{I}) > 0$ et $\Im(\underline{I}) < 0$, on a $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 0$ d'où ici $\varphi = -\arctan\frac{R}{L\omega} \simeq -38{,}5$ °
   On peut retrouver ces résultats en utilisant la méthode de Fresnel : $i(t) = i_R(t) + i_L(t) \Rightarrow \vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L$ et en prenant la phase à l'origine de $u(t)$ pour référence des phases, on trace la figure ci contre :
   $\vec{I}_R$ est un vecteur de norme $I_R = 5{,}5$ A et qui forme l'angle $\varphi_R = 0$ avec l'axe de référence.
   $\vec{I}_L$ est un vecteur de norme $I_L = 4{,}4$ A et qui forme l'angle $\varphi_L = -\frac{\pi}{2}$ avec l'axe de référence.
   On mesure ensuite (échelle : 1 V $\leftrightarrow$ 1 cm) $I \simeq 7{,}0$ A et $\varphi = -38{,}5$ °.

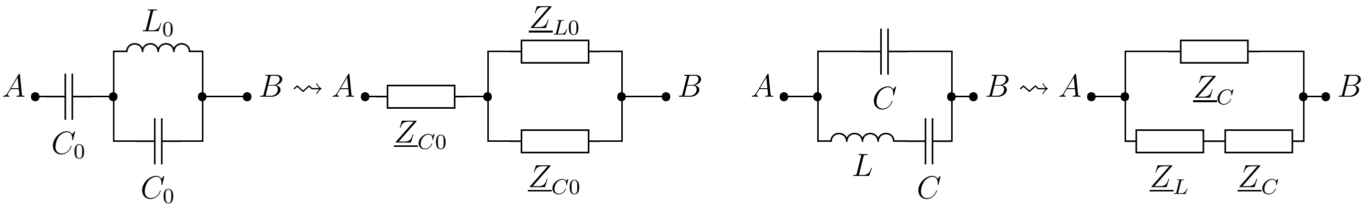


Exercice 5 : Impédances équivalentes

Deux dipôles sont équivalents s'ils ont la même impédance quelle que soit la fréquence de la source d'alimentation.
Montrer que l'on peut choisir L et C en fonction de L_0 et C_0 pour que les deux dipôles ci-contre soient équivalents.



L'intérêt principal de cet exercice est d'apprendre à manipuler les complexes, y compris dans des calculs qui peuvent devenir vite fastidieux ...
On commence par calculer l'impédance équivalente du dipôle en considérant les deux représentations.



Le dipôle représenté à gauche a pour impédance équivalente

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_{C0} + \frac{\underline{Z}_{L0}.\underline{Z}_{C0}}{\underline{Z}_{L0} + \underline{Z}_{C0}} = \underline{Z}_{C0} + \frac{\underline{Z}_{L0}}{1 + \underline{Z}_{L0}/\underline{Z}_{C0}} = \underline{Z}_{C0}\left[1 + \frac{\underline{Z}_{L0}/\underline{Z}_{C0}}{1 + \underline{Z}_{L0}/\underline{Z}_{C0}}\right]$$

avec $\underline{Z}_{L0} = j\omega L_0$ et $\underline{Z}_{C0} = \frac{1}{jC_0\omega} \Rightarrow \underline{Y}_{C0} = \frac{1}{\underline{Z}_{C0}} = jC_0\omega$. d'où $\frac{\underline{Z}_{L0}}{\underline{Z}_{C0}} = -L_0C_0\omega^2 = \underline{Z}_{L0}.\underline{Y}_{C0}$ et

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{jC_0\omega}\left[1 - \frac{L_0C_0\omega^2}{1 - L_0C_0\omega^2}\right] = \frac{1 - 2L_0C_0\omega^2}{jC_0\omega(1 - L_0C_0\omega^2)}$$

Le second dipôle possède une admittance

$$\underline{Y} = \underline{Y}_C + \frac{1}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \underline{Y}_C + \frac{\underline{Y}_C}{1 + \underline{Z}_L.\underline{Y}_C} = \underline{Y}_C\left[1 + \frac{1}{1 + \underline{Z}_L.\underline{Y}_C}\right] = jC\omega\left[1 + \frac{1}{1 - LC\omega^2}\right] = jC\omega\left[\frac{2 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2}\right]$$

Les deux modélisations du dipôle sont équivalentes si on a $\underline{Z}_0 = \underline{Z} \iff \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}} = 1 \iff \underline{Z}_0.\underline{Y} = 1$

$$\Rightarrow \frac{1 - 2L_0C_0\omega^2}{jC_0\omega(1 - L_0C_0\omega^2)} \times jC\omega\left[\frac{2 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2}\right] = 1 \Rightarrow (1 - 2L_0C_0\omega^2)(2C - LC^2\omega^2) = (C_0 - L_0C_0^2\omega^2)(1 - LC\omega^2)$$

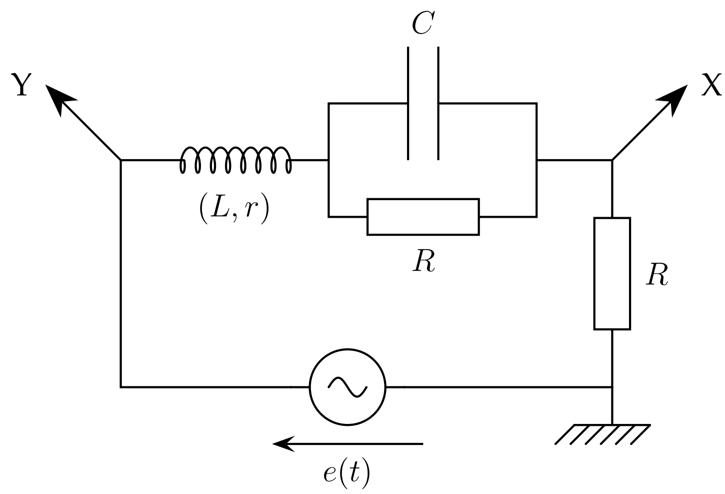
$$\Rightarrow 2C - C_0 + (-LC^2 - 4L_0C_0C + LCC_0 + L_0C_0^2)\omega^2 + (2L_0C_0LC^2 - L_0C_0^2LC)\omega^4 = 0$$

On obtient ainsi un polynôme en ω. L'égalité sera vérifiée pour tout ω si et seulement si les cœfficient du polynômes sont nuls.
On en déduit un système de 3 équations à deux inconnues : $C_0 - 2C = 0 \Rightarrow C_0 = 2C$, $-LC^2 - 8L_0C^2 + 2LCC^2 + 4L_0C^2 = 0 \Rightarrow L = 4L_0$.
La troisième équation permettant de vérifier les valeurs précédentes : $16L^2C^3 - 16L^2C^3 = 0$.

Exercice 6 : Mesure d'une inductance

✍ On réalise le montage représenté sur la figure ci-contre et on constate sur l'oscilloscope que pour une fréquence $f_0 = 180$ Hz, les signaux recueillis sur les voies X et Y sont en phase.
Données : $R = 100\ \Omega$, $C = 10\ \mu$F.

En déduire l'expression puis la valeur de l'inductance L de la bobine.

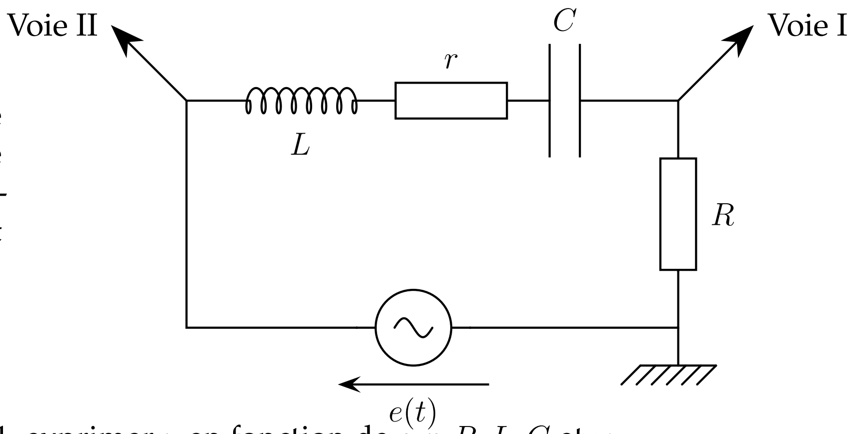


On remarque que sur la voie X, on mesure « l'intensité » (tension aux bornes d'un résistor). Puisque X et Y sont en phase, c'est donc que Y n'est pas déphasé par rapport à l'intensité. On en déduit que l'impédance équivalente entre Y et la masse est un réel.
$\underline{Z} = jL\omega + r + \frac{R}{1+jRC\omega} + R$ est donc un réel, d'où $jL\omega + \frac{R}{1+jRC\omega}$ est un réel. En réduisant au même dénominateur réel (en utilisant le complexe conjugé), on a $\frac{jL\omega(1+(RC\omega)^2)}{1+(RC\omega)^2} + \frac{R(1-jRC\omega)}{1+(RC\omega)^2}$ est réel. D'où

$L\omega(1+(RC\omega)^2) = R^2C\omega \Rightarrow L = \frac{R^2C}{1+(RC\omega)^2} = 44$ mH.

Exercice 7 : Mise sous forme canonique.

Dans le circuit de la figure ci-contre figure une résistance R, une bobine de résistance r et d'inductance L ainsi qu'un condensateur de capacité C. Le générateur fournit une tension sinusoïdale $e(t)$.



1. En notant $u(t)$ la tension de la voie 1, exprimer $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}, r, R, L, C$ et ω.
2. Mettre la formule précédente sur la forme

$$\underline{u} = \frac{H_0}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}\underline{e} \quad \text{où} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

   et identifier les paramètres H_0, Q, ω_0 en fonction des données de l'énoncé.

1. Par un pont diviseur de tension puisque les dipôles sont en séries : $\underline{u} = \frac{R}{R+r+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}\underline{e}$.
2. Pour se mettre sous la forme demandée par l'énoncé, il faut factoriser le dénominateur pour faire apparaitre un $1+j\ldots$, pour cela, on factorise par $R+r$: $\underline{u} = \frac{\frac{R}{R+r}}{1+j\frac{1}{R+r}\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}\underline{e}$.
   Pour pouvoir identifier ensuite, on développe les deux formules qui doivent être équivalente quelque soit ω, ainsi, les préfacteurs devant ω et $1/\omega$ doivent être les mêmes.
   On a alors $H_0 = \frac{R}{R+r}$; $\frac{L}{R+r} = \frac{Q}{\omega_0}$; $\frac{1}{(R+r)C} = Q\omega_0$. Pour obtenir Q et ω_0, le plus simple est de faire le produit et le quotient des deux dernières équations. On en déduit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$.