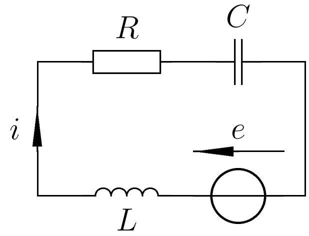
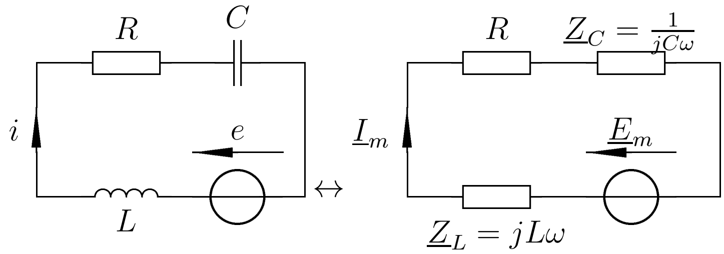
TRAVAUX DIRIGÉS DE EC_6

Exercice 1 : RLC série en RSF

On considère le circuit ci-contre alimenté par le générateur de tension de f.é.m $e(t)$ sinusoïdale de fréquence $f = 50$ Hz, $R = 500\ \Omega$, $L = 0{,}1$ H et $C = 1\ \mu$F.
La valeur efficace du courant traversant le circuit est $I_{\text{eff}} = 0{,}03$ A.
En prenant l'intensité comme origine des phases, c'est à dire, $i = I_m \cos \omega t$, déterminer $e(t)$.



Le circuit évoluant en RSF, on utilisera la méthode des complexes.
On commence par représenter l'équivalent du circuit en RSF en remplaçant chaque dipôle par son impédance équivalente.
Sur cette figure, on représente également l'intensité du courant et la force électromotrice du générateur par leurs amplitudes complexes $\underline{I}_m$ et $\underline{E}_m$ telles que $\underline{i(t)} = \underline{I}_m.e^{j\omega t} = I_m.e^{j(\omega t+0)}$ d'où $\underline{I}_m = I_m = \sqrt{2}I_{\text{eff}}$ (la phase à l'origine de $i(t)$ est nulle) et $\underline{e(t)} = \underline{E}_m.e^{j\omega t} = E_m.e^{j(\omega t+\varphi)}$ si $e(t) = E_m.\cos(\omega t + \varphi)$.



On applique ensuite une simple loi des mailles :

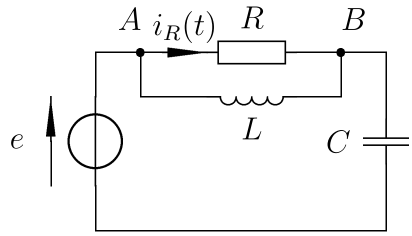
$$\underline{E}_m - \underline{Z}_L.I_m - R.I_m - \underline{Z}_C.I_m = 0 \Rightarrow \underline{E}_m = \left[R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})\right].I_m = E_m.e^{j\varphi}$$

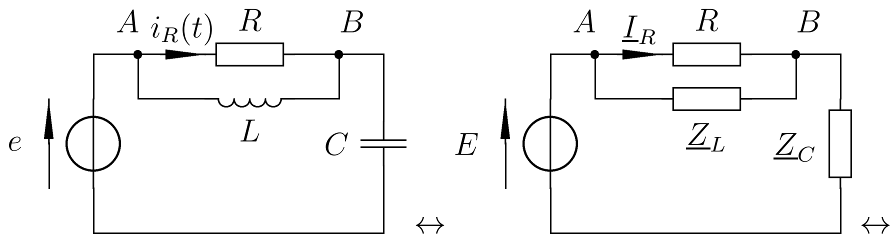
Avec $E_m = |\underline{E}_m| = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}I_m \simeq 135{,}4$ V et $\varphi = \arg(\underline{E}_m) = \arctan \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \simeq -1{,}41$ rad.
On a donc $e(t) = 135{,}4\cos(100\pi t - 1{,}41)$

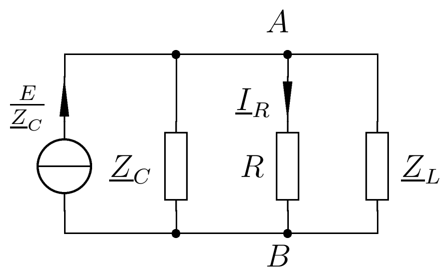
Exercice 2 : Résolution d'un circuit en RSF

✍ On considère le circuit représenté ci contre.
Il est alimenté par un générateur de tension sinusoïdal : $e(t) = E\sqrt{2}\cos \omega t$.

1. Déterminer $i_R(t)$, l'intensité du courant qui traverse R.
2. En déduire la pulsation pour que le courant dans R soit indépendant de R.







1. Comme on se place en régime sinusoïdal forcé, on peut utiliser la méthodes des complexes : on remplace le circuit par son équivalent en faisant apparaître les impédances complexes puis on le transforme pour obtenir $\underline{I}_R$ la valeur efficace complexe de $\underline{i_R}(t)$.

Comme la référence des phases est la phase à l'origine de $e(t)$, on a $\underline{e}(t) = E\sqrt{2}.e^{j(\omega t+0)} = E\sqrt{2}.e^{j\omega t}$, c'est à dire $\underline{E} = E$.

On utilise le passage Thévenin ↔ Norton pour faire apparaître le générateur de courant de courant électromoteur $\frac{E}{\underline{Z}_C} = jC\omega E$ et le pont diviseur de courant tel que

$$\underline{I}_R = \frac{1/R}{\underline{Y}_L + 1/R + \underline{Y}_C}\frac{E}{\underline{Z}_C} = \frac{jC\omega E}{\frac{R}{jL\omega} + 1 + jRC\omega} = \frac{jC\omega E}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$$

On a ainsi $i(t) = I_R\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ avec $I_R = |\underline{I}_R| = \frac{C\omega E}{\sqrt{1+R^2(C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}}$ et $\varphi = \arg(\underline{I}_R) = \arg(jC\omega E) - \arg(1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})) = \frac{\pi}{2} - \arctan(R(C\omega - \frac{1}{L\omega}))$.

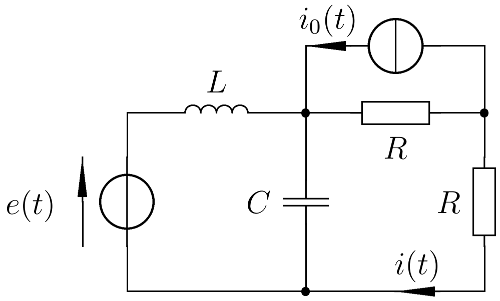
2. On remarque que $\underline{I}_R$ ne dépend plus de R si $C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Exercice 3 : Résolution d'un circuit en RSF

On étudie le montage représenté ci contre. $e(t)$ est la f.e.m d'un générateur de tension sinusoïdale : $e(t) = E_m \cos\omega t$.

$i_0(t)$ est le c.e.m d'un générateur de courant alternatif sinusoïdal **en phase** avec le précédent : $i_0(t) = I_0 \cos\omega t$.

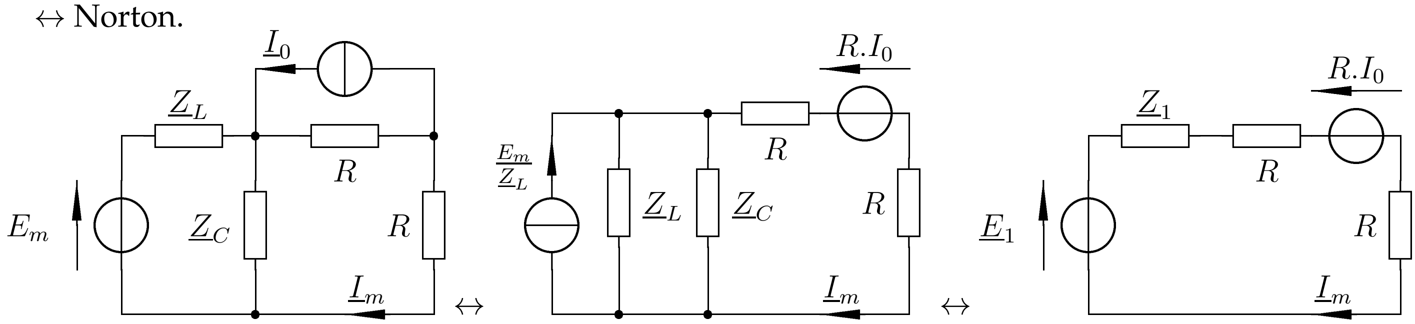
Déterminer le courant $i(t)$ représenté sur la figure. On donnera $i(t)$ sous la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.



Comme on se place en régime sinusoïdal forcé, on peut utiliser la méthode des complexes : $\underline{e}(t) = \underline{E_m}.e^{j\omega t} = E_m.e^{j\omega t}$, $\underline{i_0}(t) = \underline{I}_0.e^{j\omega t} = I_0.e^{j\omega t}$ et $\underline{i}(t) = \underline{I}_m.e^{j\omega t} = I_m.e^{j(\omega t+\varphi)}$.

On représente le circuit en faisant apparaître les impédances complexes et les amplitudes complexes.

On simplifie le circuit en utilisant les lois d'association des dipôles et les transformation Thévenin ↔ Norton.



$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_C.\underline{Z}_L}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{Z}_L}{1 + \underline{Z}_L.\underline{Y}_C} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} \text{ et } \underline{E}_1 = \underline{Z}_1.\frac{E_m}{\underline{Z}_L} = \frac{E_m}{1 - LC\omega^2}$$

Par application de la loi de Pouillet, on en déduit immédiatement

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_1 - RI_0}{\underline{Z}_1 + R + R} = \frac{E_m - R(1 - LC\omega^2)I_0}{2R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} \Rightarrow I_m = |\underline{I}_m| = \frac{|E_m - R(1 - LC\omega^2)I_0|}{\sqrt{4R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}}$$

Puis en multipliant numérateur et dénominateur par $-j$ afin d'avoir une partie réelle du dénominateur toujours positive,

$$\underline{I}_m = \frac{-j(E_m - R(1 - LC\omega^2)I_0)}{-2jR(1 - LC\omega^2) + L\omega} \Rightarrow \varphi = \arg(\underline{I}_m) = -\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{2R(1 - LC\omega^2)}{L\omega}$$

Exercice 4 : Quartz Piézo-électrique : résonance et antirésonance

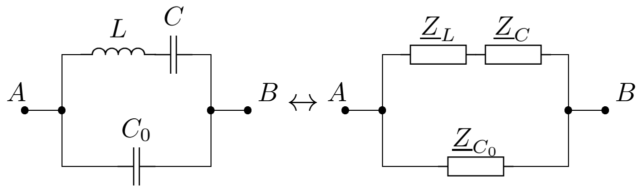
On considère, comme schéma électrique simplifié équivalent d'un quartz piézo-électrique destiné à servir d'étalon de fréquence dans une horloge, un dipôle AB composé de deux branches en parallèle.

Dans l'une, une inductance L pure en série avec un condensateur de capacité C ; dans l'autre, un condensateur de capacité C_0.

On posera $\frac{C}{C_0} = a$, et on gardera les variables L, C_0, ω et a.

1. Le dipôle AB étant alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation ω, calculer l'impédance complexe $\underline{Z_{AB}} = \underline{Z}$. Calculer son module $|\underline{Z}| = Z$, et son argument φ.
2. Étudier en fonction de la pulsation l'impédance $\underline{Z}$; pour cela :
   — on précisera tout particulièrement les limites de Z quand ω tend vers zéro ou l'infini ;
   — on appellera ω_1 et ω_2, les valeurs finies non nulles de la pulsation pour lesquelles Z est respectivement nulle et infinie. Quel est le comportement électrique simple de AB pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$?
   Donner $Z = f(C_0,\omega,\omega_1,\omega_2)$.
3. Représenter graphiquement Z en fonction de ω.
4. Préciser par un graphe à main levée, et sans aucun calcul, comment qualitativement est modifié la courbe $Z = f(\omega)$ si l'on tient compte de la résistance du bobinage d'inductance L.

1. Le dipôle AB est en régime sinusoïdal forcé. On représente son équivalent en notation complexe. Pour simplifier les calculs, on calculera $\underline{Y}$ l'admittance complexe du dipôle.



$$\underline{Y} = \underline{Y}_{C_0} + \frac{1}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} \Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}} = jC_0\omega + \frac{1}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = jC_0\omega + \frac{jC\omega}{1 - LC\omega^2} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{1 - LC\omega^2}{jC_0\omega(1 - LC\omega^2) + jC\omega}$$

Et avec $C = aC_0$, on en déduit

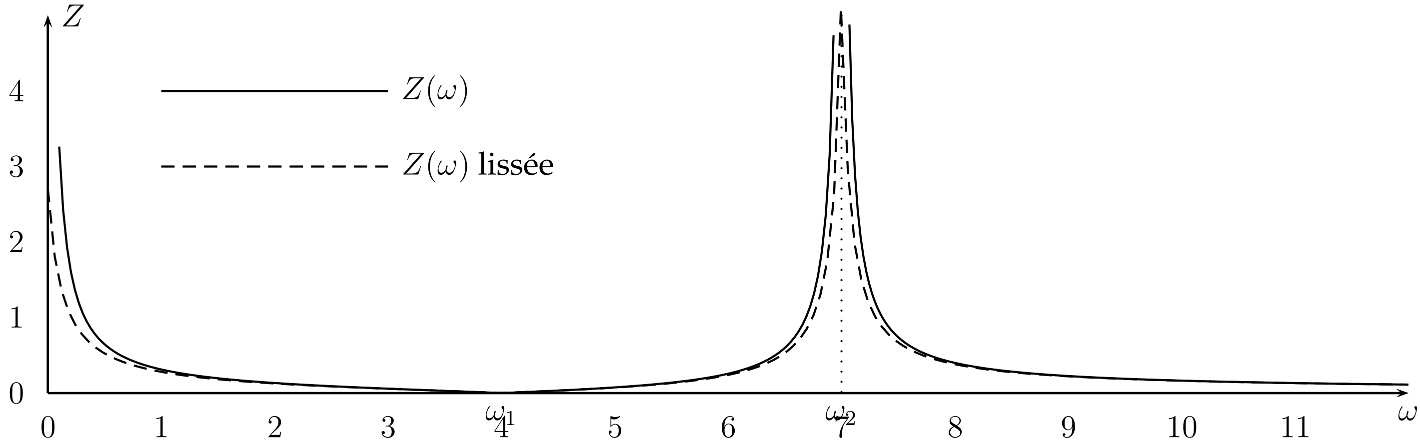
$$\underline{Z} = -j\frac{1 - aLC_0\omega^2}{C_0\omega(1 + a - aLC_0\omega^2)} \Rightarrow Z = \frac{|1 - aLC_0\omega^2|}{C_0\omega|1 + a - aLC_0\omega^2|} \text{ et } \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

car $\underline{Z}$ est un imaginaire pur.

2. Étude de $\underline{Z}$: $Z(\omega) = \frac{|N(\omega)|}{|D(\omega)|}$ est le rapport d'un polynôme du second degré $N(\omega) = 1 - aLC_0\omega^2$ par un polynôme de degré trois $D(\omega) = C_0\omega|1 + a - aLC_0\omega^2|$ en ω.
   — Quand $\omega \to 0$, $N(\omega) \to 1$ et $D(\omega) \to 0$ donc $Z(\omega) \to \infty$.
   De même, quand $\omega \to \infty$, $N(\omega) \to -aLC_0\omega^2$ et $D(\omega) \to -aLC_0^2\omega^3$ donc $Z(\omega) \to \frac{1}{C_0\omega} \to 0$.
   — La pulsation ω_1 finie pour laquelle $Z \to 0$ vérifie $N(\omega_1) = 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{aLC_0}}$.
   De même, $\omega_2 \neq 0$ pour laquelle $Z \to \infty$ ($AB \leftrightarrow$ interrupteur ouvert, $I \to 0$, anti résonance) vérifie $D(\omega_2) = 0 \Rightarrow 1 + a - aLC_0\omega_2^2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{a+1}{aLC_0}} = \omega_1\sqrt{a+1} > \omega_1$
   Pour $\omega \simeq \omega_1$, AB se comporte comme un interrupteur fermé et quand $\omega \simeq \omega_2$, AB se comporte comme un interrupteur ouvert.
   On peut écrire Z sous la forme

$$Z = \frac{|\omega^2 - \omega_1^2|}{C_0\omega|\omega^2 - \omega_2^2|}$$

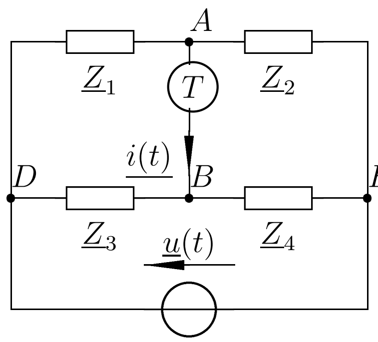
3. On en déduit le graphe $Z(\omega)$: asymptotes verticales en $\omega \to 0$ et ω_2 et $Z \to 0$ pour $\omega = \omega_1 < \omega_2$ et $\omega \to \infty$.



4. La présence d'une résistance interne au dipôle AB va empêcher Z d'atteindre une valeur nulle ou infinie, cela va donc "lisser" la courbe précédente.

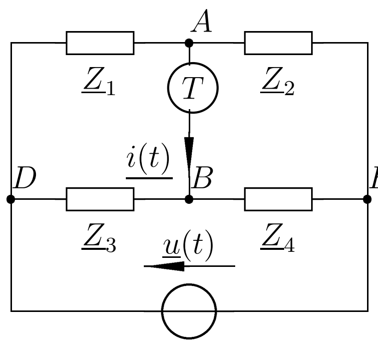
Exercice 5 : Pont de Wheatstone en régime sinusoïdal et application

On considère un pont de Wheatstone alimenté par un générateur de tension alternative $u(t) = U_m \cos \omega t$. T est un écouteur téléphonique d'impédance complexe $\underline{Z}_T$.



1. Quelle condition doivent satisfaire les impédances complexes $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ et $\underline{Z}_4$ pour que i soit nul ?
2. Quel est le rôle de T ?
3. Application :
   - les impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ sont respectivement des résistances étalons R_1 et R_2.
   - $\underline{Z}_3$ se compose d'un résistor de résistance variable R en série avec un condensateur de capacité C.
   - $\underline{Z}_4$ se compose d'un résistor de résistance variable R identique en parallèle avec un condensateur de même capacité C.

   Trouver les conditions d'équilibre du pont et en déduire une application.



1. En notation complexe, on a $\underline{u}_{AB} = \underline{v}_A - \underline{v}_B = \underline{Z}_T.\underline{i}$.
   Pour que $i(t)$ soit nul, il faut et il suffit que $\underline{u}_{AB} = 0$.
   Si $i(t)$ est nul, les dipôles $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ sont traversés par le même courant et par application de la formule des ponts diviseurs de tension,
   $\underline{u}_2 = \underline{u}_{AE} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{u}_{DE} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{u}$.
   De même, $\underline{u}_4 = \underline{u}_{BE} = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4}\underline{u}$ et

$$\underline{u}_{AB} = 0 \Rightarrow \underline{u}_{AE} + \underline{u}_{EB} = 0 \Rightarrow \underline{u}_{AE} = \underline{u}_{BE} \Rightarrow \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \Rightarrow \underline{Z}_1.\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\underline{Z}_3$$

2. Si $i(t)$ n'est pas nul, le pont n'est pas "équilibré" et l'écouteur téléphonique émet un son. Cela permet de faire un réglage "à l'oreille" (il faut que la fréquence de travail corresponde à celle d'un son audible).

3. Application : on a ici $\underline{Z}_1 = R_1$, $\underline{Z}_2 = R_2$, $\underline{Z}_3 = R + \frac{1}{jC\omega}$ et $\underline{Y}_4 = \frac{1}{\underline{Z}_4} = \frac{1}{R} + jC\omega$ d'où

$$\underline{Z}_1.\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\underline{Z}_3 \Rightarrow R_1 = R_2\underline{Z}_3\underline{Y}_4 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = (R+\frac{1}{jC\omega})(\frac{1}{R}+jC\omega) \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 1+jRC\omega+\frac{1}{jRC\omega}+1$$

On obtient finalement $\frac{R_1}{R_2} - 2 + j(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}) = 0$.
Il faut donc $R_1 = 2R_2$ et $RC\omega - \frac{1}{RC\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{RC}$.
Ce pont peut être utilisé comme fréquencemètre : on règle R et $R_1 = 2R_2$ connus, on modifie C jusqu'à ce qu'on ne perçoive plus de son, on a alors $f = \frac{1}{2\pi RC}$.