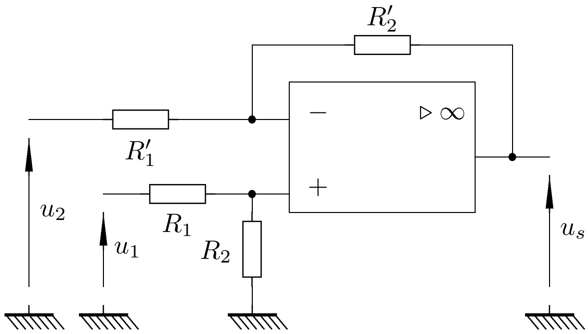
TRAVAUX DIRIGÉS EC_8

Exercice 1 : Circuit soustracteur ⋆⋆

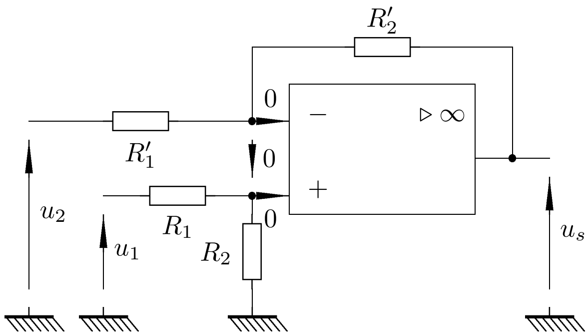
✍ On considère le circuit ci-dessous dans lequel l'AO. est idéal et fonctionne en régime linéaire.



1. Déterminer l'expression de u_s en fonction de u_1, u_2 et des résistances R_1, R_2, R_1' et R_2'.
2. Comment faut-il choisir les résistances pour que $u_s = u_1 - u_2$, justifiant ainsi le nom de circuit soustracteur ?

Par hypothèse, l'amplificateur opérationnel est idéal donc $I_- = I_+ = 0$.
De plus, comme il fonctionne en régime linéaire (la présence d'une rétroaction négative le confirme) on a aussi $v_+ - v_- = \varepsilon = 0$.

On complète alors la figure.

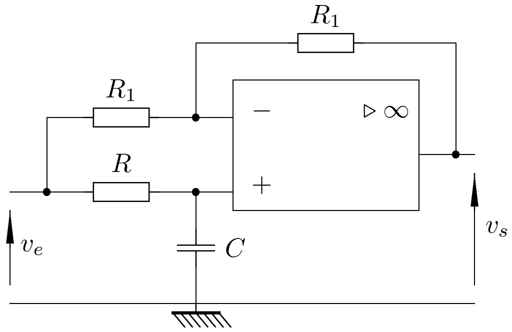


1. On cherche à exprimer u_s en fonction de u_1, u_2 et des résistances R_1, R_2, R_1' et R_2'.
   Pour cela, on applique la loi des nœuds en terme de potentiels (ou directement le théorème de Millman) :
   - à l'entrée inverseuse :
   $$\frac{u_2 - v_-}{R_1'} - I_- + \frac{u_s - v_-}{R_2'} = 0 \Rightarrow v_- = \frac{\frac{u_2}{R_1'} + \frac{u_s}{R_2'} - 0}{\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}} \Rightarrow v_- = \frac{R_2'u_2 + R_1'u_s}{R_2' + R_1'}$$
   - à l'entrée non inverseuse :
   $$\frac{u_1 - v_+}{R_1} - I_+ + \frac{0 - v_+}{R_2} = 0 \Rightarrow v_+ = \frac{\frac{u_1}{R_1} + \frac{0}{R_2} - 0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow v_+ = \frac{R_2u_1}{R_2 + R_1}$$

   On utilise ensuite $\varepsilon = 0 = v_+ - v_- \Rightarrow v_+ = v_-$ soit
   $$\frac{R_2u_1}{R_2 + R_1} = \frac{R_2'u_2 + R_1'u_s}{R_2' + R_1'} \Rightarrow u_s = \frac{R_2(R_1' + R_2')u_1 - (R_1 + R_2)R_2'u_2}{R_1'(R_1 + R_2)} = \frac{R_2(R_1' + R_2')}{R_1'(R_1 + R_2)}u_1 - \frac{R_2'}{R_1'}u_2$$
2. On aura $u_s = u_1 - u_2$ si $\frac{R_2(R_1'+R_2')}{R_1'(R_1+R_2)} = 1$ et $\frac{R_2'}{R_1'} = 1 \Rightarrow R_2' = R_1'$ d'où
   $\frac{R_2(R_1'+R_1')}{R_1'(R_1+R_2)} = 1 \Rightarrow 2R_2.R_1' = R_1'(R_1 + R_2) \Rightarrow R_1 = R_2$.
   Finalement, il faut et il suffit que $R_1 = R_2$ et $R_1' = R_2'$.

Exercice 2 : Montage en régime sinusoïdal ⋆⋆

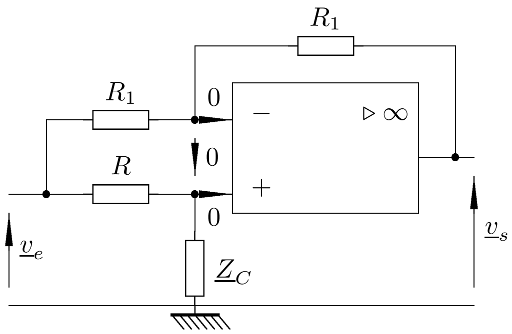
On considère le montage suivant alimenté par un générateur de tension alternative sinusoïdale, $v_e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$. L'amplificateur opérationnel est idéal, R est une résistance variable.



1. Déterminer l'expression complexe de la tension de sortie $\underline{v}_s$ en fonction de $\underline{v}_e$ et des données.
   En déduire sa valeur efficace et son déphasage φ par rapport à v_e.
2. Quel rôle joue ce montage ?

Par hypothèse, l'amplificateur opérationnel est idéal donc $I_- = I_+ = 0$.
De plus, comme il fonctionne en régime linéaire (la présence d'une rétroaction négative le confirme) on a aussi en notation complexe $\underline{v}_+ - \underline{v}_- = \underline{\varepsilon} = 0$.

On complète alors le schéma du circuit en notation complexe.



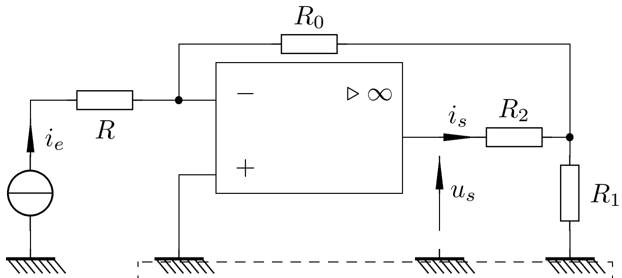
1. On cherche à exprimer $\underline{v}_s$ en fonction de $\underline{v}_e$.
   Pour cela, on applique la loi des nœuds en terme de potentiels (ou le théorème de Millman) :
   - à l'entrée inverseuse :
   $$\frac{\underline{v}_e - \underline{v}-}{R_1} - I_- + \frac{\underline{v}_s - \underline{v}_-}{R_1} = 0 \Rightarrow \underline{v}_- = \frac{\frac{\underline{v}_e}{R_1} + \frac{\underline{v}_s}{R_1} - 0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}} \Rightarrow \underline{v}_- = \frac{\underline{v}_e + \underline{v}_s}{2}$$
   - à l'entrée non inverseuse :
   $$\frac{\underline{v}_e - \underline{v}_+}{R} - I_+ + \frac{0 - \underline{v}_+}{\underline{Z}_C} = 0 \Rightarrow \underline{v}_+ = \frac{\frac{\underline{v}_e}{R} + \frac{0}{\underline{Z}_C} - 0}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} \Rightarrow \underline{v}_+ = \frac{\underline{v}_e}{1 + jRC\omega} \qquad \text{pont div de tension}$$

   On utilise ensuite $\underline{\varepsilon} = 0 = \underline{v}_+ - \underline{v}_- \Rightarrow \underline{v}_+ = \underline{v}_-$ soit
   $$\frac{\underline{v}_e + \underline{v}_s}{2} = \frac{\underline{v}_e}{1 + jRC\omega} \Rightarrow \underline{v}_e + jRC\omega\underline{v}_e + (1 + jRC\omega)\underline{v}_s = 2\underline{v}_e \Rightarrow \underline{v}_s = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{v}_e$$
   En posant $\underline{v}_e = E\sqrt{2}e^{j\omega t}$ et $\underline{v}_s = \underline{V}_s\sqrt{2}e^{j\omega t}$, on en déduit (après simplification par $\sqrt{2}e^{j\omega t}$) la valeur efficace complexe $\underline{V}_s$ de la tension de sortie
   $$\underline{V}_s = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}E \Rightarrow V_s = |\underline{V}_s| = \frac{|1 - jRC\omega|}{|1 + jRC\omega|}E = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}E = E$$
   et $\varphi = \arg(\underline{V}_s) = \arg(1 - jRC\omega) - \arg(1 + jRC\omega) = -\arctan\frac{RC\omega}{1} - \arctan\frac{RC\omega}{1}$ soit finalement $\varphi = -2\arctan RC\omega$
2. Ce montage est un montage déphaseur.

Exercice 3 : Amplificateur de courant.

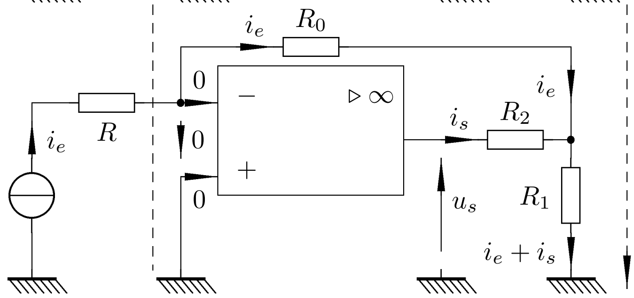
On considère le circuit ci-dessous dans lequel l'AO. est idéal et fonctionne en régime linéaire.

Déterminer, en fonction des résistances, le gain en courant $G_i = \frac{i_s}{i_e}$.



Par hypothèse, l'amplificateur opérationnel est idéal donc $I_- = I_+ = 0$.
De plus, comme il fonctionne en régime linéaire (la présence d'une rétroaction négative le confirme) on a aussi $v_+ - v_- = \varepsilon = 0$.

On complète alors la figure.



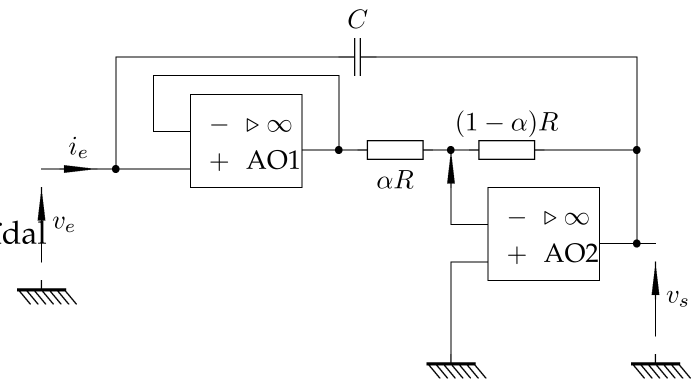
Par application d'une simple loi des mailles (celle représentée en pointillés), on en déduit ensuite

$$0 - R_0 i_e - R_1(i_e + i_s) = 0 \Rightarrow i_e(R_0 + R_1) = -R_1 i_s \Rightarrow G_i = \frac{i_s}{i_e} = -(1 + \frac{R_0}{R_1})$$

Exercice 4 : Loi des nœuds et Théorème de Millman en RSF ⋆⋆⋆

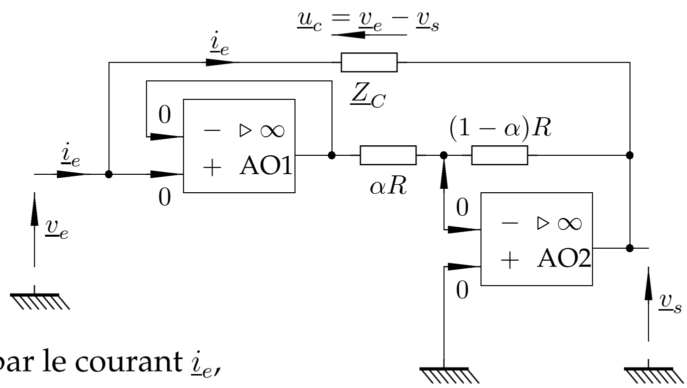
Dans le circuit ci-contre, le curseur partage la résistance R en deux parties αR et $(1-\alpha)R$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
Les amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

1. Calculer le rapport $\frac{\underline{v_e}}{\underline{i_e}}$ en régime sinusoïdal forcé.
2. Quel est l'intérêt de ce montage ?



Par hypothèse, les amplificateurs opérationnels sont idéaux donc $I_- = I_+ = 0$.
De plus, comme ils fonctionnent en régime linéaire (la présence de rétroactions négatives le confirme) on a aussi en notation complexe $\underline{v}_+ - \underline{v}_- = \underline{\varepsilon} = 0$.

On complète alors le schéma du circuit en notation complexe.



1. Comme l'impédance $\underline{Z}_C$ est parcourue par le courant $\underline{i}_e$, en convention récepteur, on peut écrire $\underline{i}_e = \frac{\underline{u}_c}{\underline{Z}_C} = jC\omega(\underline{v}_e - \underline{v}_s)$.
   Par construction, le potentiel de l'entrée non inverseuse de l'AO2, relié à la masse, est nul. On a donc également $\underline{v}_- = 0$ pour l'AO2.
   L'AO1 étant un suiveur, on retrouve le potentiel $\underline{v}_e$ à sa sortie et par application de la loi des nœuds en terme de potentiels (ou le théorème de Millman) à l'entrée inverseuse de l'AO2 on obtient :
   $$\frac{\underline{v}_e - \underline{v}_-}{\alpha R} + \frac{\underline{v}_s - \underline{v}_-}{(1-\alpha)R} = 0 \Rightarrow \underline{v}_s = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\underline{v}_e$$

et en reportant dans l'expression de $\underline{i}_e$, on en déduit

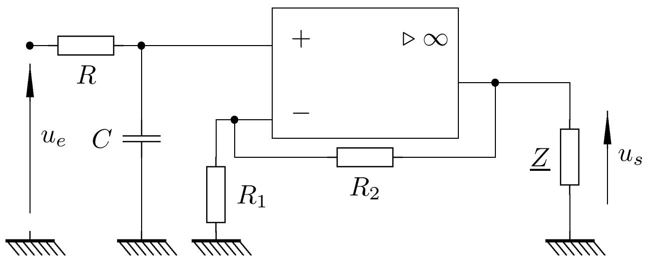
$$\underline{i}_e = jC\omega\left(\underline{v}_e - \frac{\alpha-1}{\alpha}\underline{v}_e\right) = \frac{jC\omega}{\alpha}\underline{v}_e \Rightarrow \frac{\underline{v}_e}{\underline{i}_e} = \underline{Z}_e = \frac{\alpha}{jC\omega} = \frac{1}{j\frac{C}{\alpha}\omega} = \frac{1}{jC'\omega} \qquad \text{avec } C' = \frac{C}{\alpha} > C$$

2. On remarque que le montage est équivalent à un condensateur de capacité $C' > C$, il peut donc être utilisé comme multiplieur de capacité.

   Par exemple en prenant $\alpha = 0{,}1$, on multiplie la capacité du condensateur par 10 !

Exercice 5 : Filtre actif ⋆⋆

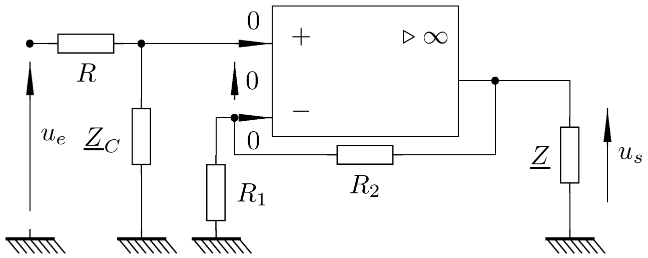
Soit le filtre représenté ci-dessous et pour lequel $R = 100\ \Omega$, $C = 10\ \mu$F, $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 9$ kΩ et l'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire.



1. Quelle est la nature du filtre.
2. Vérifier en déterminant la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.

   Faire une remarque sur l'influence de $\underline{Z}$, l'impédance de charge. Utilité ?
3. Quelle est la fréquence de coupure ?
4. Tracer le diagramme de BODE du filtre.

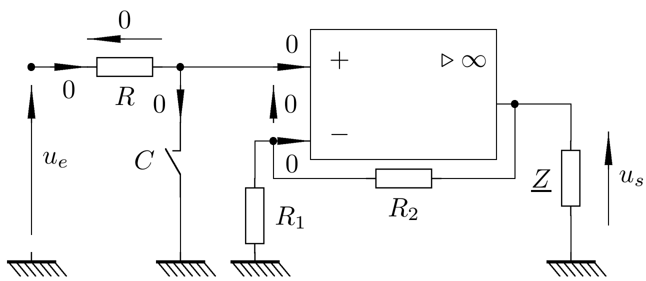
Par hypothèse, l'amplificateur opérationnel est idéal donc $I_- = I_+ = 0$.
De plus, comme il fonctionne en régime linéaire (la présence d'une rétroaction négative le confirme) on a aussi $v_+ - v_- = \varepsilon = 0$.



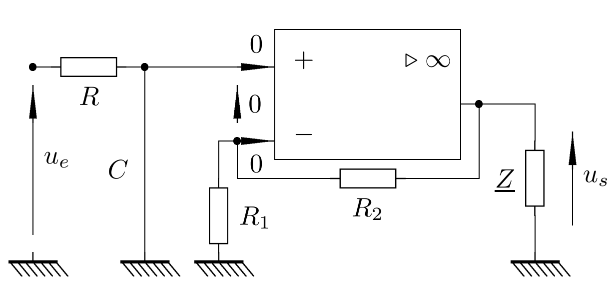
On complète alors la figure.

1. Avec un peu d'habitude, on reconnaît tout de suite un filtre passe bas du premier ordre (circuit RC avec C en sortie ouverte) de fonction de transfert $\underline{H}_1$ suivi d'un amplificateur de tension non inverseur de facteur d'amplification $A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ quelque soit la fréquence d'où un comportement passe-bas du premier ordre.

   On peut également représenter le circuit équivalent en basses fréquences (C se comporte comme un interrupteur ouvert) et en hautes fréquences (C se comporte comme un interrupteur fermé).



Montage en Basses fréquences



Montage en Hautes fréquences

   En basses fréquences, on a $v_+ = u_e$ alors que $v_+ = 0$ en hautes fréquences.

   Pour les deux montages, comme R_1 et R_2 sont traversées par le même courant, l'utilisation de la formule des ponts diviseurs de tension donne $v_- = \frac{R_1}{R_1+R_2}u_s \Rightarrow u_s = (1 + \frac{R_2}{R_1})v_-$.

Remarque : on pouvait aussi obtenir ce résultat par utilisation de la loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse (Cf. 2.).
Enfin, comme $v_- = v_+$, on a $u_s = (1 + \frac{R_2}{R_1})v_+ = (1 + \frac{R_2}{R_1})u_e$ en basses fréquences et $u_s = (1 + \frac{R_2}{R_1})v_+ = 0$ en hautes fréquences d'où un comportement passe bas (du premier ordre).

2. Comme l'amplificateur opérationnel est idéal, $I_+ = 0$ donc R et le condensateur d'impédance complexe $\underline{Z}_C$ sont traversés par le même courant d'où

$$\underline{v}_+ = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + R}\underline{u}_e = \frac{\underline{u}_e}{1 + R.\underline{Y}_C} \Rightarrow \underline{v}_+ = \frac{\underline{u}_e}{1 + jRC\omega}$$

Par application de la loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse,

$$\frac{0 - \underline{v}_-}{R_1} + \frac{\underline{u}_s - \underline{v}_-}{R_2} = 0 \Rightarrow \underline{v}_- = \frac{\frac{0}{R_1} + \frac{\underline{u}_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\underline{u}_s}{\frac{R_2}{R_1} + 1}$$

On utilise enfin

$$\underline{v}_+ = \underline{v}_- \Rightarrow \frac{\underline{u}_e}{1 + jRC\omega} = \frac{\underline{u}_s}{\frac{R_2}{R_1} + 1} \Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\frac{R_2}{R_1} + 1}{1 + jRC\omega} = A.\underline{H}_{PB}$$

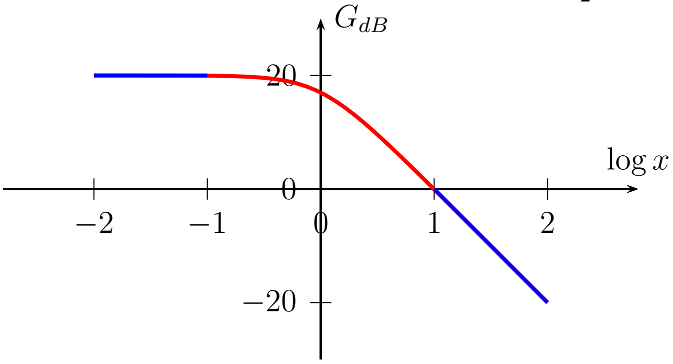
avec $A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ le facteur d'amplification de l'amplificateur non inverseur et $\underline{H}_{PB}$ la fonction de transfert du filtre passe bas du premier ordre que constitue la portion RC avec C en sortie ouverte.

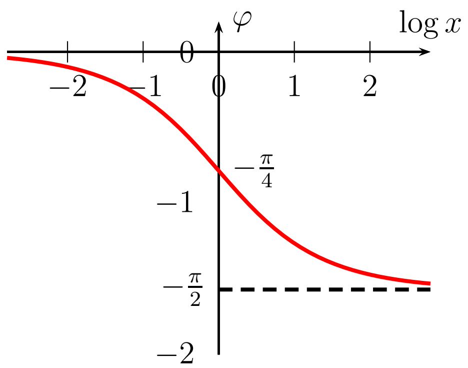
On remarque que $\underline{H}$ ne dépend pas de l'impédance de charge. Ce ne serait pas le cas sans la présence de l'amplificateur de tension. On aurait alors $\underline{H} = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{R+\underline{Z}_{\text{éq}}}$ avec $\underline{Z}_{\text{éq}}$ est l'impédance équivalente à l'association parallèle $\underline{Z}$ et $\underline{Z}_C$.
L'amplificateur de tension permet d'avoir un gain statique important et en plus de garder le filtre $R\,C$ en sortie ouverte.

3. La fréquence de coupure est f_0 telle que

$$|\underline{H}(f_0)| = \frac{|\underline{H}_{\text{max}}|}{\sqrt{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{1 + (RC\omega_0)^2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

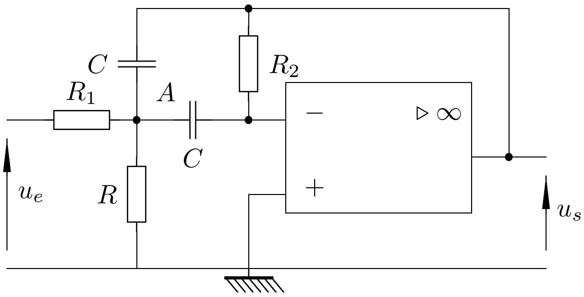
4. Les applications numériques donnent $\omega_0 = 10^3$ rad.s^{-1}, $f_0 = 159$ Hz et $A = 10$.
On pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation propre pour mettre $\underline{H}$ sous la forme canonique $\underline{H} = \frac{A}{1+jx}$.
Pour tracer le diagramme de Bode, on commence par rappeler le comportement asymptotique :
   - pour $x \ll 1$ (basses fréquences), $\underline{H} \simeq A$ d'où $G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|) \simeq 20\log A = 20$ dB et $\varphi = \arg(\underline{H}) \simeq 0$
   - pour $x = 1$ (à la pulsation de coupure), $\underline{H} = \frac{A}{1+j}$ d'où $G_{dB} = G_{dB,max} - 3 = 17$ dB et $\varphi = \arg(A) - \arg(1 + j) = -\frac{\pi}{4}$.
   - pour $x \gg 1$ (hautes fréquences), $\underline{H} \simeq \frac{A}{jx} = -j\frac{A}{x}$ d'où $G_{dB} \simeq 20\log A - 20\log x$ (asymptote de -20 dB/décade) et $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$.





Exercice 6 : Filtrage d'un signal ⋆⋆⋆

Soit le filtre représenté ci-dessous et pour lequel l'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire.

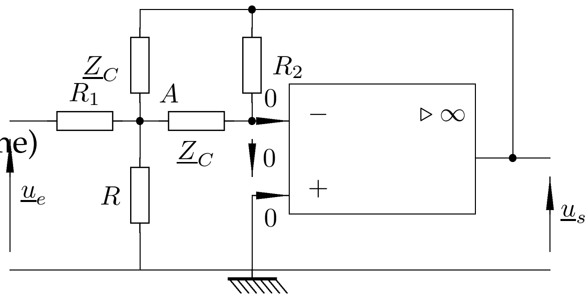


1. Analyser son comportement à basse et à haute fréquence. Quelle est la nature de ce filtre ?
2. Sa fonction de transfert $\underline{H}(jf)$ peut se mettre sous la forme
$$\underline{H}(jf) = \frac{-A_0}{1 + jQ(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f})}$$
Tracer le diagramme de BODE du filtre pour $A_0 = 2$ et $Q = 10$.
3. Soit $u_e(t) = 5 + 3\cos(2\pi f_0 t) - 2\sin(6\pi f_0 t)$. Dessiner le spectre de $u_e(t)$. Déterminer $u_s(t)$ et dessiner son spectre.

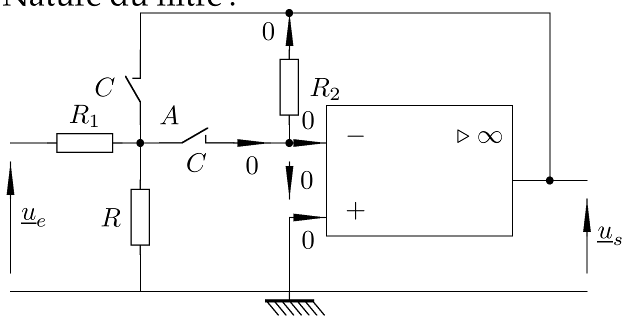
Par hypothèse, l'amplificateur opérationnel est idéal donc $I_- = I_+ = 0$.

De plus, comme il fonctionne en régime linéaire (la présence d'une rétroaction négative le confirme) on a aussi $\underline{v}_+ - \underline{v}_- = \underline{\varepsilon} = 0$.

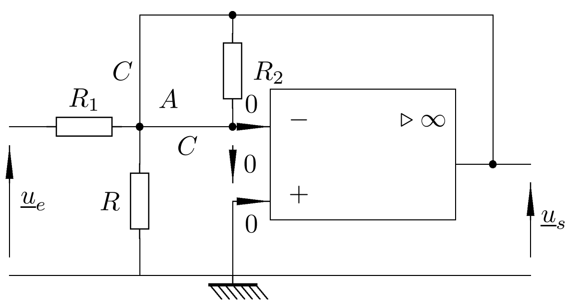
On complète alors la figure.



1. Nature du filtre ?



Basses Fréquences



Hautes Fréquences

- En basses fréquences les condensateurs se comportent comme autant d'interrupteurs ouverts (figure ci-dessus à gauche).

  En plaçant les intensités des courants, on montre que R_2 n'est traversée par aucun courant. La tension à ses bornes $\underline{u}_2$ est donc nulle et en écrivant une loi des mailles, on établit $\underline{v}_+ - \underline{\varepsilon} - \underline{u}_2 - \underline{u}_s = 0 \Rightarrow \underline{u}_s = 0$.
- En hautes fréquences les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs fermés (figure ci-dessus à droite).

  Cette fois le résistor R_2 est court circuité, la tension à ses bornes $\underline{u}_2$ est donc à nouveau nulle et en écrivant la même loi des mailles, on établit $\underline{v}_+ - \underline{\varepsilon} - \underline{u}_2 - \underline{u}_s = 0 \Rightarrow \underline{u}_s = 0$.

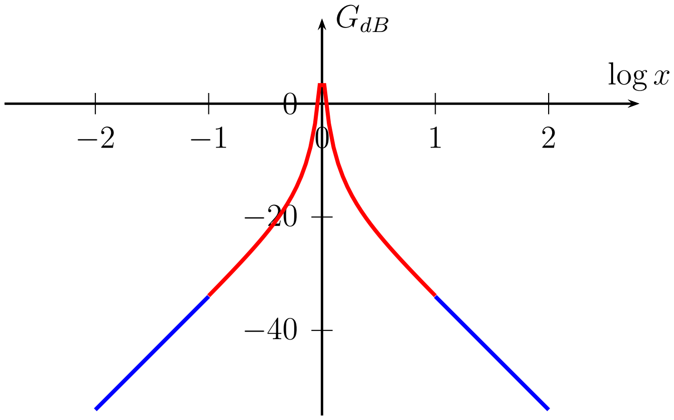
Ce circuit semble donc être un filtre passe bande (du second ordre).

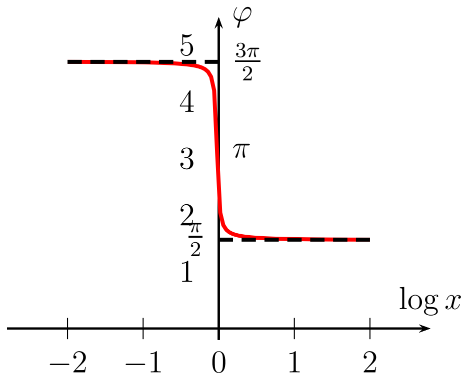
2. On donne ici $\underline{H} = \frac{-A_0}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$ avec un gain maximum $A_0 = 2$, un facteur de qualité du filtre $Q = 10$ et la pulsation propre $x = \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$ où f_0 est la pulsation de résonance du filtre.

Pour tracer le diagramme de Bode en gain et en phase, on commence par étudier le comportement asymptotique :

- En basses fréquences $x \ll 1$ et $\underline{H} \simeq \frac{-A_0}{-jQ/x} = -j\frac{A_0}{Q}x$ d'où $G_{dB} = 20\log|\underline{H}| \simeq 20\log\frac{A_0}{Q} + 20\log x = 20\log 0{,}2 + 20\log x \simeq -14 + 20\log x$: asymptote de pente +20 dB/Décade et d'ordonnée à l'origine -14 dB. De même, $\varphi = \arg(\underline{H}) \simeq \arg(-j\frac{A_0}{Q}x) = -\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.
- En $x = 1$, c'est à dire à la résonance $\underline{H} = -A_0$ d'où $G_{dB} = 20\log A_0 \simeq 6$ dB et $\varphi = \pi$
- En hautes fréquences $x \gg 1$ et $\underline{H} \simeq \frac{-A_0}{jQx} = j\frac{A_0}{Qx}$ d'où $G_{dB} = 20\log|\underline{H}| \simeq 20\log\frac{A_0}{Q} - 20\log x \simeq -14 - 20\log x$: asymptote de pente -20 dB/Décade et d'ordonnée à l'origine -14 dB. De même, $\varphi = \arg(\underline{H}) \simeq \arg(j\frac{A_0}{Qx}) = \frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

On en déduit les tracés suivants :



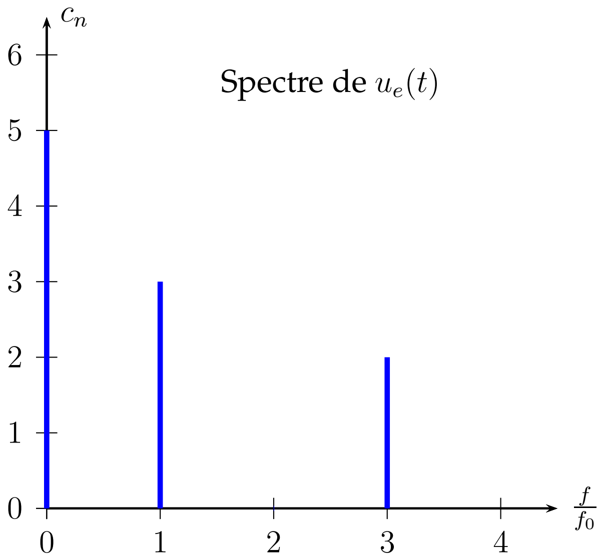


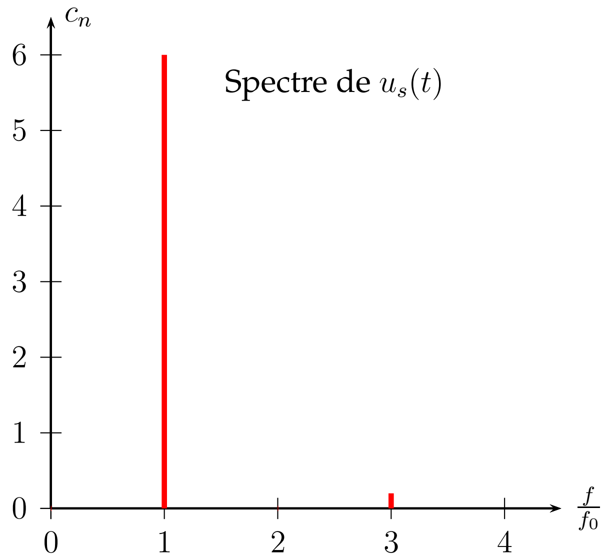
3. On peut décomposer

$$u_e(t) = 5 + 3\cos(2\pi f_0 t) - 2\sin(6\pi f_0 t) = 5\cos(0\times\omega_0 t) + 3\cos(1\times\omega_0 t) + 0\cos(2\times\omega_0 t) + 2\cos(3\times\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$$

$$u_e = c_0 + c_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + c_2\cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + c_3\cos(3\omega_0 t + \varphi_3) = \sum_{n=0}^{3} c_n\cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

avec $c_0 = 5$ la composante continue, $c_1 = 3$ l'amplitude du fondamental, $c_2 = 0$ et $c_3 = 2$ les cœfficient de la série de Fourier de $u_e(t)$. On a par ailleurs $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_3 = -\frac{\pi}{2}$.
On déduit des c_n le spectre de $u_e(t)$: figure ci-dessous à gauche.





Le signal de sortie peut s'écrire sous la forme

$$u_s = c'_0 + c'_1\cos(\omega_0 t + \varphi'_1) + c'_2\cos(2\omega_0 t + \varphi'_2) + c'_3\cos(3\omega_0 t + \varphi'_3) = \sum_{n=0}^{3} c'_n\cos(n\omega_0 t + \varphi'_n)$$

avec c'_n l'amplitude de l'harmonique de rang n (c'est à dire de pulsation $\omega = n.\omega_0$) et φ' sa phase à l'origine.

On utilise l'expression du gain en tension et du déphasage pour chaque harmonique :

$$c'_n = G(n.\omega_0).c_n \text{ et } \varphi'_n = \varphi(n.\omega_0) + \varphi_n$$

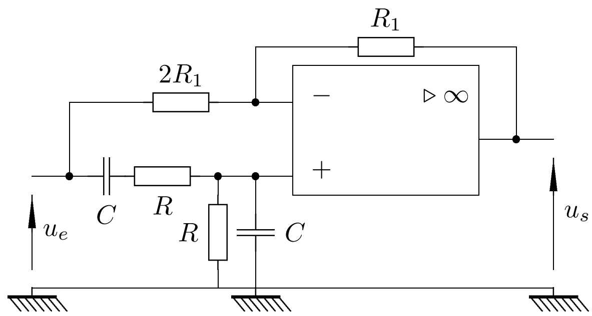
Ici, on calcule successivement

- $c_0 = 5$ V mais $G(0) \to 0 \Rightarrow c'_0 = 0$: la composante continue est filtrée.
- $c_1 = 3$ V et $G(\omega_0) = 2$ d'où $c'_1 = 6$ V et $\varphi'_1 = \varphi(\omega_0) + \varphi_1 = \pi + 0 = \pi$.
- $c_2 = 0$ et $c'_2 = G(2\omega_0)c_2 = 0$.
- $c_3 = 2$ V et $c'_3 = G(3\omega_0)c_3 = \frac{2}{\sqrt{1+Q^2(3-1/3)^2}}.c_3 \simeq 0{,}15$ V faible car on a affaire à un filtre très sélectif et $\varphi'_3 = \varphi(3\omega_0) + \varphi_1 \simeq \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$.

On en déduit $u_s(t) \simeq 6\cos(\omega_0 t + \pi) + 0{,}15\cos(3\omega_t + \frac{3\pi}{2}) = -6\cos\omega_0 t + 0{,}15\sin(3\omega_0 t)$: signal quasi sinusoïdal.

Exercice 7 : Filtre actif

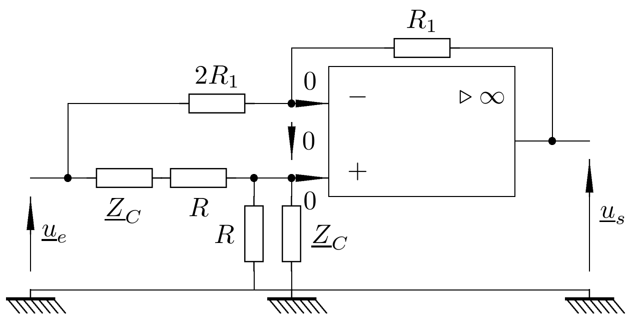
Soit le filtre représenté ci-dessous l'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire.



1. Quelle est la nature du filtre (on étudiera le comportement asymptotique).
2. Vérifier en déterminant la fonction de transfert $\underline{H}(jx)$ en posant $x = RC\omega$.
3. Tracer le diagramme de BODE pour le gain.
4. Quelle est l'équation différentielle liant $u_s(t)$ à $u_e(t)$?

Par hypothèse, l'amplificateur opérationnel est idéal donc $I_- = I_+ = 0$.
De plus, comme il fonctionne en régime linéaire (la présence d'une rétroaction négative le confirme) on a aussi $\underline{v}_+ - \underline{v}_- = \underline{\varepsilon} = 0$.

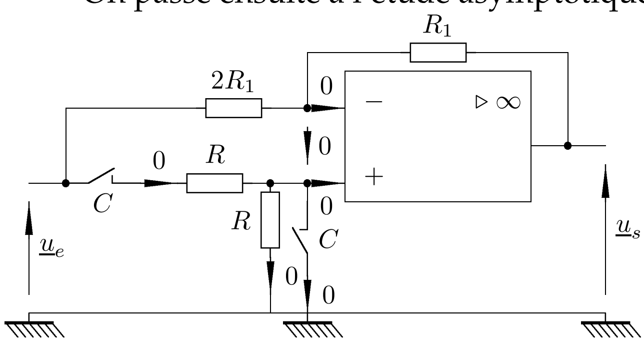
On complète alors la figure.



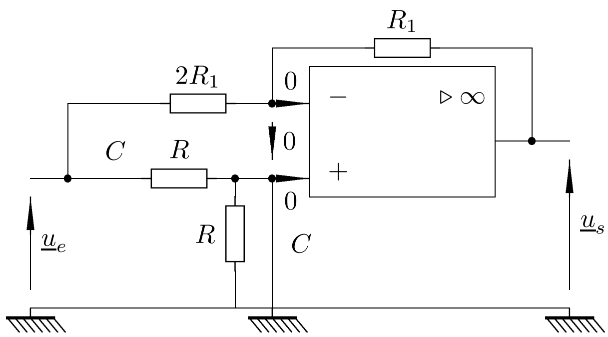
1. Nature du filtre : quelque soit la fréquence de travail, une loi des nœuds en terme de potentiels (ou le théorème de Millman) appliquée à l'entrée inverseuse s'écrit :

$$\frac{\underline{u}_e - \underline{v}_-}{2R_1} + \frac{\underline{u}_s - \underline{v}_-}{R_1} = 0 \Rightarrow \underline{v}_- = \frac{\frac{\underline{u}_e}{2R_1} + \frac{\underline{u}_s}{R_1}}{\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{R_1}} = \frac{\underline{u}_e + 2\underline{u}_s}{3}$$

On passe ensuite à l'étude asymptotique :



Basses Fréquences



Hautes Fréquences

- En basses fréquences les condensateurs se comportent comme autant d'interrupteurs ouverts (figure ci-dessus à gauche).

  En plaçant les intensités des courants, on remarque que les résistors R ne sont traversés par aucun courant. La tension à leurs bornes sont donc nulle et $\underline{v}_+ = R \times 0 = 0 = \underline{v}_- \Rightarrow \frac{\underline{u}_e + 2\underline{u}_s}{3} = 0 \Rightarrow \underline{u}_s = -\frac{1}{2}\underline{u}_e$.
- En hautes fréquences les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs fermés (figure ci-dessus à droite).

  Cette fois le résistor R situé entre la masse et l'entrée inverseuse est court circuité, la tension à ses bornes est donc nulle et on a à nouveau $\underline{u}_s = -\frac{1}{2}\underline{u}_e$.

Il s'agit donc soit d'un filtre déphaseur, soit d'un réjecteur de bande.

2. Fonction de transfert. On applique la loi des nœuds en terme de potentiels (ou directement le théorème de Millman) à l'entrée non inverseuse :

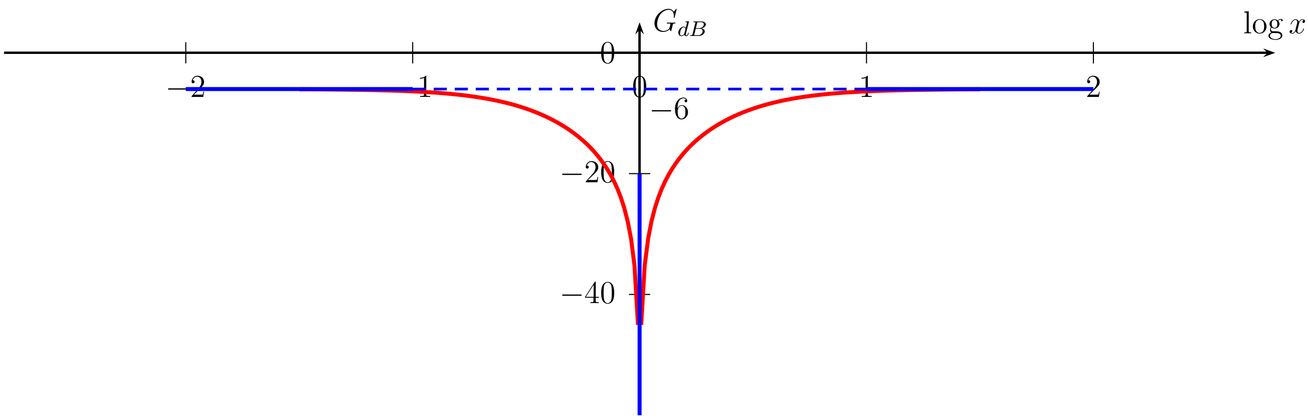
$$\frac{\underline{u}_e - \underline{v}_+}{\underline{Z}_C + R} + \frac{0 - \underline{v}_+}{R} + \frac{0 - \underline{v}_+}{\underline{Z}_C} = 0 \Rightarrow \underline{v}_+ = \frac{\frac{\underline{u}_e}{R+\underline{Z}_C} + 0}{\frac{1}{\underline{Z}_C + R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{\underline{u}_e}{1 + (\frac{1}{R} + jC\omega)(R + \frac{1}{jC\omega})}$$

$\Rightarrow \underline{v}_+ = \frac{\underline{u}_e}{3+jx+\frac{1}{jx}} = \frac{jx\underline{u}_e}{3jx-x^2+1}$ en posant $x = RC\omega$ puis en utilisant $\underline{v}_+ = \underline{v}_- = \frac{\underline{u}_e}{3} + \frac{2}{3}\underline{u}_s$ on déduit

$$\frac{\underline{u}_e}{3} + \frac{2}{3}\underline{u}_s = \frac{jx\underline{u}_e}{1-x^2+3jx} \Rightarrow \underline{u}_s = \frac{1}{2}\left[\frac{3jx}{1-x^2+3jx} - 1\right]\underline{u}_e = -\frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2}{1-x^2+3jx}\right] = \frac{G_0(1-x^2)}{1-x^2+\frac{jx}{Q}}$$

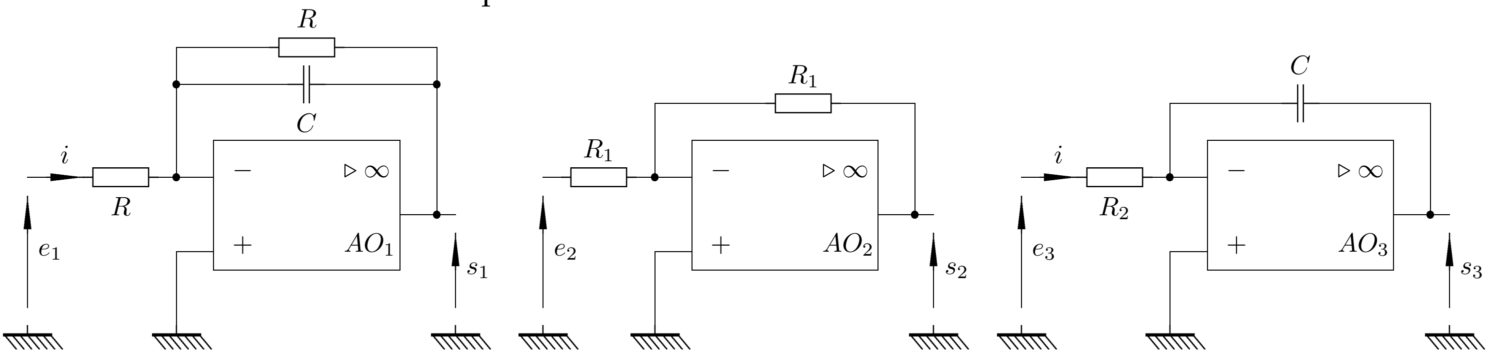
ce qui correspond bien à la forme canonique d'un filtre réjecteur de bande de facteur de qualité $Q = \frac{1}{3}$ et de gain maximum $G_0 = -0{,}5$.

3. Diagramme de Bode : on place les asymptotes basses et hauts fréquences : $G_{dB,0} = 20\log|G_0| = 20\log\frac{1}{2} \simeq -6$ dB puis l'asymptote verticale en $x = 1$ c'est à dire $\log x = 0$.
On trace ensuite l'allure du diagramme de Bode en gain.

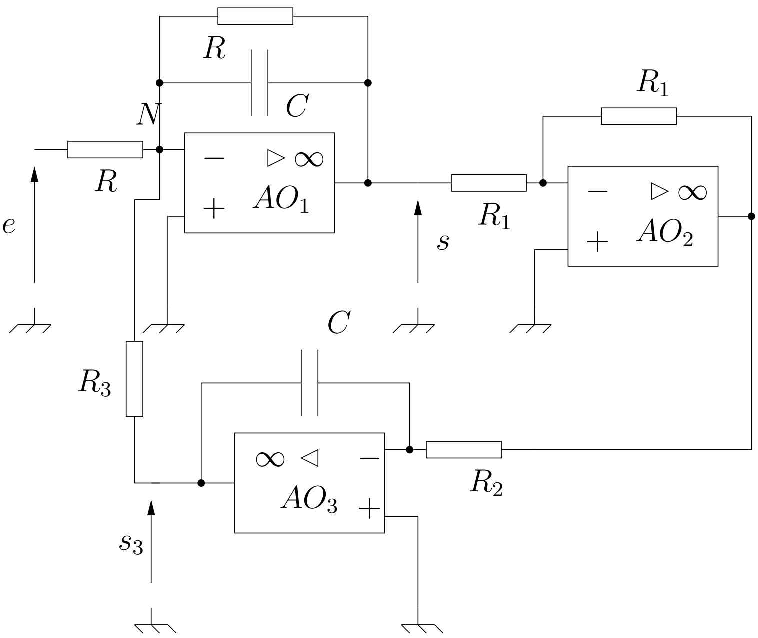


Exercice 8 : Filtre passe bande ⋆⋆⋆
Les amplificateurs (AO.) utilisés sont idéaux.

1. Calculer les fonctions de transfert des 3 circuits représentés figure 1 alimentés par une tension sinusoïdale de pulsation ω.



2. Les trois circuits sont associés suivant le schéma représenté figure 2 :



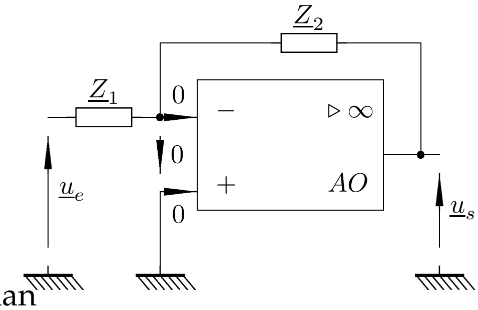
Calculer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$. Montrer qu'elle est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-H_0}{1 + j\omega a + \frac{b}{j\omega}}$$

où H_0, a et b font intervenir les éléments constitutifs du circuit.
Quelle est la nature du filtre obtenu ?

1. Pour chacun de ces trois montages élémentaires, l'amplificateur opérationnel utilisé est idéal donc $I_- = I_+ = 0$.
   De plus on note la présence d'une rétroaction négative ce qui laisse supposer qu'on travaille en mode linéaire d'où $\underline{v}_+ - \underline{v}_- = \underline{\varepsilon} = 0$.

   Par ailleurs, ces trois montages peuvent se mettre sous la forme représentée ci contre.

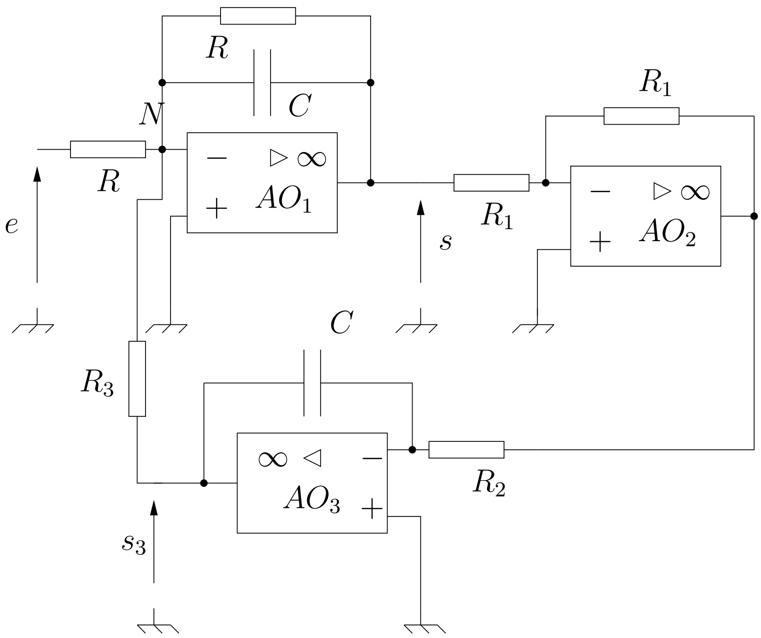


Par construction, $\underline{v}_+ = 0$ et par utilisation de la loi des nœuds en termes de potentiels ou directement du théorème de Millman à l'entrée inverseuse, on établit :

$$\frac{\underline{u}_e - \underline{v}_-}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{u}_s - \underline{v}_-}{\underline{Z}_2} - I_- = 0 \Rightarrow \underline{v}_- = \frac{\underline{Y}_1\underline{u}_e + \underline{Y}_2\underline{u}_s}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \underline{v}_+ = 0 \Rightarrow \underline{u}_s = -\frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2}\underline{u}_e = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}\underline{u}_e$$

- Circuit 1 : $\underline{Z}_1 = R$ et $\underline{Y}_2 = \frac{1}{R} + jC\omega$ d'où $\underline{s}_1 = -\frac{1}{\underline{Z}_1\underline{Y}_2}\underline{e}_1 \Rightarrow \frac{\underline{s}_1}{\underline{e}_1} = \frac{-1}{1+jRC\omega}$: circuit passe bas du premier ordre.
- Circuit 2 : $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = R_1$ d'où $\underline{s}_2 = -\frac{R_1}{R_1}\underline{e}_2 \Rightarrow \frac{\underline{s}_2}{\underline{e}_2} = -1$: circuit suiveur inverseur.
- Circuit 3 : $\underline{Z}_1 = R_2$ et $\underline{Y}_2 = jC\omega$ d'où $\underline{s}_3 = -\frac{1}{\underline{Z}_1\underline{Y}_2}\underline{e}_3 \Rightarrow \frac{\underline{s}_3}{\underline{e}_3} = \frac{-1}{jRC\omega}$: circuit intégrateur inverseur.

2. Fonction de transfert du circuit ci-dessous :



Par application de la loi des nœuds en terme de potentiels (ou directement le théorème de Millman) en N, on établit :

$$\frac{\underline{e}-\underline{v}_N}{R}+\frac{\underline{s}-\underline{v}_N}{R}+\frac{\underline{s}-\underline{v}_N}{\underline{Z}_C}-I_-+\frac{\underline{s}_3-\underline{v}_N}{R_3}=0\Rightarrow \underline{v}_N=\frac{\frac{\underline{e}}{R}+\frac{\underline{s}}{R}+jC\omega\underline{s}+\frac{\underline{s}_3}{R_3}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+jC\omega+\frac{1}{R_3}}$$

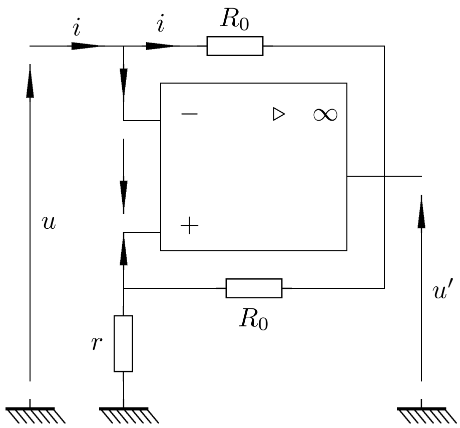
Or, par construction, $\underline{v}_+=0=\underline{v}_-=\underline{v}_N$ d'où $\frac{\underline{e}}{R}+\frac{\underline{s}}{R}+jC\omega\underline{s}+\frac{\underline{s}_3}{R_3}=0$ avec, d'après les résultats de la question précédente, $\underline{s}_3=-\frac{1}{jR_2C\omega}\underline{e}_3$ et $\underline{e}_3=-\underline{s}$ d'où $\underline{s}_3=\frac{\underline{s}}{jR_2C\omega}$ et en reportant dans l'équation précédente, on en déduit :

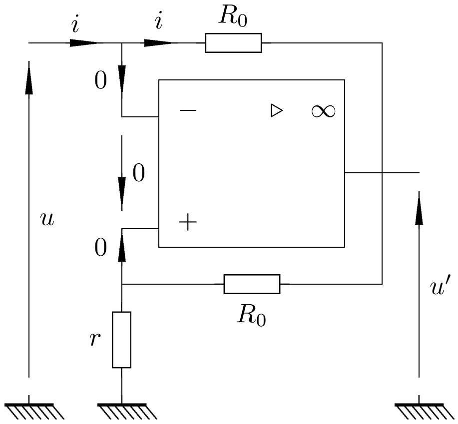
$$\frac{\underline{e}}{R}+\underline{s}\Big[\frac{1}{R}+jC\omega+\frac{1}{jR_2R_3\omega}\Big]=0\Rightarrow \underline{H}=\frac{\underline{s}}{\underline{e}}=\frac{-1}{1+jRC\omega-\frac{jR}{R_2R_3C\omega}}=\frac{-H_0}{1+j\omega a+\frac{b}{j\omega}}$$

où $H_0=1$, $a=RC$ et $b\frac{R}{R_2R_3C}$.
On remarque que le numérateur de $|\underline{H}|$ tend vers l'infini pour ω tend vers 0 ou ∞ alors que le numérateur reste constant. Il s'agit donc d'un filtre passe bande.

Exercice 9 : Amplificateur opérationnel et résistance ⁂

✍ On cherche la relation liant u et i (convention récepteur). Commenter le résultat. À quoi peut servir ce montage ?





On a $u=v_-=v_+$.

r et R_0 étant traversés par le même courant, on a affaire à un diviseur de tension et

$$v_+ = \frac{r}{r+R_0}u' \iff u' = u + \frac{R_0}{r}u$$

Enfin, une loi des mailles donne $u - R_0 i - v_s = 0$ d'où $u - R_0 i - u - \frac{R_0}{r}u = 0$ soit

$$u = -ri$$

- ⋆ Résistances d'entrée : $R_e = \frac{u}{i} = -r$.
- ⋆ Utilité : permet de diminuer la résistance totale R_T dans un RLC série par exemple pour obtenir un oscillateur harmonique ($Q = \frac{L\omega_0}{R_T} \to \infty$) qui produira un signal sinusoïdal de pulsation ω_0.