HOMOGÉNÉITÉ

Exercice 1 : Energie d'une particule relativiste
Quelles doivent être la dimension de la constante c apparaissant dans la relation suivante liant l'énergie E et de la quantité de mouvement p d'une particule relativiste pour que cette relation soit homogène (m_0 étant la masse au repos de la particule) ? $E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$

On doit donc avoir $[E^2] = [m_0^2c^4] = [p^2c^2]$. De la première égalité, on tire $[E] = [m_0c^2]$, or $[E] = [E_c] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]$, d'où $[c] = [v]$. $[c] = \mathrm{L.T^{-1}}$
En utilisant la deuxième égalité, $[E] = [pc] \Rightarrow [p] = \frac{[E]}{[c]} = \frac{\mathrm{M.L^2T^{-2}}}{\mathrm{L.T^{-1}}}$, d'où $[p] = \mathrm{M.L.T^{-1}}$, ce qui est cohérent avec la définition classique de l'impulsion (ou quantité de mouvement) $\vec{p} = m\vec{v}$.

Exercice 2 : Constante gravitationnelle
L'interaction gravitationnelle se manifeste par l'apparition d'une force F entre deux masses m_1 et m_2 séparées par une distance d. L'expression de la cette force est :

$$F = \mathcal{G}\frac{m_1m_2}{d^2}$$

$\mathcal{G}$ étant la constante de gravitation universelle.

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{G}$?
2. Vérifier l'homogénéité de la loi suivante : $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}\mathcal{M}_S}$, où T est la période de rotation d'une planète autour du soleil, a le demi-grand axe de l'ellipse (à peu près le rayon dans le cas général) et M_S est la masse du soleil.

1. En utilisant la 2e loi de Newton, on obtient la dimension d'une force : $[\mathcal{F}] = \mathrm{M.L.T^{-2}}$, d'où $[\mathcal{G}] = \mathrm{M^{-1}L^3T^{-2}}$ 2. Le membre de gauche est de dimension $\mathrm{T^2L^{-3}}$; le membre de gauche est de dimension $(\mathrm{M.M^{-1}L^3T^{-2}})^-1$, soit $\mathrm{T^2L^{-3}}$. Les deux membres sont de même dimension, la formule est donc homogène.

Exercice 3 : Conversion d'unité

1. Quelle est la mesure d'une vitesse égale à 1 $\mathrm{km.min^{-1}}$ dans un système d'unités où l'unité de longueur serait le mile marin (égal à 1852 m) et l'unité de temps serait l'heure ?
2. Quelle est la masse volumique du mercure (13,546 g/mL) en lbs/ft^3 ?

on donne : 1 pied = 1 ft = $0{,}3048$ m et 1 livre = 1 lbs = $0{,}4536$ kg

1. $32.4\ \mathrm{mile.h^{-1}}$ 2. $13{,}546\frac{1\ \mathrm{g}}{1\ \mathrm{mL}} = 13{,}546\frac{1/453{,}6\ \mathrm{lbs}}{(1\ \mathrm{cm})^3} = 13{,}546\frac{1/453{,}6\ \mathrm{lbs}}{(1/30{,}48\ \mathrm{ft})^3} = 13{,}546 \times 30{,}48^3/453{,}6$ lbs/ft^3 $=$ $845{,}6$ lbs/ft^3

Exercice 4 : Période d'un pendule
Lors de l'étude d'un pendule oscillant, de longueur l, pour de faibles oscillations dans le champ de pesanteur g, la période des oscillations est notée T : Parmi les formules suivantes proposées pour T, lesquelles pourraient convenir ? : $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$; $T = \frac{2\pi}{\sqrt{gl}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; $T = \sqrt{\frac{l}{g}}$; $T\sqrt{\frac{gl}{2\pi}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ et $T = \sqrt{\frac{l}{g}}$

Exercice 5 : Résistance thermique
Le cours de 2e année montrera que si on considère un objet a une face à une température T_1 et l'autre face à une température T_2, alors il existe un transfert d'énergie Q à travers le matériau. Ce transfert d'énergie est naturellement d'autant plus grand que la durée Δt pendant laquelle on considère ce phénomène est grande.
On définit donc le flux thermique ϕ traversant ce matériau par :

$$\varphi = \frac{Q}{\Delta t}$$

Lorsque les températures T_1 et T_2 ne varient pas au cours du temps, le flux thermique s'exprime simplement sous la forme

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

où R_{th} est la résistance thermique de l'objet considéré (dépendant des matériaux et de la géométrie).

1. Montrer que le flux thermique ϕ a la dimension d'une puissance
2. Déterminer la dimension de la résistance thermique. En déduire une unité possible.

1. $P = dE/dt$, de même le flux est une énergie sur un temps, c'est donc bien une puissance 2. La résistance thermique est donc exprimable en Kelvin par Watt : K/W

Exercice 6 : Energie d'une explosion nucléaire
La légende raconte que le physicien britannique Geoffrey Ingram Taylor [1] (1886-1975) aurait pu en 1950 à l'aide d'un film et en utilisant l'analyse dimensionnelle, estimer l'énergie E dégagée par une explosion nucléaire.
Le raisonnement est le suivant : le film permet d'avoir accès à l'évolution $R(t)$ du rayon du nuage formé par l'explosion au cours du temps. Les paramètres influant sur ce rayon sont le temps t, l'énergie E, et la masse volumique de l'air ρ

1. On cherche alors R, sous la forme : $R = E^a t^b \rho^c$. Déterminer a, b et c.
2. En estimant un rayon $R = 70$ m après $t = 1$ ms, quel est l'énergie dégagée par l'explosion ?

1. $R = E^{1/5} t^{2/5} \rho^{-1/5}$
2. $E \approx 2.10^{15}$J

Exercice 7 : Amortissement d'une bille
Dans une expérience visant à mesurer une grandeur caractéristique de l'air, à savoir le rapport, noté γ des capacités thermiques molaires à pression constante et à volume constant, on fait osciller une bille d'acier dans un tube placé au dessus d'une bouteille. On constate que les oscillations sont amorties, i.e. que l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps.
Les relevés expérimentaux montrent que le temps caractéristique de l'amortissement est de l'ordre de 10 secondes et que la période des oscillations est de l'ordre de 1 seconde.
Un étudiant propose pour justifier les amortissements l'existence de forces de viscosité au sein du fluide qui produiraient de l'entropie au sein du gaz. Les oscillations du gaz engendrent une onde sonore qui serait absorbée par le gaz.

1. Il est notamment connu pour ses travaux sur la turbulence et les phénomènes non-linéaires. Je vous suggère de consulter sur wikipedia les articles concernant : l'instabilité de Rayleigh-Taylor, l'instabilité de Taylor-Couette, le nombre de Taylor ou encore le cône de Taylor.

Les caractéristiques du système sont alors : la masse volumique du gaz ρ_0, la pulsation des oscillations ω, la viscosité du gaz η, et la vitesse du son c, avec $c^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$ où $P_0 = 10^5$ Pa est la pression atmosphérique.
La viscosité η intervient dans l'expression de la force de frottement s'exerçant sur la bille de rayon r lorsqu'elle est animée de la vitesse $\vec{v}$ par : $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$.

1. Par une analyse dimensionnelle, chercher le temps caractéristique τ de l'amortissement sous la forme : $\tau = \rho_0 c^x \eta^y \omega^\nu$. Précisez x, y et ν
2. En déduire l'expression de τ en fonction de γ, P_0, η et ω.
3. En considérant l'air comme un gaz parfait diatomique, i.e. pour lequel $\gamma = 1{,}4$, de viscosité $\eta = 10^-4$ S.I. donner un ordre de grandeur de τ. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

1. $x = 2, y = -1, \nu = -2$
2. $\tau = \frac{\gamma P_0}{\eta\omega^2}$
3. $\tau \approx 10^7$, l'hypothèse de départ est donc surement fausse.

Exercice 8 : Homogénéité des formules

1. Au XIXe siècle, le médecin Jean-Marie Poiseuille relia le débit massique D d'un fluide visqueux dans un cylindre (c'est-à-dire la masse passant à travers le cylindre par unité de temps) à la variation de pression entre ses deux extrémités ΔP. Un étudiant ayant refait ses calculs propose la formule suivante :

   $$D = \frac{\pi\rho^2 a^3}{8\eta l}\Delta P.$$

   Cette formule est-elle homogène ?

   Données D peut s'exprimer en kg/s, ρ est la masse volumique du fluide, a est le rayon du cylindre, l la longueur du cylindre et η la viscosité en Pa.s. On rappelle qu'une pression peut s'exprimer en Pa et est homogène à une force par unité de surface.
2. La puissance moyenne rayonnée dans tout l'espace par un électron tournant autour du noyau peut s'écrire dans le modèle du rayonnement dipolaire sous la forme :

   $$P = \frac{1}{12\pi} p_0^\alpha \omega^\beta \epsilon_0^\gamma c^\delta$$

   Le moment dipolaire p_0 s'écrit sous la forme $p_0 = qd$ avec q une charge et d une distance. ω est une pusation en rad/s et c est la vitesse de la lumière. Enfin, on rappelle l'expression de la force électrostatique et celle qui relie l'intensité, la charge et le temps :

   $$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \text{et} \qquad i = \frac{q}{\Delta t}$$

   Déterminer α, β, γ et δ.

1. $[D] = \mathrm{M.T^{-1}}$ d'après les unités ; $[\rho] = \mathrm{M.L^{-3}}$; $[\eta] = [P]\mathrm{T}$
   On en déduit la dimension du membre de droite : $\left[\frac{\pi\rho^2 a^3}{8\eta l}\Delta P\right] = \frac{1.\mathrm{M^2 L^{-6}.L^3}[P]}{1.[P].T.L} = \mathrm{M}^2 \ldots$
   il y a une masse au carré à droite, alors que dans le membre de gauche la masse est puissance 1. On en déduit que la formule n'est pas homogène.

2. $[P] = \mathrm{M.L^2.T^{-3}}$ (énergie sur un temps).
   $[\epsilon_0] = \frac{\mathrm{I^2.T^2}}{\mathrm{L^2.M.L.T^{-2}}}$
   $[p_0] = \mathrm{I.T.L}$
   $[\omega] = \mathrm{T^{-1}}$
   On en déduit
   $\mathrm{M.L^2.T^{-3}} = 1.(\mathrm{I.T.L})^\alpha \mathrm{T}^{-\beta} \left(\frac{\mathrm{I^2.T^2}}{\mathrm{L^2.M.L.T^{-2}}}\right)^\gamma (\mathrm{L.T^{-1}})^\delta$
   Pour les masses : $1 = -\gamma$ (1) Pour les longueurs : $2 = \alpha - 3\gamma + \delta$ (2) Pour les temps : $-3 = \alpha - \beta + 4\gamma - \delta$ (3) Pour les intensités : $0 = \alpha + 2\gamma$ (4)
   De (1) on déduit $\gamma = -1$; de (4) on déduit $\alpha = 2$; de (2) on déduit $\delta = -3$; de (3) on déduit $\beta = 3 + 2 - 4 + 3 = 4$

Exercice 9 : Analyse dimensionnelle : chauffage d'un lingot
À partir du moment où l'on rentre un lingot froid dans un four chaud, la vitesse à laquelle augmentera la température au centre va déprendre des facteurs géométriques (on notera l la longueur du lingot), de la conductibilité thermique k, et de l'inertie thermique dans laquelle interviennent la capacité thermique massique à pression constante c_P et la masse volumique ρ.
On note t la durée nécessaire pour atteindre une température donnée au centre du lingot. Cette durée doit dépendre des paramètres du système mentionnés ci-dessus. On pose donc

$$t = A\, c_p^a\, \rho^b\, k^c\, l^d$$

où A est une constante sans dimension.

- on note $[T] = \theta$ la dimension de la température et $[t] = T$ celle du temps ;
- par définition $c_p = \dfrac{1}{m}\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}$ (en maintenant la pression constante), où H représente l'enthalpie (homogène à une énergie) du système de masse m ;
- la « conductibilité » thermique ou « conductivité » thermique lie le vecteur densité de flux thermique j (homogène à une puissance P par unité de surface) à la variation de température dans le milieu : $j = \dfrac{P}{S} = -k\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ (où x représente une coordonnée de position).

1. Rappeler le lien entre énergie et puissance, de façon à en déduire la dimension d'une puissance.
2. Quelle est la dimension de la conductivité thermique k ? Justifier.
3. Quelle est la dimension de la capacité thermique massique à pression constante c_p ? Justifier.
4. Déterminer les exposants de l'expression $t = A\, c_p^a\, \rho^b\, k^c\, l^d$ et en déduire sa forme finale.

1. De façon générale, la puissance reçue (ou fournie) est « le taux d'énergie reçue », c'est-à-dire $\boxed{P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}$. Une autre formule envisageable est : si la puissance est constante, alors, l'énergie échangée pendant un temps Δt vaut $\boxed{E = P \times \Delta t}$.
   On en déduit la dimension d'une puissance (qui nous servira dans les questions suivantes) :

$$\boxed{[P] = \frac{[E]}{T} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{T} = M.L^2.T^{-3}}$$

2. On utilise la formule fournie (avec : $[\mathrm{d}T] = [T] = \theta$ et $[\mathrm{d}x] = L$

$$\left[\frac{P}{S}\right] = \left[-k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right] \Rightarrow \frac{M.L^2.T^{-3}}{L^2} = [k]\,\frac{\theta}{L} \Rightarrow \boxed{[k] = M.L.T^{-3}\theta^{-1}}$$

3. Une fois encore, on utilise la formule donnée pour déterminer la dimension de la capacité thermique massique à pression constante c_p.

$$[c_p] = \left[\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}\right] = \frac{1}{M}\frac{M.L^2.T^{-2}}{\theta} \Rightarrow \boxed{[c_p] = L^2.T^{-2}\theta^{-1}}$$

4. En utilisant les résultats des questions précédentes et la forme fournie par l'énoncé pour t, on en déduit l'équation aux dimensions suivantes :

$$[t] = [A]\,[c_p]^a\,[\rho]^b\,[k]^c\,[l]^d = 1 \times \left(L^2.T^{-2}\theta^{-1}\right)^a \times \left(M.L^{-3}\right)^b \times \left(M.L.T^{-3}\theta^{-1}\right)^c \times (L)^d$$

On rassemble ensuite par dimension :

$$T = M^{b+c} \times L^{2a-3b+c+d} \times T^{-2a-3c} \times \theta^{-a-c}$$

On en déduit le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rclr} 0 & = & b+c \Rightarrow b=-c & (1) \\ 0 & = & 2a-3b+c+d & (2) \\ 1 & = & -2a-3c & (3) \\ 0 & = & -a-c \Rightarrow c=-a & (4) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rclr} c & = & -a & (4) \\ b & = & -c \ = \ a & (1) \\ 1 & = & -2a-3(-a) \Rightarrow a=1 & (3) \\ d & = & -2a+3b-c \ = \ 2a & (2) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rclr} a & = & 1 & (3) \\ c & = & -1 & (4) \\ b & = & 1 & (1) \\ d & = & 2 & (2) \end{array}\right.$$

On en déduit la forme finale : $\boxed{t = A\frac{\rho\, c_p}{k}l^2}$

Exercice 10 : Temps pour une chute libre
On considère une particule en chute libre. Qualitativement, un étudiant propose que le temps de chute doit dépendre de la hauteur dont on laisse tomber la particule, du champ de pesanteur et peut-être de la masse.
Déterminer par analyse dimensionnelle une formule possible pour le temps de chute, puis vérifier la cohérence.
(Remarque, il y a en fait un préfacteur que l'analyse dimensionelle ne peut nous donner).

dimensionnellement $t = \sqrt{h/g}$, on observe que le temps de chute ne dépend pas de la masse, cohérent avec les lois de la mécanique, que le temps de chute est d'autant plus grand que la hauteur est grande, ce qui parait logique, et qu'il diverge lorsque g temps vers 0, ce qui parait logique aussi : s'il n'y pas de gravité, on ne tombe pas !

Exercice 11 : Instabilité de tôle ondulée.
Lorsqu'une route en sable ou en gravier est soumise au passage répété de véhicules, des bosses régulièrement espacées apparaissent à sa surface. Ce phénomène, appelée instabilité de tôle ondulée (*washboard road*), est d'une part très gênant pour les passagers et d'autre part très dangereux à cause de la perte d'adhérence induite par les bosses. Expérimentalement, on constate que cette instabilité apparaît uniquement si les voitures se déplacent au delà d'une vitesse critique v_c. On remarque également que ce phénomène ne dépend que des paramètres suivants : la masse m du véhicule, la largeur du pneu L, la masse volumique ρ de la piste, l'accélération de la pesanteur g et bien sûr la vitesse v du véhicule.

1. À partir de ces paramètres, on peut construire un nombre sans dimension appelé nombre de Froude et noté F_r. Donnez une expression de F_r. On admettra que la masse volumique et la largeur interviennent avec la même puissance dans l'expression du nombre de Froude.

2. Sachant que l'instabilité de tôle ondulée apparaît lorsque le nombre de Froude est supérieur à nombre de Froude critique F_{rc} (en considérant une expression du nombre de Froude qui est une fonction croissante de la vitesse), donnez l'expression de la vitesse critique v_c en fonction de F_{rc} et des paramètres du problème.
3. Si la vitesse critique pour un camion vide de 10 tonnes est de 20 km.h^{-1}, quelle est la vitesse critique pour ce même camion lorsqu'il est chargé avec 28 tonnes ?

1. $[F_r] = 1 = [m^a.L^b.\rho^b.g^d.v^e] = \mathrm{M}^a.\mathrm{L}^b.(\mathrm{M}.\mathrm{L}^{-3})^b(\mathrm{L}.\mathrm{T}^{-2})^d(\mathrm{L}.\mathrm{T}^{-1})^e$ d'où le système d'équation :

$$\left\{\begin{array}{lcll} 0 & = & a+b & \text{pour M} \\ 0 & = & b-3b+d+e & \text{pour L} \\ 0 & = & -2d-e & \text{pour T} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & a+b \\ 0 & = & -2b+d+e \\ e & = & -2d \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -b \\ 2b & = & -d \\ e & = & -2d \end{array}\right.$$

Soit en choisissant $d = -1 : \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -\frac{1}{2} \\ b & = & \frac{1}{2} \\ e & = & 2 \end{array}\right.$

Remarque, il est normal de trouver une infinité de solution car si F_r est sans dimension, alors F_r^2 aussi ainsi que toutes les autres puissances, d'où le fait de devoir choisir une puissance.

Une expression possible du nombre de Froude est donc $F_r = \frac{v^2}{g}\sqrt{\frac{L\rho}{m}}$.

2. $v_c = \sqrt{gF_{rc}\sqrt{\frac{m}{L\rho}}}$.
3. D'après la question précédente, la vitesse critique évolue comme $m^{1/4}$, donc si la masse est multipliée par $2{,}8$, alors la vitesse critique est multipliée par $2{,}8^{1/4}$ puisque tous les autres paramètres sont inchangés. On trouve numériquement 26 km/h (25.87).

Exercice 12 : Vibration d'une étoile

La surface d'une étoile est animée d'un mouvement de vibration qui renseigne sur sa composition. La fréquence de vibration d'une étoile dépend de plusieurs paramètres. La cohésion d'une étoile étant assurée par les forces de gravitation, on s'attend à devoir faire intervenir :

— Le rayon R de l'étoile
— La masse M_e de l'étoile
— La constante $\mathcal{G}$ de gravitation universelle.

Déterminer a, b, c dans l'expression de la fréquence de vibration f en fonction de R, M_e et $\mathcal{G}$:

$$f = kR^aM_e^b\mathcal{G}^c$$

k est une constante sans dimension.

$[f] = \mathrm{T}^{-1}$
$[R] = \mathrm{L}^1$
$[M_e] = \mathrm{M}^1$
En utilisant la 2e loi de Newton, on obtient la dimension d'une force : $[\mathcal{F}] = \mathrm{M}.\mathrm{L}.\mathrm{T}^{-2}$, d'où $[\mathcal{G}] = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$
$f = kR^aM_e^b\mathcal{G}^c \Rightarrow \mathrm{T}^{-1} = 1.\mathrm{L}^a\mathrm{M}^b(\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2})^c$ d'où le système d'équation :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 0 & = & b-c & \text{pour M} \\ 0 & = & a+3c & \text{pour L} \\ -1 & = & -2c & \text{pour T} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b & = & c \\ a & = & -3c \\ c & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & \frac{-3}{2} \\ b & = & \frac{1}{2} \\ c & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$