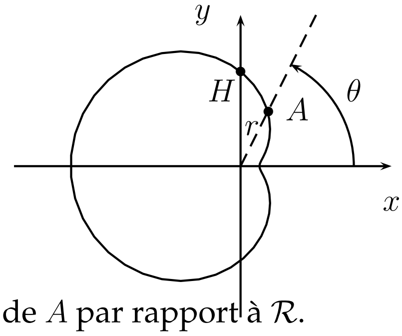
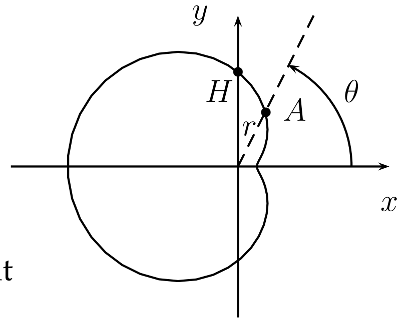
TRAVAUX DIRIGÉS DE M_1

Exercice 1 : Déplacement d'un point matériel le long d'une came



Un point matériel A est astreint à se déplacer dans le plan Oxy d'un référentiel $\mathcal{R}$, le long du pourtour d'une came fixe dans $\mathcal{R}$ (fig. ci-contre).
L'équation polaire de la came est la suivante : $r = b - c\cos\theta$.
La tige, qui permet le mouvement et réalise, à l'aide d'un ressort, le contact sur la came, tourne autour de l'axe Oz, avec une vitesse angulaire ω constante.

1. Exprimer, en coordonnées polaires, la vitesse et l'accélération de A par rapport à $\mathcal{R}$.
2. Calculer v et a pour $\omega = 30$ tours/min, lorsque A atteint le point H de la came défini par $\theta_H = \frac{\pi}{2}$, sachant que $b = 1{,}25$ cm et $c = 1$ cm.
3. Soit v_θ la composante orthoradiale de $\vec{v}$. A-t-on $\frac{dv_\theta}{dt} = a_\theta$ la composante orthoradiale de l'accélération ? Expliquez.



1. On obtient l'expression du vecteur accélération par dérivations successives du vecteur position
$\overrightarrow{OA} = r.\vec{e}_r = (b - c\cos\theta).\vec{e}_r = (b - c\cos\omega t).\vec{e}_r$.
$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{(b-c\cos\omega t)}{dt}.\vec{e}_r + (b - c\cos\omega t).\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ avec
$\frac{d}{dt}(b - c\cos\omega t) = 0 + c\omega\sin\omega t = c\omega\sin\omega t$ et $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta = \omega\vec{e}_\theta$ soit

$$\vec{v} = c\omega\sin\omega t\vec{e}_r + (b - c\cos\omega t)\omega\vec{e}_\theta$$

Puis $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ avec $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\omega\vec{e}_r \Rightarrow \vec{a} = c\omega^2\cos\omega t\vec{e}_r + c\omega\sin\omega t\frac{d\vec{e}_r}{dt} + (0 + c\omega\sin\omega t)\omega\vec{e}_\theta + (b - c\cos\omega t)\omega\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = c\omega^2\cos\omega t\vec{e}_r + c\omega^2\sin\omega t\vec{e}_\theta + c\omega^2\sin\omega t\vec{e}_\theta - \omega^2(b - c\cos\omega t)\vec{e}_r$ soit finalement

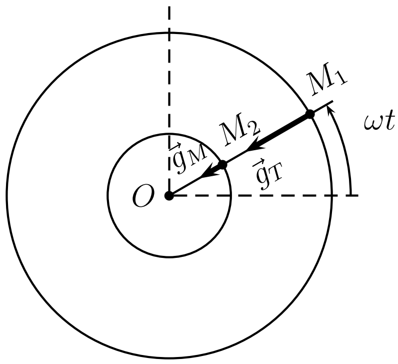
$$\vec{a} = (-b + 2c\cos\omega t)\omega^2\vec{e}_r + 2\omega^2 c\sin\omega t\vec{e}_\theta$$

2. Application numérique : $\omega = 30$ tours/min soit $\omega = 2\pi \times 30/60 \simeq 3{,}14$ rad.s^{-1}. On en déduit en H, c'est à dire pour $\theta = \omega t = \frac{\pi}{2}$, $\vec{v} = c\omega\vec{e}_r + b\omega\vec{e}_\theta \Rightarrow v = \omega\sqrt{c^2 + b^2} = 5{,}03$ cm.s^{-1} et $a = -b\omega^2\vec{e}_r + 2\omega^2 c\vec{e}_\theta \Rightarrow a = \omega^2\sqrt{b^2 + 4c^2} = 23{,}2$ cm.s^{-2}.
3. $v_\theta = (b - c\cos\theta)\omega \Rightarrow \frac{dv_\theta}{dt} = c\omega^2\sin\theta \neq a_\theta = 2c\sin\theta\omega^2$ car la base polaire utilisée ici est une base locale. Ainsi, $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv_r}{dt}\vec{e}_r + v_r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dv_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + v_\theta\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{dv_r}{dt}\vec{e}_r + \dot{\theta}v_r\vec{e}_\theta + \frac{dv_\theta}{dt}\vec{e}_\theta - \dot{\theta}v_\theta d\vec{e}_r = (\frac{dv_r}{dt} - \dot{\theta}v_\theta)\vec{e}_r + (\frac{dv_\theta}{dt} + \dot{\theta}v_r)\vec{e}_\theta = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta$.

Exercice 2 : Laboratoire spatial
Un laboratoire spatial, constitué de deux anneaux concentriques de même axe, est en rotation uniforme autour de cet axe de manière à créer une gravité artificielle. Sa période de rotation T est choisie de manière à ce que l'accélération soit égale à $\vec{g}_T$ l'accélération de pesanteur sur Terre (9,81 m.s^{-2}) au niveau de l'un des anneaux (de rayon $r_1 = 2{,}15$ km) et à $\vec{g}_M$ l'accélération de la pesanteur sur Mars (3,72 m.s^{-2}) au niveau de l'autre.

Déterminer la valeur de T et le rayon r_2 du second anneau.

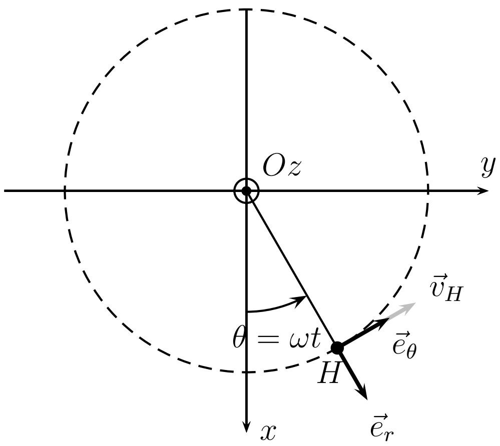
Tous les points d'un anneau sont en mouvement circulaire uniforme. On retrouve aisément l'expression de l'accélération d'un point M_1 situé sur l'anneau de rayon r_1.
$\overrightarrow{OM_1} = r_1\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} = \frac{dr_1}{dt}\vec{e}_r + r_1\frac{d\vec{e}_r}{dt} = 0 + r_1\dot{\theta}\vec{e}_\theta = r_1\omega\vec{e}_\theta$
puis $\vec{a_1} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} = r_1\omega\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -r_1\omega^2\vec{e}_r$.
Or, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ d'où $a_1 = \frac{4\pi^2 r_1}{T^2} = g_T \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r_1}{g_T}} \simeq 93$ s.
De même, au point M_2 du second anneau,
$a_2 = g_M = \frac{4\pi^2 r_2}{T^2} \Rightarrow r_2 = \frac{gT^2}{4\pi^2} \simeq 815$ m.

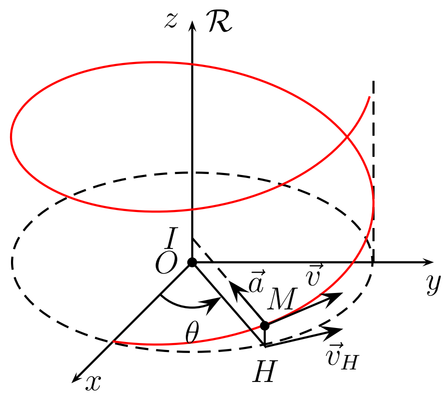


Exercice 3 : Mouvement hélicoïdal
Les équations paramétriques d'une particule M dans un référentiel orthonormé $\mathcal{R}$ direct sont : $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$ et $z = h\omega t$ avec a, h et ω des constantes positives.

1. Soit H la projection de M dans le plan xOy.
   (a) Montrer que H est animé d'un mouvement circulaire uniforme.
   (b) Sur quelle surface la trajectoire de M est-elle inscrite ? La représenter.
2. Calculez les composantes de $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ en coordonnées cylindriques ainsi que la vitesse numérique de M. Quelle remarque peut-on faire ? Déterminez l'angle α que fait $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ avec la direction Oz (on pourra calculer le produit scalaire de ces deux vecteurs). Que peut-on dire de α ?
3. Calculez les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ en coordonnées cylindriques. Indiquez le support et le sens de $\vec{a}(M/\mathcal{R})$.

1. (a) Si H est le projeté de M dans le plan xOy, ses coordonnées sont $x_H = a\cos\omega t$; $y_H = a\sin\omega t$ et $z_H = 0$. On a alors $x_H^2 + y_H^2 = a^2$ et $z_H = 0$ ce qui correspond à l'équation cartésienne d'un cercle de centre O et de rayon a.
   La vitesse numérique de H est telle que $v_H^2 = \dot{x}_H^2 + \dot{y}_H^2 = a^2\omega^2\sin^2\omega t + a^2\omega^2\cos^2\omega t = a^2\omega^2$ soit $v_H = a\omega$ constante. H est donc animé d'un mouvement circulaire et uniforme.





   (b) M reste à la verticale de H mais se déplace en plus verticalement à la vitesse constante $v_z(M) = \dot{z} = h\omega$ il décrit donc une trajectoire hélicoïdale (hélice) inscrite sur un cylindre de génératrice Oz et de rayon a.
2. Par définition, $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ avec $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = a.\vec{e}_r + z.\vec{e}_z$ (expression dans la base cylindro-polaire, la plus adaptée).
   On en déduit $\vec{v} = a\dot{\theta}.\vec{e}_\theta + \dot{z}.\vec{e}_z = a\omega.\vec{e}_\theta + h\omega.\vec{e}_z$ soit $v = ||.\vec{v}|| = \sqrt{\omega^2a^2 + \omega^2h^2} = \omega\sqrt{a^2+h^2}$.
   On remarque que la vitesse de M dans $\mathcal{R}$ est constante.

Pour déterminer l'angle entre deux vecteurs dont on connaît la norme, on peut calculer le produit scalaire de ces vecteurs. Ici, $\vec{v}.\vec{e}_z = ||\vec{v}||.||\vec{e}_z||.\cos\alpha = \omega\sqrt{a^2+h^2}\cos\alpha$ et par ailleurs, $\vec{v}.\vec{e}_z = (a\omega.\vec{e}_\theta + h\omega.\vec{e}_z).\vec{e}_z = h\omega$ d'où $\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$. On remarque que α est constant.

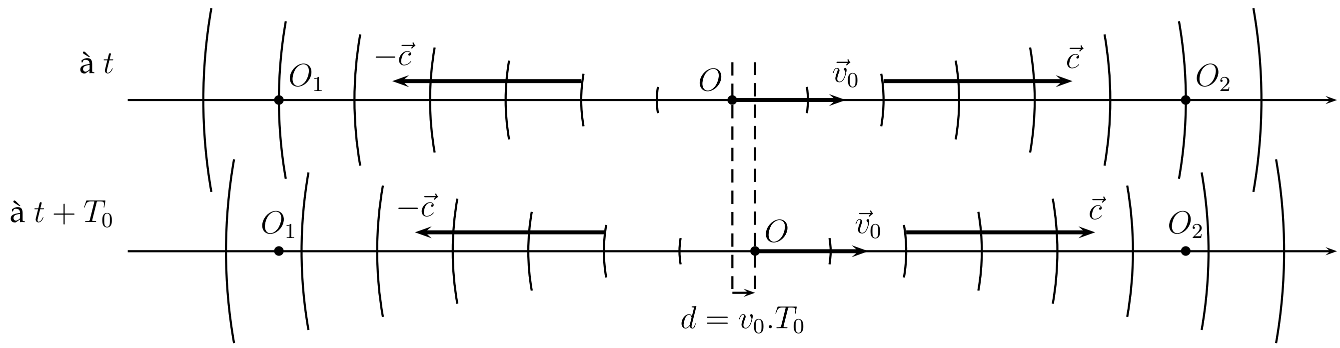
3. Par définition, $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a\omega\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + h\omega\frac{d\vec{e}_z}{dt} = -a\omega^2\vec{e}_r$.
$\vec{a}(M/\mathcal{R})$ est dirigé les I le projeté de M sur l'axe Oz.
On remarque que $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(H/\mathcal{R})$

Exercice 4 : Effet Doppler
Un véhicule de pompiers roule à la vitesse constante v_0, en émettant un son que l'on modélisera par une série de bips sonores de fréquence f_0.

1. Quel est l'intervalle de temps qui sépare deux bips pour un pompier à bord du véhicule ?
2. Même question pour un observateur lié au sol et duquel s'éloigne le véhicule (durée T). En déduire la fréquence des impulsions sonores perçues par cet observateur (fréquence f).
3. Même question pour un observateur lié au sol et vers lequel se dirige le véhicule (toujours à la vitesse v_0) : T' et f'.

Données ; célérité du son : $c \simeq 340$ m.s^{-1}, $v_0 = 100$ km.h^{-1} et $f_0 = 400$ Hz.

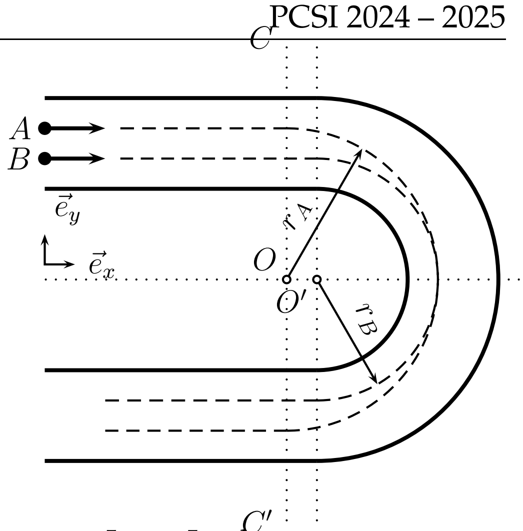
1. Pour un pompier O lié au véhicule, tout se passe comme si ce dernier était immobile et par définition de la fréquence $T_0 = \frac{1}{f_0} = 2{,}5$ ms.
2. Pour un observateur O_1 duquel le véhicule s'éloigne, on représente la situation à un instant t puis à $t + T_0$. Les ondes sonores représentées se déplacent à la célérité c et le véhicule à la vitesse $\vec{v}_0$.



Entre t et $t + T_0$, le véhicule s'est éloigné de $d = v_0.T_0$. Cette distance sera parcourue par l'onde sonore en un temps $\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{v_0}{c}T_0$.
Finalement, l'observateur ne percevra deux ondes sonores successive qu'après la période $T = T_0 + \Delta t = T_0[1 + \frac{v_0}{c}]$ d'où une fréquence $f = \frac{f_0}{1+v_0/c} \simeq 370$ Hz : son plus grave.

3. Si le véhicule se dirige vers l'observateur O_2, la durée entre la réception de deux ondes sonores successives sera maintenant $T' = T_0 - \Delta t = T_0[1 - \frac{v_0}{c}]$ d'où une fréquence $f = \frac{f_0}{1-v_0/c} \simeq 435$ Hz : son plus aigu.

Exercice 5 : Virage large ou serré ?

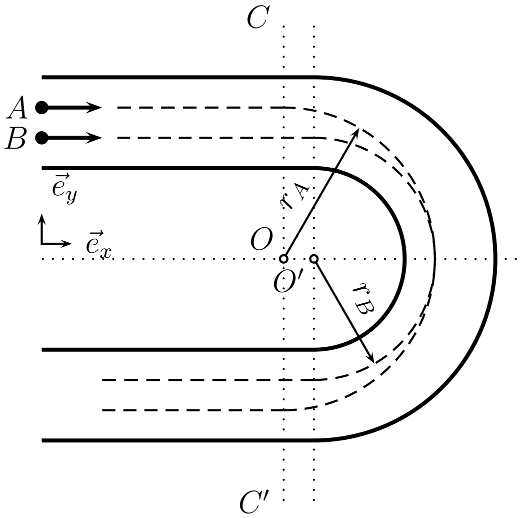


Lors d'un grand prix, deux voitures (A et B), arrivent en ligne droite, coupent l'axe CC' au même instant et prennent le virage de deux manières différentes :

- la voiture A suit une trajectoire circulaire de centre O et de rayon $r_A = 90$ m
- la voiture B négocie le même virage sur une trajectoire circulaire de centre O' et de rayon $r_B = 75$ m.

On appelle $\mathcal{R}$ le référentiel $(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$. Le but de l'exercice est de déterminer laquelle des deux voitures sortira en premier du virage en coupant à nouveau l'axe CC'.

1. Déterminer littéralement puis numériquement les longueurs L_A et L_B des trajectoires des deux voitures. Peut-on conclure ?
2. On suppose que les deux voitures roulent à des vitesses v_A et v_B constantes pendant tout le virage. Déterminer ces vitesses pour que dans les virages, les accélérations des deux voitures restent inférieures à $0{,}8g$ avec g la constante de pesanteur (au delà de cette limite, elles dérapent et finissent leur route dans les graviers). Faire les applications numériques.
3. Conclure.



1. Pendant tout le virage, A suit une trajectoire circulaire. Elle parcourt le demi cercle de rayon r_A d'où $L_A = \pi r_A$. La voiture B parcourt la distance $r_A - r_B$ en ligne droite avant d'aborder son demi cercle de rayon r_B, elle parcourt ensuite à nouveau $r_A - r_B$ en ligne droite. On a ainsi $L_B = 2(r_A - r_B) + \pi r_B$.
   Les applications numériques conduisent à $L_A \simeq 283$ m et $L_B \simeq 266$ m.
   B parcourt une distance plus courte mais il faut calculer sa vitesse pour pouvoir conclure.
2. Sur la portion circulaire des trajectoires, pour chaque véhicule et dans la base polaire, on a $\vec{v} = v.\vec{e}_\theta$ comme v est constante, $\vec{a} = v.\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -v\dot{\theta}.\vec{e}_r$ avec $v = r\dot{\theta}$ d'où $\vec{a} = -\frac{v^2}{r}.\vec{e}_r$ et $a = \frac{v^2}{r}$.
   La limite d'adhérence impose $a \leqslant 0{,}8g \Rightarrow \frac{v^2}{r} \leqslant 0{,}8g \Rightarrow v \leqslant \sqrt{0{,}8gr}$

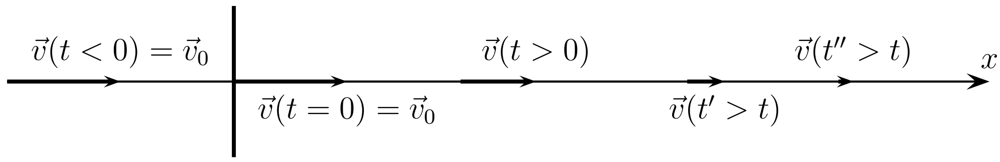
Pour la voiture A, on a donc au maximum $v_A = \sqrt{0.8gr_A}$ et $v_B = \sqrt{0.8gr_B}$ pour la voiture B (les pilotes prennent tous les risques !).
Les applications numériques donnent $v_A \simeq 95{,}7$ km.h^{-1} et $v_B \simeq 87{,}3$ km.h^{-1}.

3. Pour répondre à la question posée par l'exercice, il faut calculer le temps que va mettre chaque voiture pour franchir le virage.
   Pour la voiture A, qui parcourt L_A à v_A constante, on a $t_A = \frac{L_A}{v_A} = \frac{\pi r_A}{\sqrt{0.8gr_A}} = \frac{\pi\sqrt{r_A}}{\sqrt{0.8g}}$ et pour la voiture B on obtient de même $t_B = \frac{L_B}{v_B} = \frac{\pi r_B + 2(r_A - r_B)}{\sqrt{0.8gr_B}}$.
   Les applications numériques donnent $t_A \simeq 10{,}6$ s et $t_B \simeq 10{,}9$ s.
   Finalement, des deux trajectoires proposées ici, c'est celle de A qui est la meilleure (à ne tester que sur circuit !).

Exercice 6 : Détermination d'une loi horaire
Un mobile animé initialement d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$ constante, pénètre dans un milieu résistant dans lequel il est soumis à une accélération $\vec{a} = -kv^2\vec{i}$; k est une constante et $\vec{v}$ la vitesse instantanée.

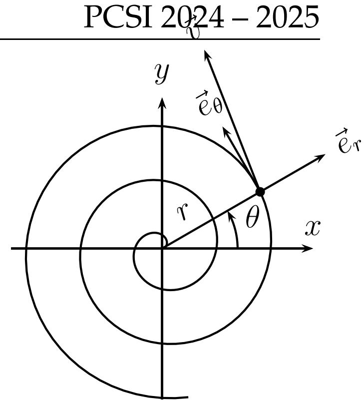
1. En prenant pour origine des temps et des espaces le moment où le mobile pénètre dans le milieu, établir la loi donnant $v(t)$. Vérifier l'homogénéité du résultat obtenu.
2. En déduire l'équation horaire du mouvement $x(t)$.
3. Déterminer l'expression de $v(x)$.

1. Comme le vecteur $\vec{a}$ est de sens opposé à celui du vecteur vitesse $\vec{v}$, on peut plutôt parler de décélération suivant l'axe Ox de vecteur directeur $\vec{i}$. Ainsi, le mobile garde une trajectoire rectiligne.
   On peut représenter la situation à différents instants :

   On a donc à tout instant $\vec{v} = v(t).\vec{i} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{i}$ et pour $t > 0$, $\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a} = -kv^2.\vec{i}$ d'où par identification, $\frac{dv}{dt} = -kv^2$.
   On est ainsi passé d'une équation vectorielle à une équation scalaire (projection selon Ox), reste à l'intégrer.
   On peut alors écrire l'équation précédente sous la forme $-\frac{dv}{v^2} = kdt$ et par intégration, $\frac{1}{v} = kt + C$ où C est une constante.
   On détermine ensuite C en utilisant la condition initiale $v(t=0) = v_0 \Rightarrow \frac{1}{v_0} = C$ d'où $\frac{1}{v} = kt + \frac{1}{v_0} = \frac{kv_0t+1}{v_0}$ et finalement,
   $$v = \frac{v_0}{1+kv_0t}$$
   Pour vérifier l'homogénéité, il faut commencer par déterminer la dimension de k.
   On utilise pour cela la relation $\vec{a} = -kv^2\vec{i}$ qui implique $[a] = [k].[v]^2 \Rightarrow [k] = [a][v]^{-2} = L.T^{-2}.(L.T^{-1})^{-2} = L^{-1}$: inverse d'une longueur.
   On a ainsi $[kv_0t] = L^{-1}.L.T^{-1}.T$ sans dimension et l'expression $\frac{v_0}{1+kv_0t}$ est bien homogène à une vitesse.
2. On en déduit $x(t)$ par intégration $\frac{dx(t)}{dt} = v = \frac{v_0}{1+kv_0t} \Rightarrow dx = \frac{v_0.dt}{1+kv_0t} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{k}\ln(1+kv_0t) + C'$ où C' est une constante.
   À $t = 0$, $x = 0 = \frac{1}{k}\ln(1+0) + C' \Rightarrow C' = 0$ et finalement
   $$x(t) = \frac{1}{k}\ln(1+kv_0t)$$
3. L'expression de $v(x)$ s'obtient en éliminant t dans les expressions précédentes.
   De $x(t)$, on tire $kx = \ln(1+kv_0t) \Rightarrow 1+kv_0t = e^{kx}$ et en réinjectant dans $v(t)$, on obtient $v(x) = \frac{v_0}{\exp(kx)} \Rightarrow v(x) = v_0e^{-kx}$.
   On remarque que v décroît exponentiellement en fonction de la profondeur dans le matériaux : décroissance exponentielle caractéristique d'un frottement fluide.

Exercice 7 : Spirale
Un mobile M parcourt avec une vitesse constante de norme v la spirale d'équation polaire $r = a\theta$ avec $a = Cte$.
Exprimer $\vec{v}$ la vitesse de M en fonction de θ et v dans la base polaire.



Dans le système de coordonnées polaires, on a donc $r = a\theta$ ce qui correspond à la trajectoire représentée ci-dessous.
Par ailleurs, dans ce système de coordonnées, on a $\vec{v} = \dot{r}.\vec{e}_r + r\dot{\theta}.\vec{e}_\theta = a\dot{\theta}.\vec{e}_r + a\theta\dot{\theta}.\vec{e}_\theta \Rightarrow v = \sqrt{a^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\theta}^2\theta^2} = a\dot{\theta}\sqrt{1+\theta^2}$
On en déduit $\dot{\theta} = \frac{v}{a\sqrt{1+\theta^2}}$ et finalement,

$$\vec{v} = \frac{v}{\sqrt{1+\theta^2}}(\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta)$$