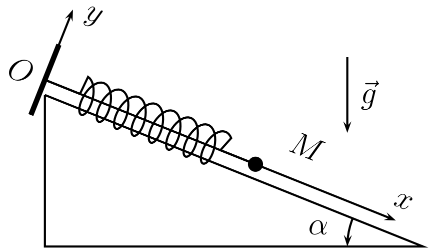
TRAVAUX DIRIGÉS DE M_2

Exercice 1 : Masse liée à un ressort sur un plan incliné

On considère un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et un point matériel M de masse m.

On néglige tout frottement.

Soit un axe Ox sur le plan incliné (voir figure).



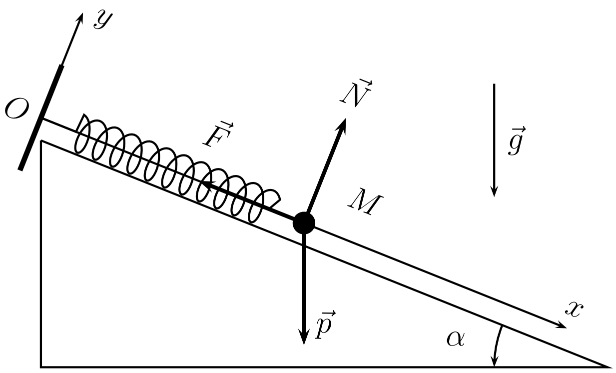
1. Déterminer l_e, la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de l_0, m, g, k et α.
2. À partir de la position d'équilibre M est déplacé d'une distance $d < l_e$ comptée algébriquement sur Ox et lâché sans vitesse initiale à $t = 0$.

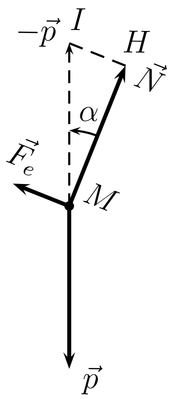
   Établir, pour $t \geqslant 0$, l'équation horaire du mouvement de M en fonction de d, k, m et l_e.

1. Étude statique. On va utiliser la première loi de Newton, ou principe d'inertie pour déterminer la longueur l_e du ressort à l'équilibre.

   Le référentiel utilisé est celui lié au sol et considéré comme galiléen. Le système d'axes est imposé par l'énoncé. On choisit le système { M } le point matériel. Les forces appliquées à ce système sont : le poids $\vec{p} = m.\vec{g}$, la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(l - l_0).\vec{e}_x$ ici et la réaction du support $\vec{R} = \vec{N}$ normale au support car il n'y a pas de frottement.

   On représente ces forces sur la figure ci-dessous à gauche.

   Comme on se place à l'équilibre ($\vec{F} = \vec{F}_e$), la somme vectorielle des forces appliquées est nulle : $\vec{p} + \vec{F}_e + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e + \vec{N} = -\vec{p}$.

   En se reportant à la figure ci-dessus à droite, dans le triangle IHM, on peut écrire $\sin\alpha = \frac{F_e}{p}$ (on s'arrange pour ne pas faire apparaître la norme N de $\vec{N}$ qu'on ne connaît pas).

   On fait ensuite apparaître l_e dans $F_e = ||\vec{F}_e|| = k(l_e - l_0) > 0$ et comme $p = ||\vec{p}|| = mg$, on en déduit $\sin\alpha = \frac{k(l_e - l_0)}{mg} \Rightarrow l_e = l_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha$.

2. Étude dynamique : on s'attend à observer des oscillations de M autour de la position d'équilibre précédente. Hors équilibre, c'est la seconde loi de Newton i.e le principe fondamental de la dynamique (PFD) qui s'applique.

   En conservant le même référentiel et le même système, le PFD prend la forme : $m.\vec{a} = \vec{p} + \vec{F} + \vec{N}$ avec ici $\vec{F} = -k(l - l_0).\vec{e}_x$ et $l = x(t)$ dépendant du temps.

De façon à faire disparaître $\vec{N}$ dont on ne connaît pas la norme, on projette le PFD selon l'axe Ox. Dans la base $(\vec{e}_x;\vec{e}_y)$, on a $\vec{a} = \ddot{x}(t).\vec{e}_x + \ddot{y}(t).\vec{e}_y$, $\vec{p} = +mg\sin\alpha\vec{e}_x - mg\cos\alpha\vec{e}_y$; $\vec{N} = N\vec{e}_y$ et enfin $\vec{F} = -k(x(t) - l_0).\vec{e}_x$. On en déduit l'équation différentielle

$$m\ddot{x}(t) = +mg\sin\alpha - kx(t) + kl_0 \Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}(l_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha) = \frac{kl_e}{m}$$

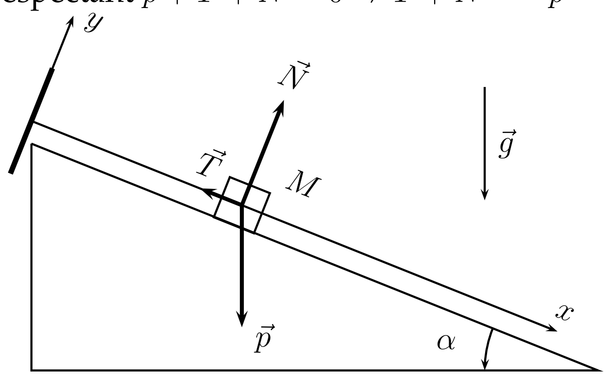
On écrit cette équation sous la forme canonique $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 l_e$.
La solution est de la forme $sol = sol_H + sol_P$ soit ici $x(t) = A.\cos\omega_0 t + B.\sin\omega_0 t + l_e$.
Reste à déterminer les constantes d'intégration A et B (homogène à des distances) par utilisation des conditions initiales.
À $t = 0^-$, on a $l = x(0^-) = l_e + d$ et $\dot{x}(0^-) = 0$ la position et la vitesse de M ne peuvent pas subir de discontinuité. On en déduit $x(0^+) = l_e + d \Rightarrow l_e + d = A + l_e \Rightarrow A = d$ et $\dot{x}(0^+) = 0 = 0 + \omega_0.B + 0 \Rightarrow B = 0$.
Et finalement $x(t) = l_e + d\cos\omega_0 t$.
On retrouve donc bien un mouvement rectiligne sinusoïdal avec $l_e - d \leqslant x(t) \leqslant l_e + d$.

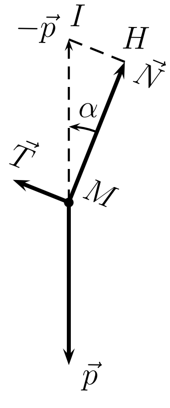
Exercice 2 : Glissement d'un objet sur un plan incliné
Soit un objet de centre d'inertie M et de masse m posé sur un plan incliné qui fait l'angle α avec l'horizontale. On note f_0 le cœfficient de frottement statique et f le cœfficient de frottement dynamique.
On rappelle que d'après les lois de Coulomb sur le frottement solide, si on décompose la réaction du support $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ où $\vec{T}$ est la réaction tangentielle et $\vec{N}$ la réaction normale, $T < f_0 N$ au repos et $T = f.N$ lors du glissement.

1. Pour quelle valeur α_0 de α l'objet va-t-il commencer à glisser sur le plan incliné (mouvement de translation) ?
2. Étudier le mouvement ultérieur, $x(t)$ où x est le déplacement de l'objet sur le plan incliné.

1. On se place dans le référentiel galiléen lié au sol, le système étudié est le point matériel M. Pour plus de simplicité, on raisonne dans le cas où le système est encore à l'équilibre sous l'action des forces qui lui sont appliquées.
Bilan des forces (Cf fig ci-dessous à gauche) :
   - le poids $\vec{p} = m.\vec{g}$,
   - la réaction du support $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ en décomposant la réaction normale $\vec{N}$ et la réaction tangentielle $\vec{T}$.

   Dans le cas considéré, d'après le principe d'inertie (ou première loi de Newton), la somme vectorielle de ces forces est nulle. On représente ces trois forces sur la figure ci-dessous à droite en respectant $\vec{p} + \vec{T} + \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{T} + \vec{N} = -\vec{p}$





Dans le triangle MIH obtenu, rectangle en H, on peut écrire $\tan\alpha = \frac{T}{N}$ or d'après les lois de Coulomb, il n'y a pas de glissement tant que $T < f_0 N \Rightarrow \frac{T}{N} = \tan\alpha < f_0$.

On en déduit que l'angle limite d'adhérence est $\alpha_0 = \arctan f_0$.

2. Pour $\alpha \geqslant \alpha_0$, le mobile se met en mouvement et on appliquera plutôt la seconde loi de Newton.

   Le référentiel, le système et les forces qui lui sont appliquées restent identiques mais l'accélération $\vec{a}$ n'est plus nulle : $m.\vec{a} = \vec{p} + \vec{T} + \vec{N} \neq \vec{0}$

   Comme le mobile se déplace selon un axe (mouvement de translation), on a intérêt à travailler par projection suivant le système d'axes (Oxy) avec O la position initiale de M, Ox selon le plan incliné et Oy normal à Ox.

   On a alors $\vec{a} = \ddot{x}(t).\vec{e}_x$ et pour les forces, en s'aidant de la figure, $\vec{T} = -T.\vec{e}_x$, $\vec{N} = N.\vec{e}_y$ et $\vec{p} = mg\sin\alpha.\vec{e}_x - mg\cos\alpha.\vec{e}_y$.

   On peut écrire le principe fondamental de la dynamique (PFD) sous la forme $-T.\vec{e}_x + N.\vec{e}_y + mg\sin\alpha.\vec{e}_x - mg\cos\alpha.\vec{e}_y = m\ddot{x}(t)\vec{e}_x$

   Par projection selon $\vec{e}_x$, on obtient $-T + mg\sin\alpha = m\ddot{x}(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = -\frac{T}{m} + g\sin\alpha$.

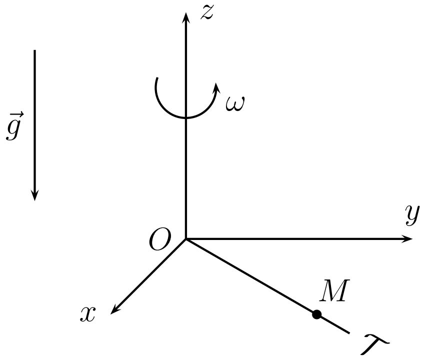
   Pour éliminer l'inconnue T, on utilise ensuite la relation $T = f.N$ (loi de Coulomb sur le glissement solide) et la projection du PFD selon $\vec{e}_y$, soit $0 + N - mg\cos\alpha = m\ddot{y}(t) = 0$ car pas de mouvement selon $\vec{e}_y$. On en déduit $N = mg\cos\alpha \Rightarrow T = fmg\cos\alpha$.

   En remplaçant, on obtient $\ddot{x}(t) = -fg\cos\alpha + g\sin\alpha \Rightarrow \dot{x}(t) = g(\sin\alpha - f.\cos\alpha)t + v_0$ où v_0 est la valeur initiale de $\dot{x}$, c'est à dire $v_0 = 0$.

   Puis par intégration $x = \frac{g}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2 + x_0 = \frac{g}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2$.

   Remarque : il s'agit d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Exercice 3 : Coulissement sur une tige en rotation

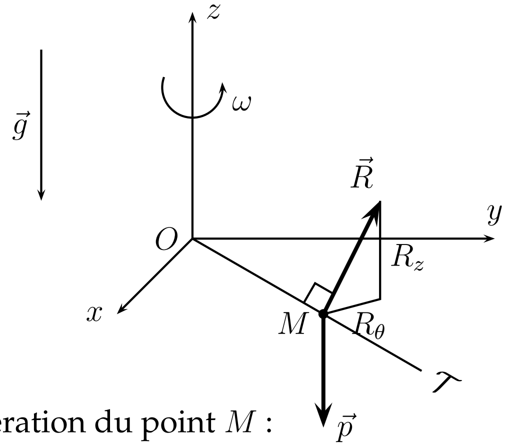


Une tige $\mathcal{T}$ horizontale passant par O tourne autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω constante.
Un point matériel M de masse m peut coulisser sans frottement sur la tige. Il est repéré par ses coordonnées polaires (r,θ) dans le plan (Oxy).
À l'instant $t = 0$, le point M est abandonnée sans vitesse initiale par rapport à la tige à la distance r_0 de l'origine O ; on a donc

$$r(t = 0) = r_0 \text{ et } \dot{r}(t = 0) = 0$$

On suppose de plus qu'à ce même instant, la tige est confondue avec l'axe (Ox) : $\theta(t = 0) = 0$.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique en projection dans la base cylindrique $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.
2. En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $r(t)$.
3. Déterminer la loi horaire $r(t)$ en fonction de r_0 et ω. Tracer l'allure de $r(t)$ pour $t \geqslant 0$.
4. Reprendre la question précédente pour la trajectoire $r(\theta)$.



1. On travaille ici dans le référentiel local $\mathcal{R}(O,Ox,Oy,Oy)$ supposé galiléen.
   Le système { point matériel M } est soumis à
   - son poids $\vec{p} = m\vec{g} = -mg.\vec{u}_z$
   - la réaction de l'axe $\vec{R} = \vec{R}_N$ normale à la tige puisqu'on néglige tout frottement. Cela signifie qu'elle ne comporte pas de composante radiale (voir figure) et qu'elle s'écrit ainsi $\vec{R} = R_\theta.\vec{u}_\theta + R_z.\vec{u}_z$.

   Par ailleurs, on retrouve rapidement l'expression de l'accélération du point M :

   $$\vec{OM} = r.\vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}.\vec{u}_r + \dot{r}(\dot{\theta}.\vec{u}_\theta) + \dot{r}\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\dot{\theta}(-\dot{\theta}.\vec{u}_r)$$

   et avec $\dot{\theta} = \omega$ la vitesse angulaire constante ici, on aboutit à $\vec{a} = (\ddot{r} - \omega^2 r).\vec{u}_r + 2\omega\dot{r}.\vec{u}_\theta$
   On peut ainsi écrire le principe fondamental de la dynamique sous la forme :

   $$m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R} \Rightarrow m[(\ddot{r} - \omega^2 r).\vec{u}_r + 2\omega\dot{r}.\vec{u}_\theta] = -mg.\vec{u}_z + R_\theta.\vec{u}_\theta + R_z.\vec{u}_z$$

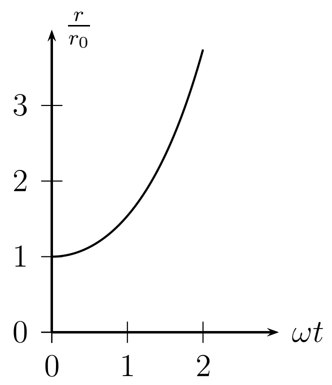
2. Par projection selon $\vec{u}_r$ de l'équation vectorielle précédente on obtient l'équation différentielle en $r(t)$:

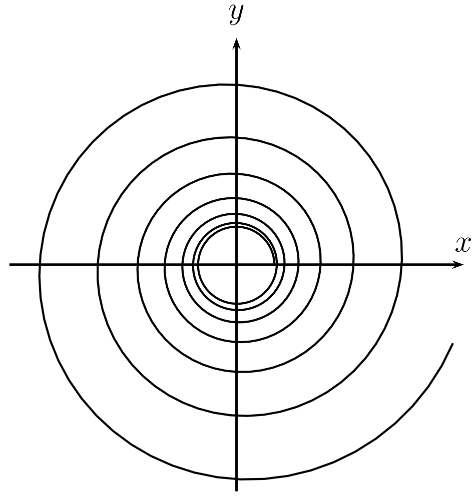
   $$m(\ddot{r} - \omega^2 r) = 0 \Rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r$$

   Remarque : la projection du PFD selon $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_\theta$ permet d'obtenir $R_z = mg$ et $R_\theta = 2\omega\dot{r}$.
3. La solution de l'équation différentielle du second ordre, à coefficients constants, de signes **différents** en $r(t)$ est de la forme $r(t) = A.\exp(\omega t) + B.\exp(-\omega t)$ où A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales :

$$\left| \begin{array}{l} r(0) = r_0 \\ \dot{r}(0) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{ll} A + B = r_0 & (1) \\ \omega A - \omega B = 0 & (2) \end{array} \right. \text{ et (1)+(2)}/\omega \Rightarrow 2A = r_0 \text{ soit } A = \frac{r_0}{2} = B$$

On en déduit finalement $r(t) = \frac{r_0}{2}[\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)] = r_0 \cosh(\omega t)$ (fonction cosinus hyperbolique) : $r(t)$ diverge.





4. Comme $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$, on en déduit $\theta = \omega t + 0$ en considérant $\theta(0) = 0$ et ainsi $r(t) = r_0 \cosh \theta$. La trajectoire est donc une spirale exponentielle.

Exercice 4 : Autour du pendule

On considère un pendule simple constitué d'un fil inextensible, de longueur l, de masse négligeable, fixé en O et auquel on a accroché une petite bille de masse m assimilable à un point matériel M.

O est fixe dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ galiléen.

1. Étude statique : dans un premier temps, on accroche à M un ressort horizontal de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide d_0.

   À l'équilibre dans $\mathcal{R}$, la longueur du ressort prend la valeur d quand le fil s'écarte de l'angle θ_0 par rapport à la verticale tout en restant dans le plan Oyz (figure 1).

   En déduire l'expression de m en fonction des autres données.

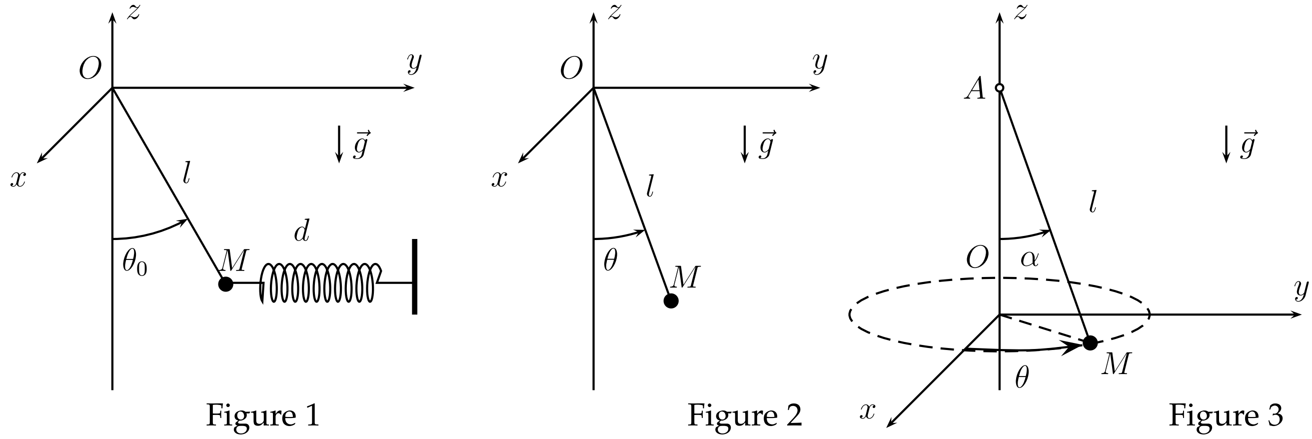


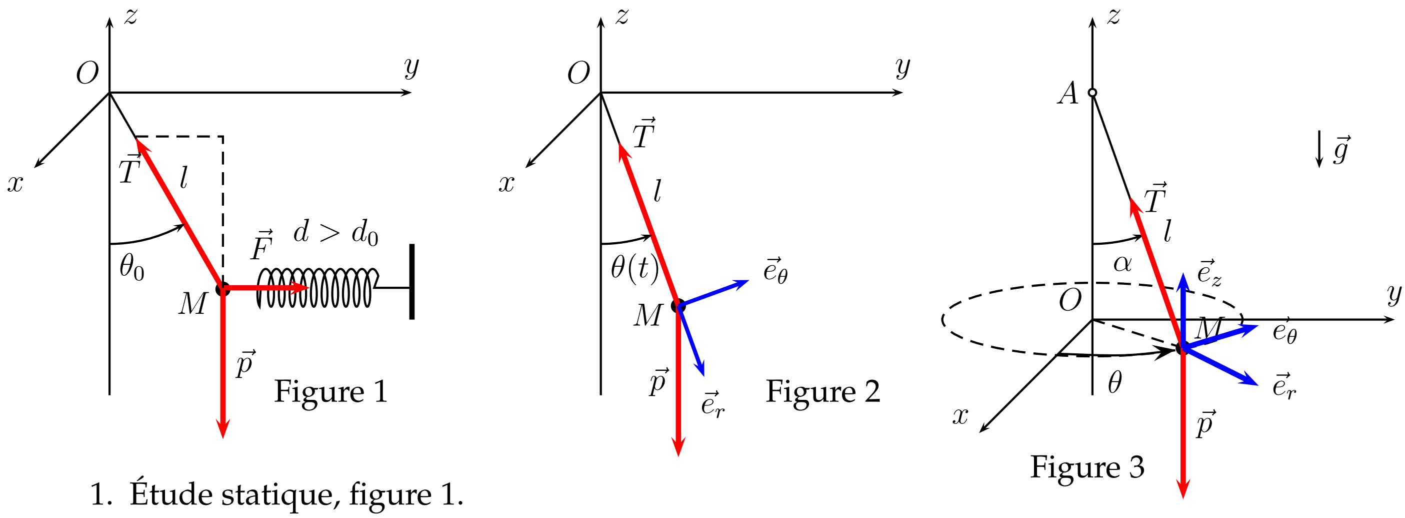
Figure 1 Figure 2 Figure 3

2. Première étude dynamique : à l'instant initial, le ressort se détache de M (figure 2.).
   (a) Établir l'équation différentielle reliant θ à ses dérivées temporelles (on néglige tout frottement).
   (b) En déduire $\theta(t)$ pour les petites oscillations ($\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$).

(c) Exprimer la tension du fil en fonction du temps toujours dans le cas des petites oscillations.

3. Autre type de mouvement : le fil est accroché en A et le point matériel M, tourne maintenant dans le plan xOy avec une vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\theta}$ autour de l'axe OA (figure 3) $\alpha = Cte$ étant l'angle que forme AM avec la verticale.

   Calculer la tension du fil T puis l'angle α en fonction de m, g, l et ω, montrer que ω doit respecter une certaine condition.



1. Étude statique, figure 1.

   On considère le système { M } à l'équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

   D'après la première loi de Newton (ou principe d'inertie), la somme vectorielle des forces appliquées au système est nulle.

   Dans le triangle rectangle représenté en pointillés sur la figure, on peut lire $\tan\theta_0 = \frac{F}{p}$ avec $F = ||\vec{F}|| = k(d - d_0) > 0$ et $p = ||\vec{p}|| = mg$ d'où $\tan\theta_0 = \frac{k(d-d_0)}{mg} \rightarrow m = \frac{k(d-d_0)}{g.\tan\theta_0}$

2. Première étude dynamique : mouvement circulaire, plan et oscillatoire, figure 2.

   (a) Pour établir l'équation différentielle du mouvement, on utilise la seconde loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique, PFD).

   On garde le même système et le même référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

   Le bilan des forces se limite maintenant au poids $\vec{p} = m\vec{g}$ et à la tension du ressort $\vec{T}$.

   Par application du PFD, on peut donc écrire $m\vec{a} = \vec{p} + \vec{T}$ où $\vec{a}$ est l'accélération du point M dans $\mathcal{R}$.

   Vu le type de mouvement, le plus simple est d'adopter la base polaire $(\vec{e}_r; \vec{e}_\theta)$ dans laquelle

   $\vec{OM} = l.\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = l\dot{\theta}(t).\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = l\ddot{\theta}(t).\vec{e}_\theta - l\dot{\theta}^2(t).\vec{e}_r$.

   Dans cette même base, on a $\vec{T} = -T.\vec{e}_r$ et $\vec{p} = mg\cos\theta(t).\vec{e}_r - mg\sin\theta(t).\vec{e}_\theta$.

   Comme on ne connaît pas T, on projette le PFD selon $\vec{e}_\theta$ pour obtenir

$$ml\ddot{\theta}(t) = -mg\sin\theta(t) \Rightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0$$

   (b) Dans le cas des petites oscillations, pour tout t, $\theta(t) \ll 1$ rad, $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

   On peut donc linéariser l'équation précédente qui devient $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0$

   $\Rightarrow \ddot{\theta}(t) + \omega_0^2\theta(t) = 0$ sous la forme canonique avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

La solution de cette équation set de la forme $\theta(t) = A.\cos\omega_0 t + B.\sin\omega_0 t$ où A et B sont des constantes d'intégration à déterminer à l'aide des conditions initiales $\theta(0^-) = \theta_0 = \theta(0^+) = A$ et $v(0^-) = 0 = v(0^+) = l.\dot{\theta}(0^+) = 0 - \omega_0.B \Rightarrow B = 0$.

On en déduit finalement $\theta(t) = \theta_0.\cos\omega_0 t$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

(c) Pour faire apparaître T dans les équations, on utilise la projection du PFD selon $\vec{e}_r$. On obtient ainsi $-ml\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta$ avec $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 - \frac{\theta_0^2}{2}\cos^2\omega_0 t$ et $\dot{\theta}^2 = [-\omega_0.\sin\omega_0 t]^2 = \frac{g}{l}(1-\cos^2\omega_0 t)$

$$\Rightarrow T = ml\frac{g}{l}(1-\cos^2\omega_0 t) + mg(1 - \frac{\theta_0^2}{2}\cos^2\omega_0 t) = mg\left[1 - \theta_0^2(1 - \frac{3}{2}\cos^2\omega_0 t)\right]$$

3. Autre type de mouvement : circulaire uniforme, pendule conique, figure 3.

On conserve le même système { M } étudié dans le même référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Le système est soumis aux mêmes forces $\vec{p}$ et $\vec{F}$ que dans la question précédente mais des conditions initiales différentes (vitesse initiale normale au plan vertical contenant le fil) ont entraîné l'apparition d'un mouvement circulaire de rayon $r = OM = l\sin\alpha$ constant.

On a toujours $m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R}$ et par projection dans la base cylindro-polaire représentée figure 3, on a maintenant $\vec{OM} = r.\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = r\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = r\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2.\vec{e}_r$ avec $r = l\sin\alpha$.

De même, on décompose $\vec{p} = -mg.\vec{e}_z$ et $\vec{T} = -T\sin\alpha.\vec{e}_r + T\cos\alpha\vec{e}_z$.

Par projection du PFD selon $\vec{e}_r$, on obtient $-mr\dot{\theta}^2 = -ml\sin\alpha\omega^2 = -T\sin\alpha \Rightarrow T = ml\omega^2$.

Et selon $\vec{e}_z$, on obtient $0 = -mg + T\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}$.

Pour que α soit défini, il faut $\frac{g}{l\omega^2} \leqslant 1 \rightarrow \omega \geqslant \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Remarque : par projection du PFD selon $\vec{e}_\theta$, on obtient $mr\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \omega$ constante, on a bien affaire à un mouvement circulaire uniforme : MCU.

Exercice 5 : Mouvement d'une barque

✍ Deux personnes de même masse m sont assises dans une barque de masse M immobile sur un lac calme. L'une des deux se lèvent et va s'assoir à coté de l'autre. Expliquer pourquoi la barque bouge et de quelle distance (on supposera que la barque reste horizontale et qu'à ces vitesses le frottement avec l'eau est négligeable)

Attention, moins facile qu'à première vue, il faut bien faire un schéma !

les forces extérieures se compensent (poids et poussée d'Archimède) donc le centre de masse du système ne bouge pas.

or

$$x_G = \frac{mx_1 + mx_2 + Mx_B}{m + m + M}$$

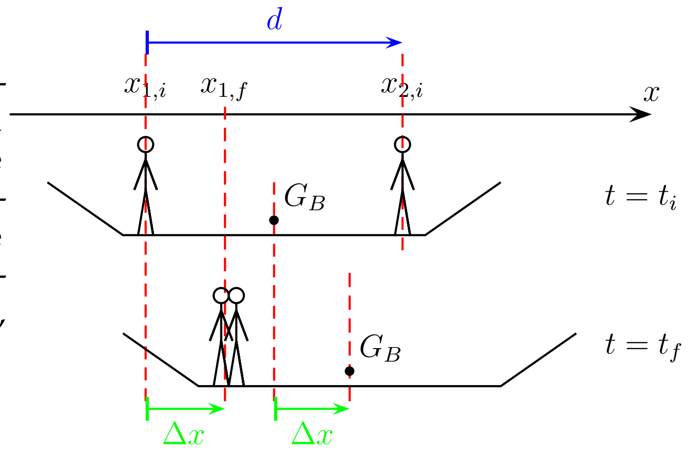
Initialement $x_2 = x_1 + d$, à la fin $x_{1,f} = x_{2,f}$, mais attention, la barque a bougé, donc la personne 1 aussi ! Si on appelle Δx la distance dont bouge la barque, alors $x_{1,f} = x_{1,i} + \Delta x = x_{2,f}$ et $x_{B,f} = x_{B,i} + \Delta x$

$$0 = x_{G,f} - x_{G,i} = \frac{mx_{1,f} + mx_{2,f} + Mx_{B,f} - (mx_{1,i} + mx_{2,i} + Mx_{B,i})}{m + m + M}$$

$$0 = \frac{m(x_{1,i} + \Delta x) + m(x_{1,i} + \Delta x) + M(x_{B,i} + \Delta x) - (mx_{1,i} + m(x_{1,i} + d) + Mx_{B,i})}{m + m + M}$$

$$0 = (2m + M)\Delta x - md \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2 + \frac{M}{m}}d$$

Homogène, bouge d'autant plus que la personne est lourde et d'autant moins que le bateau est lourd. Pour le sens, c'est l'opposé du sens de la personne (faire un schéma en mettant le battant avant et le bateau après l'un au dessus de l'autre pour bien montrer les différentes grandeurs). De plus, si le bateau est infiniment léger, on ne bouge « que » de $d/2$



Exercice 6 : Frottements quadratiques

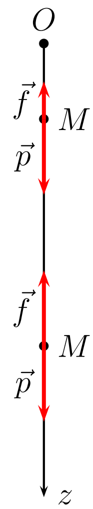
Un solide modélisé par un point matériel M de masse $m = 20$ kg est lâché sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur uniforme.

L'air exerce sur lui une force de frottement opposée à la vitesse et de norme $f = \alpha v^2$ ($\alpha > 0$).

1. On constate que le solide atteint au bout d'un certain temps une vitesse limite constante $v_l = 45$ m.s^{-1}. Calculer α (on précisera bien son unité).
2. Au bout de combien de temps cette vitesse est-elle atteinte à 0,1 % près ?

On posera $u = v/v_l$ et on rappelle que $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+u|}{|1-u|} + cte$.

1. Calcul de α.
   Une fois lâché, M suit une trajectoire verticale, il atteint une vitesse constante quand son accélération est nulle c'est à dire quand la résultante des forces qui lui sont appliquées est nulle.
   On choisit le référentiel lié au sol et considéré comme galiléen, le système est { le point M }.
   L'origine du repère est la position initiale de M, on travaille en coordonnées cartésiennes, d'axe Oz vertical descendant (Cf. figure ci-contre).
   Les forces appliquées sont le poids $\vec{p} = m\vec{g} = mg.\vec{e}_z$ et la force de frottement quadratiques $\vec{f} = -\alpha v.\vec{v} = -\alpha v^2.\vec{e}_z = -\alpha \dot{z}^2.\vec{e}_z$.
   Lorsque la vitesse est $\vec{v} = v_l.\vec{e}_z$ constante, le système est en mouvement rectiligne uniforme et par application de la première loi de Newton (ou principe d'inertie), on a $\vec{p} + \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow mg - \alpha v_l^2 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{mg}{v_l^2} = 9{,}7.10^{-2}$ N.m^{-2}.s^2 i.e kg.m^{-1}.



2. Avant d'atteindre la vitesse limite, par application de la seconde loi de Newton (principe fondamental de la dynamique : PFD), on a $m.\vec{a} = m.\ddot{z}.\vec{e}_z = \vec{p} + \vec{f}$ soit ici après projection selon $\vec{e}_z$, $m.\ddot{z} = mg - \alpha\dot{z}^2 = mg - mg\frac{\dot{z}^2}{v_l^2} \Rightarrow \ddot{z} = g(1 - \frac{\dot{z}^2}{v_l^2})$.
   Comme on aboutit ici à une équation différentielle non linéaire, les indications de l'énoncé sont les bienvenues : on pose $\frac{v}{v_l} = \frac{\dot{z}}{v_l} = u$ et $\ddot{z} = \frac{dv}{dt} = v_l.\frac{du}{dt}$ pour se ramener à l'équation

$$v_l.\frac{du}{dt} = g(1-u^2) \Rightarrow v_l.\frac{du}{1-u^2} = g.dt \Rightarrow \frac{1}{2}v_l.\ln\frac{1+u}{1-u} = gt \Rightarrow t = \frac{v_l}{2g}\ln\frac{1+u}{1-u}$$

Et en prenant $v = \frac{99}{100}v_l \iff u = 0{,}99$, on obtient $t = 17{,}4$ s.

Exercice 7 : Chute avec frottements fluides

Une petite goutte d'eau tombant dans l'atmosphère est soumise à l'action de son poids $\vec{p}$ et une force de frottements fluides dus à l'air $\vec{f} = -k\vec{v}$ (on néglige la poussée d'Archimède).

En atmosphère très calme, on considère la vitesse initiale de la goutte nulle.

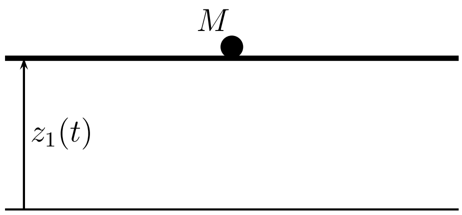
1. Écrire l'équation différentielle en $\vec{v}$ du mouvement de la goutte.
2. Représenter le portrait de phase avec pour variable v_z et $\dot{v}_z$ les composantes selon z de la vitesse et de l'accélération.
3. Montrer qu'elle atteint une vitesse limite $\vec{v}_l$ que l'on exprimera en fonction de k et $\vec{g}$.
   En déduire la valeur de k.
4. Trouver l'expression de $\vec{v}(t)$.
5. Calculer la durée de chute pour que la vitesse limite soit atteint à 10^{-n} près. Faire l'application numérique pour $n = 2$.

Données numériques : $m = 10^{-6}$ kg ; $g = 9{,}81$ m.s^{-2} ; $v_l = ||\vec{v}_l|| = 5.10^{-3}$ m.s^{-1}.

1. $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g}$ avec $\tau = \frac{m}{k}$. 2. $\vec{v}_l = \tau\vec{g}$ d'où $k = 1{,}96.10^{-3}$ kg.s^{-1}. 3. $\vec{v}(t) = \vec{v}_l(1 - \exp -\frac{t}{\tau})$. 4. $t = n\tau \ln 10 = 2{,}35$ ms pour $n = 2$.

Exercice 8 : Masse posée sur un plateau oscillant

Un plateau horizontal est animé d'un mouvement de translation verticale ($g = 9{,}81$ m.s^{-2}) rectiligne et sinusoïdal (imposé par un moteur) décri par l'équation $z_1 = A\cos\omega t$ avec $A = 10$ cm.
Un petit palet M est posé à $t = 0$ sur le plateau, sa masse m est assez faible pour ne pas modifier le mouvement du plateau.



1. En supposant que le palet reste au contact du plateau, faire le bilan des forces appliquées au palet et expliciter une condition sur N, la norme de la réaction du plateau, qui exprime que le palet reste en contact avec le plateau.
2. Calculer, littéralement et numériquement, la fréquence critique ν_0 au dessous de laquelle le contact est maintenu pour toute valeur de t.
3. Le mouvement imposé au plateau est tel que $\nu = 2\nu_0$. Partant de $t = 0$, décrire l'évolution $z_2(t)$ de la cote du palet en supposant que les éventuels chocs entre le palet et le plateau sont parfaitement mous (pas de rebond). On tracera qualitativement l'allure de $z_2(t)$.

1. PFD $\rightarrow N = m(\ddot{z}_1 + g) > 0$. 2. $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}} \simeq 1{,}58$ Hz. 3. Parabole de $t = 0$ à $t_1 = 190$ ms, contact avec le plateau jusqu'à $t_2 = 250$ ms puis parabole ...

Exercice 9 : Parabole de sûreté

Une particule (projectile) est lancée depuis un point O pris pour origine des espaces et des temps. La vitesse initiale $\vec{v}_0$ fait avec l'horizontale de O un angle $\alpha > 0$.

1. Établir l'équation de la trajectoire.
2. Déterminer les coordonnées du sommet S et la portée OB, les dates T_S et t_B auxquels sont atteints les points S et B.
3. Montrer que l'ensemble des points de l'espace que l'on peut atteindre dans les conditions précédentes est située sous une courbe dont on établira une équation en $\tan\alpha$.

1. $z = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha$. 2. $x_S = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha$, $x_B = 2x_S$. 3.