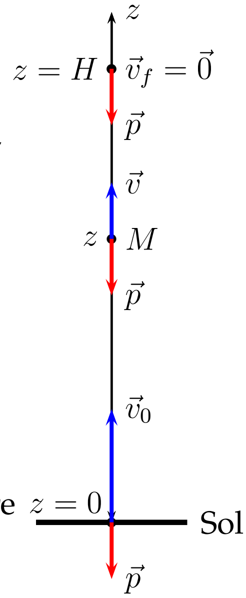
TRAVAUX DIRIGÉS DE M_3

Exercice 1 : Tir vertical

Un obus est lancé depuis le sol, selon la verticale ascendante avec une vitesse initial $\vec{v}_0 = v_0.\vec{e}_z$.
Quelle altitude maximale H va-t-il atteindre ?
On utilisera une méthode énergétique et on négligera les frottements.



On a affaire ici à un problème à un degré de liberté : l'altitude z du projectile M.

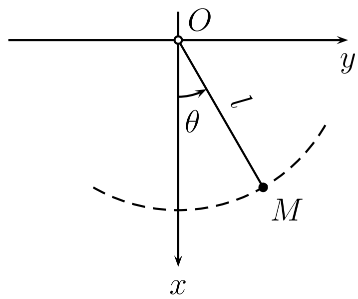
Une méthode énergétique semble donc plus indiquée que l'utilisation de la seconde loi de Newton (on principe fondamental de la dynamique) qui conduirait à une équation horaire $z(t)$, il faudrait ensuite déterminer t_1 l'instant auquel la vitesse s'annule en résolvant $v(t = t_1) = 0$ puis on calculerait $H = z(t_1)$.

Considérons le système { M } dans le référentiel lié au sol et considéré comme galiléen.
À $t = 0$, $v = v_0$ le projectile monte ensuite jusqu'à l'altitude H pour laquelle sa vitesse s'annule à l'instant t_1, il redescend ensuite.
La seule force appliquée au système est son poids.
Par application du théorème de l'énergie cinétique entre $t = 0$ et t_1, on peut écrire $\Delta E_c = W(\vec{p}) \Rightarrow E_c(t_1) - E_c(0) = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg.\Delta z = -mg(H - 0) < 0$
(le poids est constant et s'oppose au déplacement).
On en déduit $\frac{1}{2}.mv_0^2 = mgH \Rightarrow H = \frac{v_0^2}{2g}$

Comme le poids est une force conservative, on peut également utiliser le théorème de l'énergie mécanique. Ici, entre $t = 0$ et t_1, on a $\Delta E_m = W_{nc} = 0$ le travail des forces non conservatives.
En posant $E_p = E_{p,\text{pes}}$ nulle au niveau du sol (pour $z = 0$), on a $E_m(t = 0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = E_m(t_1) = 0 + mgH \Rightarrow H = \frac{v_0^2}{2g}$ également.

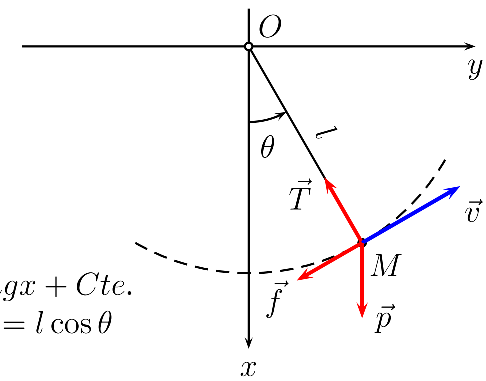
Exercice 2 : Pendule simple

On considère le pendule simple représenté ci-contre.



Le point matériel se déplace dans le plan vertical xOy.
Déterminer, par utilisation du théorème de la puissance mécanique, l'équation différentielle à laquelle obéit l'angle θ.
On considérera des frottements linéaires du type $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de M dans le référentiel lié au sol et considéré comme galiléen.

On a affaire ici à un problème à un degré de liberté : l'angle θ entre la verticale et le fil.



L'énoncé nous impose l'utilisation du théorème de la puissance mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc}$.
On calcule donc l'énergie mécanique E_m en fonction du paramètre θ et ses dérivées puis la puissance des forces non conservatives $\mathcal{P}_{nc}$.

Énergie mécanique du système { point matériel M } soumis :

- à son poids, force conservative qui dérive de $E_{p,\text{pes}} = -mgx + Cte$.
  Si on choisit $E_p(x) = 0$ pour $x = l$, $E_p = mg(l - x)$ avec $x = l\cos\theta$
  d'où $E_{p,\text{pes}}, = mgl(1 - \cos\theta)$;
- à la tension du fil $\vec{T}$ non conservative mais perpendiculaire au mouvement ;

- à la force de frottement $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ non conservative.

On en déduit $E_p = E_{p,\text{pes}} = mgl(1-\cos\theta)$.
On a ensuite $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ avec $\vec{v} = l\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$ d'où $v^2 = l^2\dot{\theta}^2$ et $E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$.
L'énergie mécanique est donc

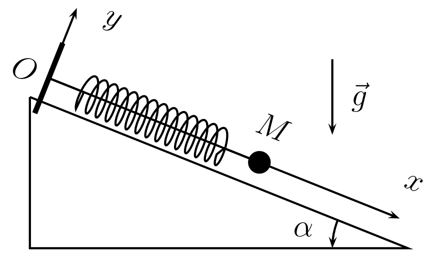
$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta$$

Puissance des forces non conservatives : $\mathcal{P}_{nc} = \mathcal{P}(\vec{T}) + \mathcal{P}(\vec{f}) = 0 + \vec{f}.\vec{v} = -\alpha.v^2 = -\alpha l^2\dot{\theta}^2$.
Par application du théorème de la puissance mécanique,

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc} \Rightarrow ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta = -\alpha l^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} = 0 \qquad \text{ou la solution triviale } \dot{\theta} = 0.$$

Exercice 3 : Système masse + ressort : discussion graphique

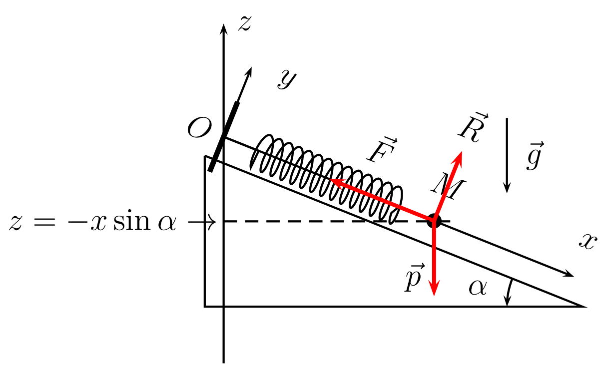
On accroche un point matériel M de masse m au bout d'un ressort situé sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On prendra le point $x = 0$ comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur et on supposera l'absence de tout frottement.
On donne $m = 200$ g, $l_0 = 30$ cm, $k = 10$ N.m^{-1}, $g = 10$ m.s^{-2} et $\alpha = 30°$.

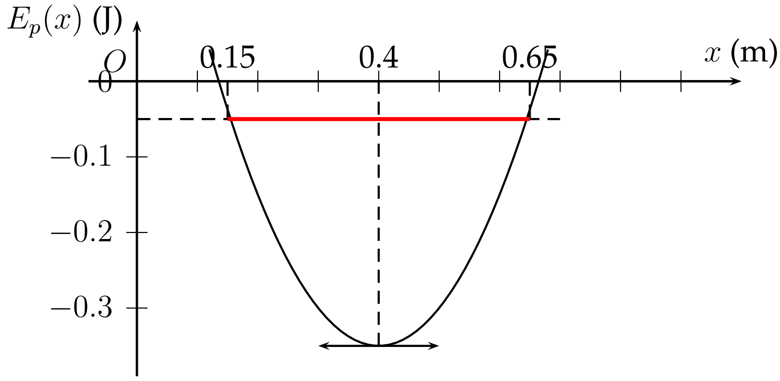


1. Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p de M en fonction des données et de x.
   Tracer la courbe $E_p(x)$.
2. On lâche M en $x = 20$ cm avec une vitesse vers le bas de 1 m.s^{-1}.
   En utilisant le graphe précédent, que peut-on dire du mouvement de M ?
3. À quelle abscisse s'immobilisera M si les frottements ne sont pas tout à fait nuls ?

1. Pour déterminer l'énergie potentielle E_p du point matériel M, il faut faire le bilan des forces qui lui sont appliquées, déterminer celles qui sont conservatives puis exprimer $E_p(x)$ où x est le paramètre. Bilan des forces :
   - Le poids $\vec{p} = m\vec{g}$ dérive de l'énergie potentielle $E_{p,\text{pes}} = \pm mg.z + Cte = +mgz$ avec $z = -x\sin\alpha$ d'après la figure ci-dessous.
   - La réaction du support $\vec{R} = \vec{N}$ car pas de frottements, normale au déplacement. $\vec{N}$ ne dérive d'aucune énergie potentielle mais ne travaille pas.
   - La force de rappel du ressort qui dérive de $E_{p,\text{éla}} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2$.

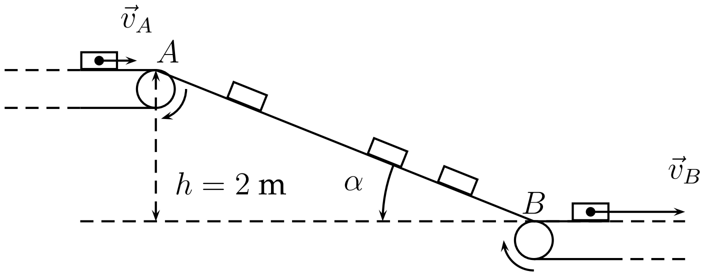
   On en déduit $E_p(x) = -mgx\sin\alpha + \frac{1}{2}k(x-l_0)^2$ et en passant à l'application numérique, $E_p(x) = 5(x-0.3)^2 - x$ J en exprimant x en m.



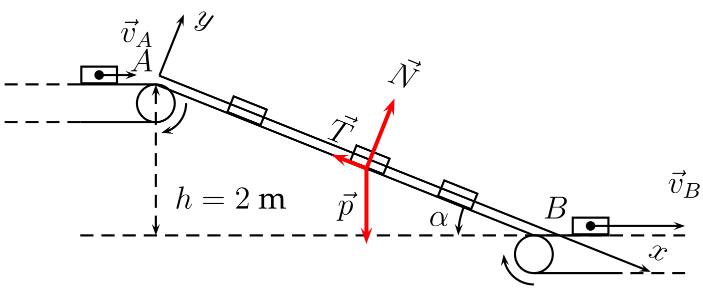


2. Comme le travail des forces non conservatives est nul, on a conservation de l'énergie mécanique $\Delta E_m = W_{nc} = W(\vec{R}) = 0$. Or $E_m = E_c + E_p(x)$ avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geqslant 0$ d'où $E_p(x) \leqslant E_m$ pour tout x ce qui nous permet d'effectuer une discussion graphique.
   À l'aide des conditions initiales, on calcule $E_m = Cte = E_m(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(x_0 - l_0)^2 - mgx_0 \sin\alpha = -0{,}05$ J.
   On remarque sur le graphe que pour $E_m = -0{,}05$ J, la condition $E_p(x) \leqslant E_m$ n'est vérifiée que pour 15 cm $\leqslant x \leqslant$ 65 cm : oscillations entre ces deux valeurs extrêmes, état lié.
3. Si on considère des frottements, l'énergie mécanique du système va diminuer (conversion de l'énergie mécanique en énergie thermique) jusqu'à l'immobilisation au fond du puits de potentiel (position d'équilibre stable quand $E_c = 0$), c'est à dire en $x = 40$ cm.

Exercice 4 : Au tri postal



On étudie un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal.
Les colis sont déchargés par un tapis roulant à la vitesse $v_A = 0{,}5$ m.s^{-1}, ils glissent ensuite sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale.
Le cœfficient de frottement solide entre les colis et le plan incliné est $f = 0{,}4$.
Ils sont ensuite pris en charge au niveau du point B par un nouveau tapis roulant qui avance à la vitesse $v_B = 0{,}2$ m.s^{-1}.
Déterminer l'expression puis la valeur de α pour que le convoyeur fonctionne correctement, c'est à dire pour que les colis arrivent en B avec la vitesse du deuxième tapis roulant.
On rappelle que suivant les lois de Coulomb sur les frottement solides, lors du glissement, $T = f.N$ où T et N sont respectivement les normes de la réaction tangentielle et normale du support.



Comme on a à faire intervenir la vitesse en A et en B, le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre ces deux points doit être la méthode à privilégier ici.
On choisit { un paquet modélisé par un point matériel M } comme système.
Le référentiel est celui lié au sol et considéré comme galiléen.
Les forces appliquées sur le paquet sont les suivantes :

- le poids $\vec{p}$ qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{p,\text{pes}} = \pm mg.z + Cte$. Son travail entre A et B est donc $W(\vec{p}) = -\Delta E_{p,\text{pes}} = +mg(z_A - z_B) = +mgh > 0$: il favorise le mouvement.
- la réaction $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ non conservative.
  Le travail de $\vec{N}$ est nul car $\vec{N}$ est normale au déplacement.
  Le travail de $\vec{T}$ est $W(\vec{T}) = \int_A^B \delta W(\vec{T})$ avec $\delta W(\vec{T}) = \vec{T}.d\vec{r}$ où $\vec{T} = -T.\vec{e}_x$ et $d\vec{r} = dx.\vec{e}_x$ le déplacement élémentaire. On en déduit $\delta W(\vec{T}) = -T.dx = -fNdx$ d'après la loi de Coulomb.
  Pour aller plus loin, il nous faut calculer N. Une méthode énergétique n'est plus adaptée car N ne travaille pas. Par projection du principe fondamental de la dynamique selon Oy normal au déplacement, on a $m\ddot{y} = 0 = N - mg\cos\alpha$ d'où $N = mg\cos\alpha$.
  On en déduit enfin $\delta W(\vec{T}) = -T.dx = -fNdx = -fmg(\cos\alpha)dx$ et
  $W(\vec{T}) = -\int_A^B fmg\cos\alpha dx = -fmg\cos\alpha(x_B - x_A) = -fmgL\cos\alpha$ où L est la longueur du plan incliné.
  Comme $\sin\alpha = \frac{h}{L} \Rightarrow L = \frac{h}{\sin\alpha}$, on a finalement $W(\vec{T}) = W(\vec{R}) = -\frac{fmgh}{\tan\alpha} < 0$: s'oppose au déplacement.

Appliquons maintenant le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B.

$$\Delta E_c = W(\vec{p}) + W(\vec{R}) \Rightarrow \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = mgh - \frac{fmgh}{\tan\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2fgh}{v_A^2 - v_B^2 + 2gh} \simeq 0{,}398 \Rightarrow \alpha \simeq 21{,}7\text{ř}$$

Exercice 5 : Molécule HCl

Une molécule HCl est modélisée par deux atomes : H et Cl, séparés par une distance r sur un axe supposé fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ d'origine Cl. L'atome H, assimilé à un point matériel de masse $m = 1{,}66.10^{-27}$ kg est en mouvement dans $\mathcal{R}_g$ sous l'action de forces dérivant d'une énergie potentielle

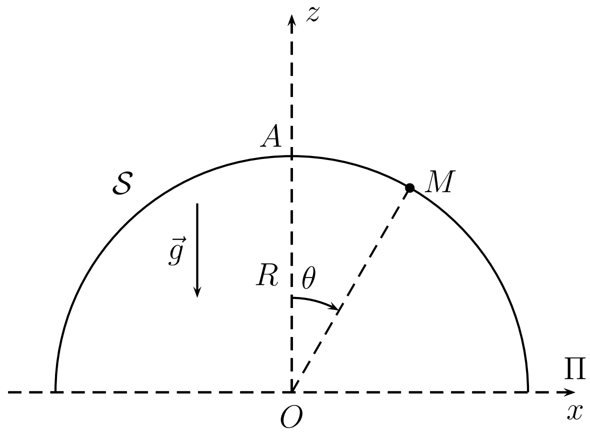
$$E_p = \frac{C}{r^{12}} - \frac{K}{r} \qquad \text{avec } C = 1{,}06.10^{-138}\ \text{J.m}^{12} \text{ et } K = 92{,}16.10^{-3}\ \text{J.m}$$

1. Tracer l'allure de $E_p(r)$ et indiquer, puis calculer la position d'équilibre r_0. Discuter la stabilité de la position d'équilibre r_0.
2. Quelle est l'énergie de dissociation de la molécule HCl ?
3. Déterminer la fréquence des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

1. $\frac{dE_p}{dr} = -\frac{12C}{r^{13}} + \frac{K}{r^2} = 0$ si $r = r_0 = (12C/K)^{1/11} \simeq 126{,}9.10^{-12}$ m et $(\frac{d^2E_p}{dr^2})_{r_0} \simeq 495{,}5$ J.m$^{-2} > 0$ donc l'équilibre est stable. 2. $E_d = 0 - E_p(r_0) \simeq 655.10^{-21}$ J $\simeq 4{,}16$ eV. 3. En posant $k = (\frac{d^2E_p}{dr^2})_{r_0}$, $\omega_O^2 = k/m$ et $T_0 = 2\pi/\omega_0 \simeq 87.10^{12}$ Hz (domaine IR).

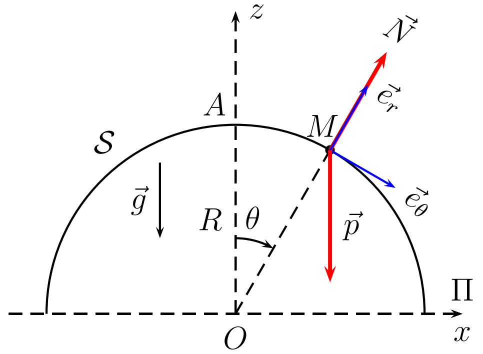
Exercice 6 : Esquimau sur son igloo

Un esquimau, assimilable à un point matériel M de masse m décide de faire du toboggan. Il s'abandonne sans vitesse initiale du sommet A de son igloo assimilable à une demi sphère $\mathcal{S}$ de rayon R et de centre O posée sur un plan Π. On considère que le glissement s'effectue sans frottement.



1. À la suite d'un déséquilibre infinitésimal, M se met en mouvement en restant dans le plan vertical Oxy.
   On admet que, dans la phase (1) de son mouvement, M reste en contact avec $\mathcal{S}$, sa position est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.
   Déterminer la vitesse de M en fonction de θ, g et R.
2. Exprimer N la norme de $\vec{N}$ la réaction de $\mathcal{S}$ sur M en fonction de m, g et θ.
3. En déduire la valeur θ_0 de θ pour laquelle M n'est plus en contact avec $\mathcal{S}$ (phase (2) du mouvement de M) et v_0 la valeur correspondante de v, la vitesse de M.
4. Quelle est la forme de la trajectoire ultérieure de M ?

On affaire ici à un système à un degré de liberté : θ.
On choisit { M } pour système et on travaille dans le référentiel galiléen lié au sol.



1. Pour déterminer la relation qui lie la vitesse v de M au paramètre θ, on peut utiliser le théorème de l'énergie cinétique ou celui de l'énergie mécanique.

   Les forces appliquées à M sont :

   Son poids $\vec{p} = m\vec{g}$ qui dérive de l'énergie potentielle $E_{p,\text{pes}} = \pm mgz + Cte = +mgz$ ici si on la considère nulle en $z = 0$.

   La réaction de $\mathcal{S}$, $\vec{R} = \vec{N}$ normale au déplacement, non conservative mais ne travaille pas.

   Le théorème de l'énergie mécanique implique $\Delta E_m = W_{nc} = 0$ le travail des forces non conservatives.

On a donc à tout instant $E_m = Cte$ et en particulier entre l'instant initial ($v_0 = 0$, $z_0 = R$) et un instant t quelconque (v,$z = R\cos\theta$) $E_m = \frac{1}{2}m.v_0^2 + mgz_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgz \Rightarrow 0 + mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta \Rightarrow v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$.

2. Comme le travail de $\vec{N}$ est nul, on ne peut plus utiliser de méthode énergétique. Vu le type de mouvement, on travaille maintenant dans la base polaire $(\vec{e}_r; \vec{e}_\theta)$.

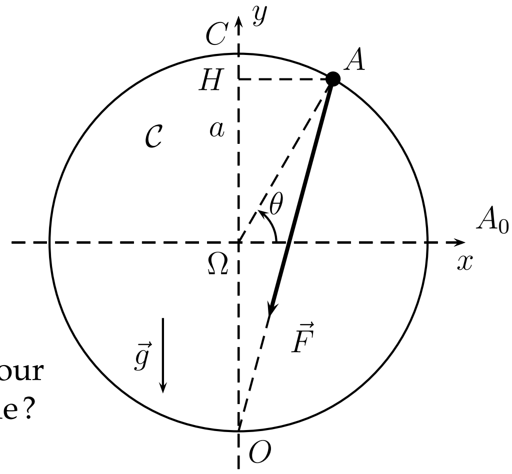
   Par application du principe fondamental de la dynamique (PFD), $m\vec{a} = \vec{p} + \vec{N}$ avec $\vec{a}$ l'accélération de M.

   Dans la base polaire, $\overrightarrow{OM} = R.\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = R\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta - R.\dot{\theta}^2.\vec{e}_r = R\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}.\vec{e}_r$, $\vec{N} = N.\vec{e}_r$ et $\vec{p} = -mg\cos\theta\vec{e}_r + mg\sin\theta\vec{e}_\theta$.

   Par projection du PFD selon $\vec{e}_r$, on obtient $-m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta \Rightarrow N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$.

   En reportant $v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$, on obtient $N = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2)$.
3. On considère qu'il n'y a plus de contact entre $\mathcal{S}$ et M lorsque N s'annule, c'est à dire pour $\theta = \theta_0$ tel que $0 = mg(3\cos\theta_0 - 2) \Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_0 = 48\,°$.
4. M suit ensuite une trajectoire parabolique (chute libre avec vitesse initiale non nulle).

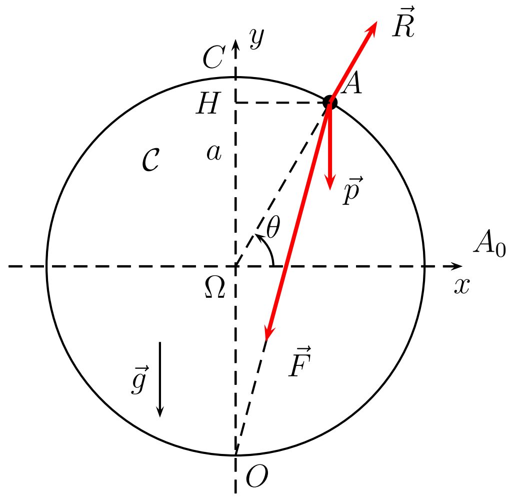
Exercice 7 : Particule guidée soumise à son poids et à une force de rappel



Un point A, de masse m, est mobile sans frottement sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon a contenu dans un plan vertical.
En plus de son poids, il est soumis de la part du point le plus bas O du cercle à une force de rappel $\vec{F} = -k.\overrightarrow{OA}$.
On suppose que A reste toujours en contact avec $\mathcal{C}$.

1. Exprimez l'énergie totale E_m de A en fonction de θ, $\dot{\theta}$, m, a, g et k.
2. Quelle doit être la vitesse v_0 de passage au point A_0 pour que le mobile atteigne le point C avec une vitesse nulle ?

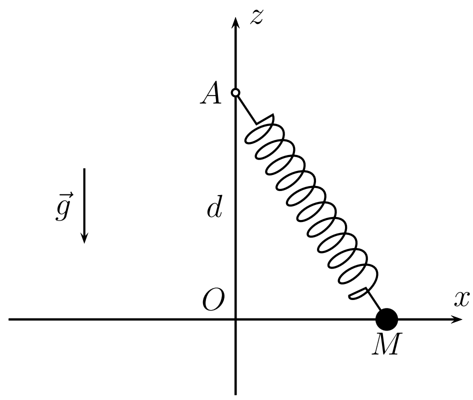
   On a affaire à une système à un degré de liberté : θ. On exprimera donc les énergies demandées en fonction de θ et ses dérivées. On remarque que $\vec{F}$ s'apparente à une force de rappel élastique. Le ressort équivalent a alors une constante de raideur k et une longueur à vide nulle.



1. L'énergie mécanique de A est $E_m = E_c + E_p$.
   $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et comme A se déplace suivant une trajectoire circulaire, $v = a.\dot{\theta}$ d'où $E_c = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$.
   Pour déterminer E_p, on doit faire l'inventaire des forces conservatives :
   Le poids dérive de $E_{p,\text{pes}} = \pm mgy + Cte = +mgy$ ici en choisissant l'origine des énergies potentielles en O. En nommant H le projeté de A sur Oy, on a $y = OH = O\Omega + \Omega H = a + a\sin\theta = a(1+\sin\theta)$ d'où $E_{p,\text{pes}} = mga(1+\sin\theta)$.
   La force de rappel $\vec{F}$ qui de $E_{p,\text{éla}} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 = \frac{1}{2}k.OA^2$ ici. En appliquant le théorème de Pythagore dans OHA, on peut écrire $OA^2 = OH^2 + HA^2 = a^2(1+\sin\theta)^2 + a^2\cos^2\theta = a^2 + 2a^2\sin\theta + a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta = 2a^2(1+\sin\theta)$. On en déduit $E_{p,\text{éla}} = ka^2(1+\sin\theta)$.
   Finalement, $E_m = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga(1+\sin\theta) + ka^2(1+\sin\theta)$.
2. Comme la seule force non conservative $\vec{R}$ ne travaille pas (elle est normale au déplacement car il n'y a pas de frottement), par utilisation du théorème de l'énergie mécanique, $\Delta E_m = W_{nc} = W(\vec{R}) = 0$.
   On a donc conservation de l'énergie mécanique et pour que A atteint C ($\theta = \frac{\pi}{2}$) avec une vitesse nulle ($\dot{\theta} = 0$), son énergie mécanique doit être $E_m(C) = E_m(\theta = \frac{\pi}{2}; \dot{\theta} = 0) = 0 + mga(1+\sin\frac{\pi}{2}) + ka^2(1+\sin\frac{\pi}{2}) = 2mga + 2ka^2$.
   Or, en A ($\theta = 0$), on aura $v = v_0$ telle que $E_m(A) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mga(1+0) + ka^2(1+0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mga + ka^2$ et par conservation de l'énergie mécanique, $E_m(A) = E_m(C) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mga + ka^2 = 2mga + 2ka^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2ga + \frac{2ka^2}{m}}$.

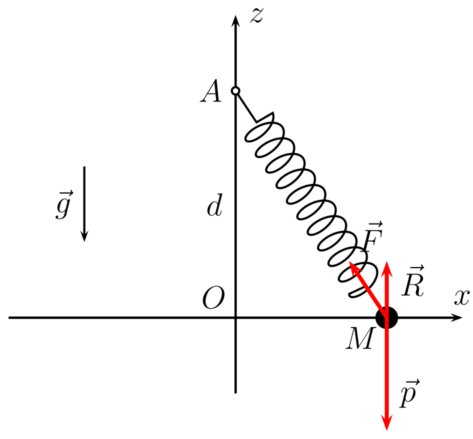
Exercice 8 : Bifurcation : discussion graphique

✍ Un point matériel de masse m situé en M se déplace sans frottement le long d'un axe horizontal Ox. Il est lié par l'intermédiaire d'un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k, à un point A situé à la verticale de O tel que $OA = d$. On note l la longueur AM du ressort.
Déterminer et tracer $E_p(x)$ l'énergie potentielle du point dans le cas $d \geqslant l_0$ puis et $d < l_0$.
En déduire les positions d'équilibre x_{eq} et leur stabilité.



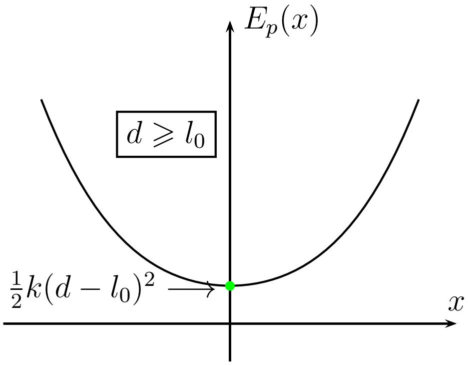
Nous avons affaire à un système à un degré de liberté : x.
L'énoncé impose d'ailleurs d'utiliser des méthodes énergétiques.
Pour déterminer l'énergie potentielle de M, on commence par faire l'inventaire des forces qui lui sont appliquées.

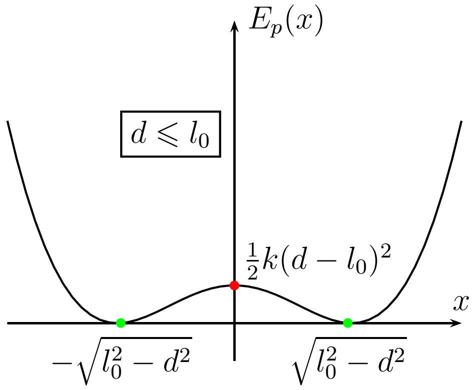
- Le poids $\vec{p}$ qui est une force conservative qui dérive de $E_{p,\text{pes}} = \pm mgz + Cte = +mgz$ ici. Mais comme il n'y a pas de déplacement vertical, $E_{p,\text{pes}} = Cte = 0$.
- La force de rappel élastique $\vec{F}$ qui dérive de l'énergie potentielle $E_{p,\text{éla}} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$ avec ici d'après le théorème de Pythagore, $l = \sqrt{d^2+x^2}$.
- La réaction de l'axe Ox sur M. C'est une force non conservative mais comme l'énoncé précise qu'il n'y a pas de frottement, $\vec{R} = \vec{N}$ est normale au déplacement et ne travaille pas.



Finalement, $E_p(x) = E_{p,\text{éla}} = \frac{1}{2}k(\sqrt{d^2+x^2} - l_0)^2$ fonction de x représentée ci-dessous (une rapide étude de fonction peut être nécessaire) :

- $E_p(x) \geqslant 0$ pour tout x.
- Si $x \to \pm\infty$, $E_p(x) \simeq \frac{1}{2}kx^2$ fonction parabolique qui tend vers $+\infty$.
- Si $d \geqslant l_0$, $E_p(x)$ ne s'annule jamais et atteint son minimum, $\frac{1}{2}k(d-l_0)^2 > 0$ en $x = 0$.
- Si $d \leqslant l_0$, $E_p(x)$ s'annule en $x = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2}$ (minimum de $E_p(x)$).



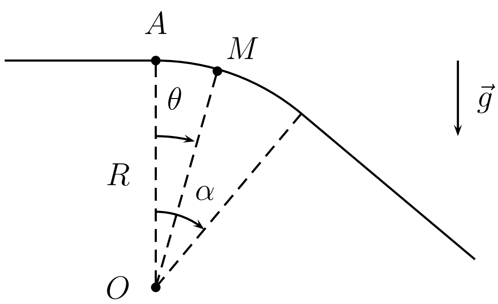


Graphiquement on remarque donc que :

- Si $d \geqslant l_0$, la seule position d'équilibre correspond à $x = 0$, c'est un équilibre stable. Le ressort est alors étendu : $l = d > l_0$.
- Si $d \leqslant l_0$, il existe deux positions d'équilibre stables, $x = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2}$. Elles correspondent à $l = l_0$, de part et d'autre de O. Si on fixe $x = 0$, le ressort prend la longueur $l = d < l_0$, il est comprimé mais la résultante des forces est nulle. L'équilibre est alors instable.

Exercice 9 : Dans les rues de San Francisco

Une voiture, assimilée à son centre de masse M circule à la vitesse v_0 constante sur une route horizontale.
Elle aborde en A une descente modélisée par un arc de cercle de rayon R de d'angle α suivie d'une partie rectiligne.
Le conducteur se place au point mort (force motrice nulle) et on néglige les frottements.

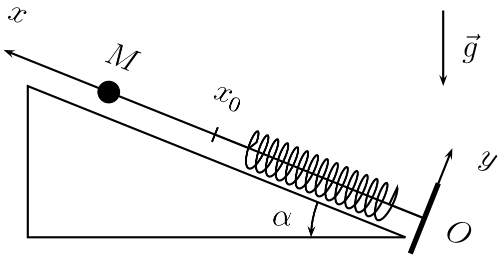


À quelle condition sur $\vec{R}_N$ la composante normale de la réaction de la route, la voiture va-t-elle quitter la route ?

Cela va-t-il se produire ? Si oui, à quel endroit (θ_0). Quelle sera alors la vitesse de la voiture ?
On donne : $R = 100$ m, $g = 9{,}8$ m.s^{-1}, $v_0 = 90$ km.h^{-1} et $\alpha = 40$ °.

$R_N = 0$ pour $\cos\theta_0 = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} = 0{,}88$ soit $\theta_0 = 28$ř $< \alpha$ donc oui, la voiture quittera la route. On aura alors $v =?$ km.h^{-1}.

Exercice 10 : Compression d'un ressort



On lâche sans vitesse initiale, de la position $x = x_i$ une masse sur une glissière inclinée d'un angle α avec l'horizontal. Le mouvement se fait sans frottement. La masse comprime ensuite un ressort sans masse, de longueur à vide x_0 et constante de raideur k fixé en O.
Déterminer de quelle longueur maximale se comprime le ressort lors de la phase d'écrasement.

Le temps ne nous intéresse pas, on a donc intérêt à utiliser la conservation de l'énergie mécanique. Pour cela, il nous faut exprimer les énergies potentielles en fonction de x et de α.
Système : Masse M, référentiel lié au sol, galiléen.
Bilan des forces : Poids (conservative, travaille), réaction normale (ne travaille pas, orthogonale au déplacement), force de ressort (seulement si $x < x_0$, sinon on ne touche pas le ressort, travaille, conservative)
$E_{p,pes} = mgx\sin\alpha$; $E_{p,el} = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$, seulement si $x < x_0$.
On a donc d'après le théorème de l'énergie mécanique (appliquée à un point dans un référentiel galiléen) : $Em_f - Em_i = W_{nc} = 0$. On applique ce théorème entre l'état initial et le moment où le ressort est comprimé au maximum.
À l'état initial, vu le schéma et le texte, $x_i > x_0$ et le ressort ne touche pas la masse, d'où $E_m = E_{p,pes} = mgx_i\sin\alpha$. À l'état final, la vitesse est nulle et $E_m = mgx_f\sin\alpha + \frac{1}{2}k(x_f - x_0)^2$. L'équation est donc

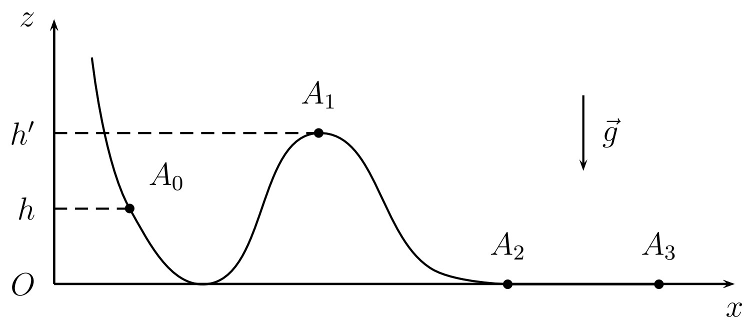
$$mgx_i\sin\alpha = mgx_f\sin\alpha + \frac{1}{2}k(x_f - x_0)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + mg\sin\alpha(x_0 - \Delta x) = mg\sin\alpha x_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 - mg\Delta x\sin\alpha + mg\sin\alpha x_0 - mg\sin\alpha x_i = 0$$

$\Delta = (mg\sin\alpha)^2 - 4\times\frac{1}{2}k(mgx_0 - mgx_i) > 0$ car $x_i > x_0$
les solutions sont alors $\frac{mg\sin\alpha \pm \sqrt{(mg\sin\alpha)^2 - 4\times\frac{1}{2}k(mgx_0 - mgx_i)}}{2\frac{1}{2}k}$ Seule la solution positive nous intéresse (l'autre correspondrait à l'élongation maximale du ressort si la masse restait collée) et on obtient alors :
$\Delta x = \frac{mg\sin\alpha}{k}[1 + \sqrt{1 - 2k\frac{x_0 - x_i}{mg\sin\alpha}}]$.

Exercice 11 : Montagnes Russes
Une particule matérielle M de masse m est déposée au point A_0 d'altitude h sur un plan incliné.

1. La particule parvient-elle au point A_1 d'altitude $h' > h$ en supposant qu'elle glisse sans frottement sur le plan ?

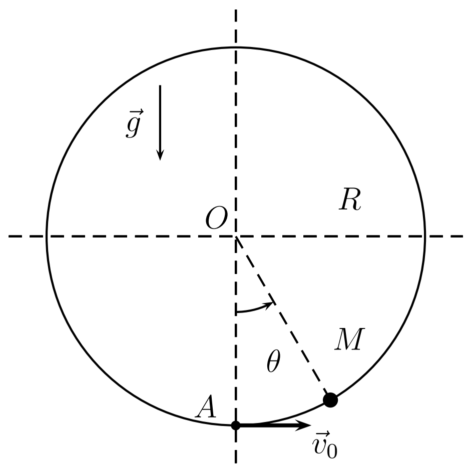


2. Le point matériel est maintenant lié à un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos l_0. Le ressort est comprimé jusqu'à la longueur l puis bloqué, la particule est alors en A_0. On libère le ressort. Le trajet $A_0A_1A_2$ est parfaitement glissant.
   Déterminer
   - la longueur l du ressort pour que la particule atteigne A_1 avec une vitesse nulle.
   - la vitesse de cette particule en A_2.
   - la distance d'arrêt $d = A_2A_3$, sachant qu'à partir de A_2 interviennent des forces de glissement de cœfficient f.

1. Non. 2. $l = l_0 + \sqrt{\frac{2mg}{k}(h'-h)}$; $v_2 = \sqrt{2gh'}$ et $d = \frac{h'}{f}$.

Exercice 12 : Mouvement d'un point matériel sur un cercle.
Une particule matérielle M, de masse m, placée dans dans le champ de pesanteur, peut se déplacer sans frottement sur la face intérieure d'un cercle vertical $\mathcal{C}$ de rayon R.
On lance cette particule avec la vitesse horizontale v_0 au point le plus bas du cercle : A.

1. Lorsque, au cours du mouvement, la particule est en contact avec $\mathcal{C}$, elle est soumise à une force de réaction N de la part de celui-ci. Montrer que la valeur de cette réaction, au point M du cercle peut être exprimée sous la forme $N = m[\frac{v_0^2}{R} + g(3\cos\theta - 2)]$ où $\theta = (\vec{OA},\vec{OM})$.



2. Montrer que la particule reste en contact avec $\mathcal{C}$ pendant tout son mouvement, lorsque la vitesse initiale est supérieure à une valeur $v_{0,\min}$ que l'on déterminera.
   AN : $R = 2{,}00$ m, $g = 9{,}80$ m.s^{-2}, $m = 5{,}00$ g.
3. Montrer que, pour d'autres valeurs de v, la particule peut, au cours de son mouvement, quitter $\mathcal{C}$.
   AN : $v_0 = 9{,}00$ m.s^{-1}.

1. TEC + PFD. 2. $N > 0 \iff v > v_{\min} = \sqrt{5gR} \simeq 9{,}9$ m.s^{-1}. 3. Décollage pour $\cos\theta = \frac{2}{3} - \frac{v^2}{3gR} \simeq -0{,}71$: $\theta \simeq 135°$.

Exercice 13 : Travail d'une force, énergie potentielle
Soit la force $\vec{F} = \frac{k}{r^3}(2\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta)$ dans la base polaire $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$.

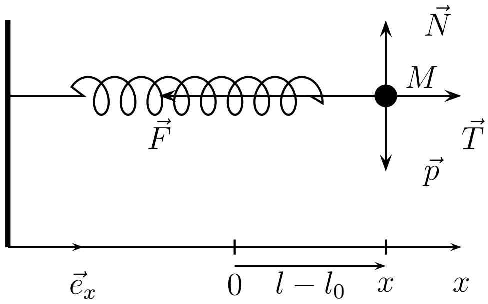
1. Calculer le travail W de cette force pour un déplacement circulaire de rayon R et sur un demi-tour en sens direct : $\theta = 0 \to \pi$.

2. Montrer que la force dérive d'une énergie potentielle que l'on déterminera. Vérifier alors le résultat de la première question.

1. $W = \frac{2k}{R^2}$. 2. $E_p = \frac{k}{r^2}\cos\theta + Cte$, $W = -\Delta E_p$.

Exercice 14 : Oscillateur amorti par frottements solides

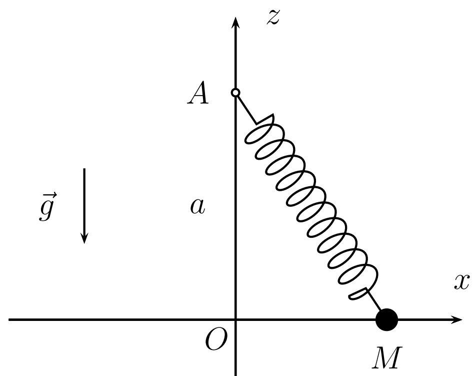
On considère le point M de masse m, mobile sur l'axe Ox. Il subit l'action de son poids $\vec{p}$, de $\vec{R}$, de $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$ et de $\vec{f} = \varepsilon\mu R\vec{e}_x$ avec $\varepsilon = \pm 1$ selon le sens du mouvement.



1. La particule est abandonnée sans vitesse initiale en $x = a_0 > 0$. Quelle est la valeur minimale a_c de a_0 permettant le mouvement ?
2. Cette condition étant remplie, résoudre l'équation différentielle du mouvement et déterminer l'instant t_1 où l'équation cesse d'être valable. Calculer l'élongation correspondante a_1.
3. Quelle est la nouvelle condition de démarrage de l'oscillateur ? Quelle est la nouvelle équation du mouvement ? Déterminer l'instant t_2 et x_2 au moment où l'équation cesse d'être valable.
4. Tracer l'allure de $x(t)$ dans le cas particulier où $a_0 = \frac{10f}{k}$. La force $\vec{f}$ dérive-t-elle d'une énergie potentielle ?

1. $a_0 > \frac{\mu mg}{k} = a_c$. 2. $x = a_c + (a_0 - a_c)\cos\omega_0 t$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$, $a_1 = 2a_c - a_0$ 3. $a_0 > 3a_c$ et $x = -a_c + (a_0 - 3a_c)\cos\omega_0 t$, $t_2 = 2t_1$ et $x_2 = a_0 - 4a_c$. 4. Oscillations d'amplitude décroissant linéairement jusqu'à a_5 puis arrêt : 2,5 oscillations.

Exercice 15 : Oscillateur non linéaire

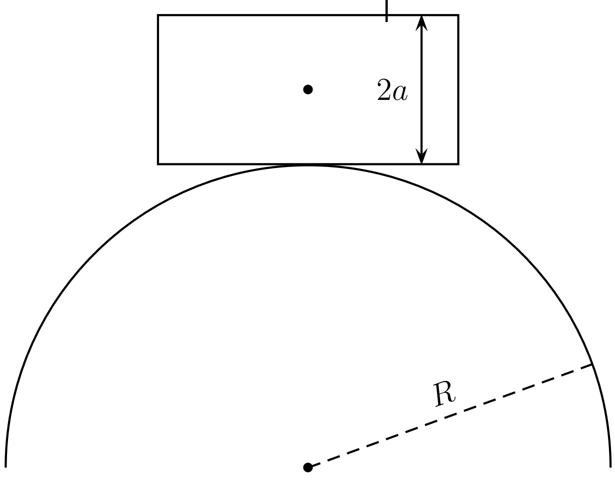


1. Déterminer la période t_0 des petites oscillations d'un point matériel M de masse m, assujetti à se déplacer sans frottement sur la droite Ox horizontale sous l'action d'un ressort (k,l_0) dont l'autre extrémité est fixér en A de côte $a > l_0$.
2. Discuter le cas $a \geqslant l_0$.

Exercice 16 : Stabilité sur un cylindre

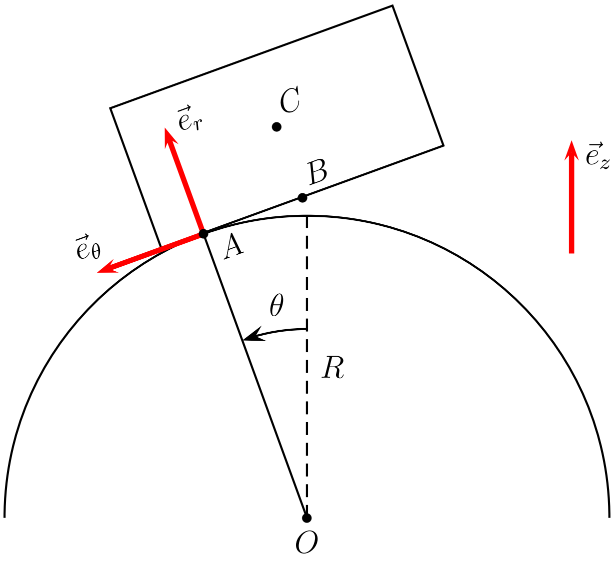
À quelle condition (sur a et R) le parallélépipède est-il en équilibre stable sur le demi-cylindre ?

On considérera le centre de gravité initialement au dessus de l'axe du cylindre et qu'il n'y a pas de glissement compte tenu des frottements.



Conseils ci-dessous si besoin :

Faire un beau schéma; utiliser les coordonnées polaires; suivre un chemin facile pour trouver l'altitude du centre du carré en fonction de l'angle dont on a tourné en utilisant une projection d'un vecteur selon $\vec{e_z}$ vertical.



Par rotation sans glissement : $AB = R\theta$.
L'energie potentielle de pesanteur pour le cube est : $E_p(\theta) = mgz_C = mg\overrightarrow{OC}\cdot\vec{e}_z$.
On exprime ensuite le vecteur $\overrightarrow{OC}$ grâce à la relation de Chasle : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = R\vec{e}_r - R\theta\vec{e}_\theta + a\vec{e}_r$.
D'où $\overrightarrow{OC}\cdot\vec{e}_z = R\cos\theta + R\theta\sin\theta + a\cos\theta$.
Enfin, $\frac{1}{mg}\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = -(R+a)\sin\theta + R\sin\theta + R\theta\cos\theta = -a\sin\theta + R\theta\cos\theta$. On a donc bien une position d'équilibre en $\theta = 0$ car $\frac{1}{mg}\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}(\theta = 0) = 0$.
Pour étuder la stabilité on regarde la dérivée 2nd : $\frac{1}{mg}\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2} = -a\cos\theta + R\cos\theta - R\theta\sin\theta$
$\frac{1}{mg}\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta = 0) = R - a$. D'où position d'équilibre stable si $R > a$ et instable sinon.

Ci-dessous les profils d'énergie dans les 2 cas au voisinage de 0.