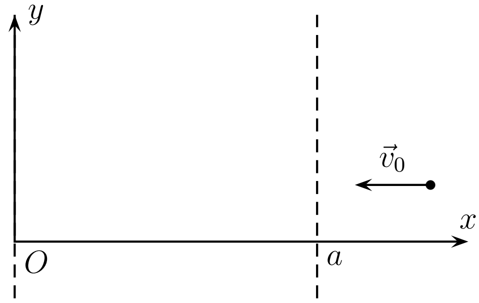
Travaux Dirigés M_4

Exercice 1 : Barrière électromagnétique ⋆⋆

1. Barrière électrique : il règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0\vec{u}_x$ entre les plans $x = 0$ et $x = a$ et un champ nul partout ailleurs.

   Des particules de charge $q > 0$, de masse m arrivent de l'infini du coté des $x > 0$ avec des vitesses identiques $\vec{v}_0$ portées par l'axe Ox.

   Quelle est la condition sur v_0 pour que les particules ne puissent pas franchir cette barrière de potentiel ?

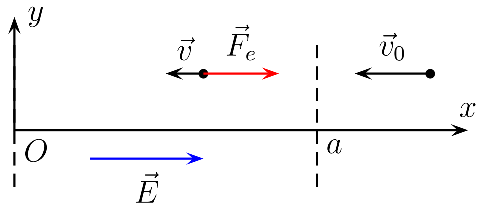


2. Barrière magnétique : entre les plans $x = 0$ et $x = a$, il règne maintenant un champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B_0\vec{u}_z$.

Quel est le rayon de courbure de la trajectoire des particules ? Reprendre la question du 1.

1. Barrière électrique : on représente le champ $\vec{E}$ et la force $\vec{F}_e = q\vec{E}$ subie par la particule.

   À partir de $x = a$ cette dernière est ralentie et on cherche finalement la valeur de U pour laquelle sa vitesse s'annule en $x = 0$: $v_f = 0$.



   Par application du théorème de l'énergie cinétique entre ces deux points,

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W(\vec{E}) = \int \delta W = \int_{x=a}^{0} qE.\vec{e}_x.dx.\vec{e}_x = qE(0-a) = -qU$$

   On obtient bien $W(\vec{F}_e) < 0$ pour cette force qui s'oppose au déplacement et $v_f^2 = v_0^2 - \frac{2qU}{m} < v_0^2$.

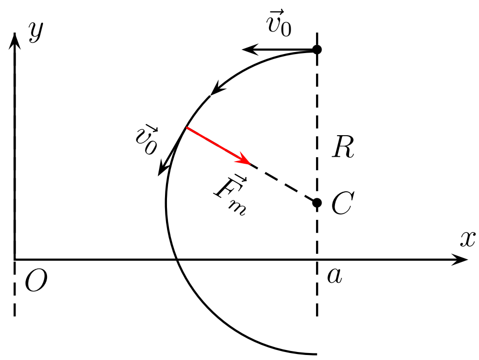
À la limite, $v_f = 0$ pour $v_0^2 = \frac{2qU}{m}$. Il faut et il suffit donc que $v_0 \leqslant \sqrt{\frac{2qU}{m}}$.

2. Barrière magnétique : cette fois, la particule va garder la même vitesse (numérique) v_0 mais sa trajectoire sera un arc de cercle de centre C et de rayon $R = \frac{mv_0}{qB}$ (Cf. calcul fait en classe).

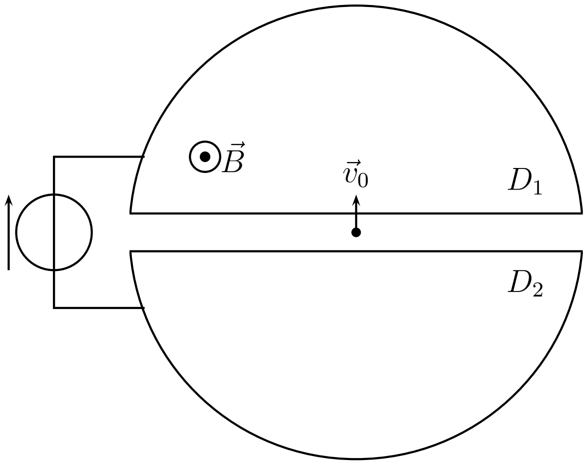
   Pour qu'elle reste dans le secteur $x \geqslant 0$, il faut et il suffit que

$$R = \frac{mv_0}{qB} \leqslant a \Rightarrow v_0 \leqslant \frac{qBa}{m}$$

   .



Exercice 2 : Étude du cyclotron



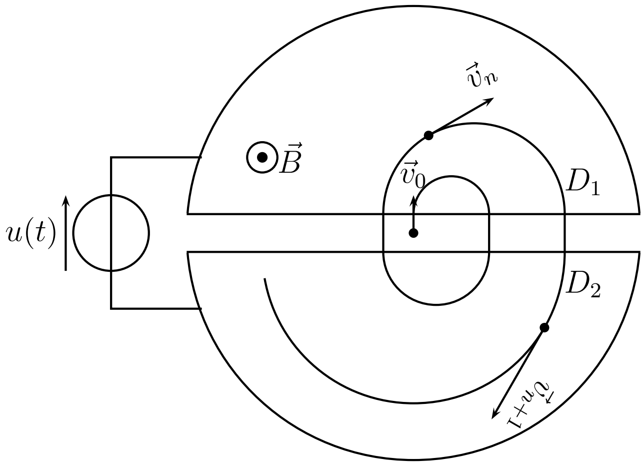
Un cyclotron comporte deux demi-boîtes cylindriques métalliques creuses ou "D", séparées par un intervalle, entre lesquelles on établit une tension $u(t)$ sinusoïdales de fréquence convenable f.
Les "D" sont situés dans l'entrefer d'un électroaimant qui fournit un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme parallèle aux génératrices des "D".
On injecte des protons ($m = 1{,}66.10^{-27}$ kg, $q = 1{,}6.10^{-19}$ C) dans une direction perpendiculaire à $\vec{B}$, avec une vitesse initiale négligeable. On donne $B = 1{,}5$ T la norme de $\vec{B}$.

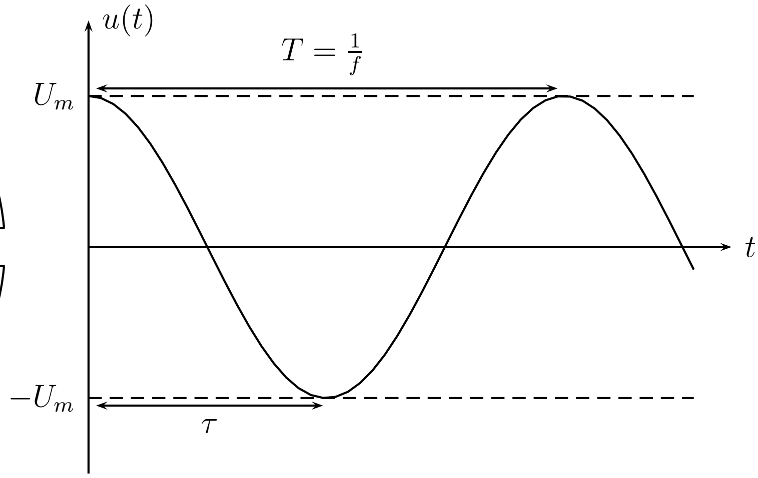
1. Montrer que dans les "D" (action de $\vec{B}$ seul) la vitesse numérique v des protons est constante.
2. En déduire R le rayon de courbure de la trajectoire des protons ayant une vitesse v ainsi que le temps de passage d'un proton dans un "D".
3. Quelle doit être la fréquence f de la tension $u(t)$ pour que le proton soit accéléré de façon optimale (pendant un temps très court) à chaque passage entre les "D" ?
4. La tension $u(t)$ a une amplitude $U_m = 200$ kV. Le proton passe entre les "D" de façon optimale en terme d'accélération.
   (a) À l'aide d'un raisonnement énergétique, déterminez une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n les vitesses lors des demi-cercles consécutifs numérotés n et $n+1$, si le premier demi-cercle décrit après la première accélération porte le numéro 1.
   (b) En déduire v_n en fonction de n.
   (c) Déterminer en fonction de n le rapport des rayons R_n et R_{n+1} des deux demi-cercles consécutifs numérotés n et $n + 1$.
   (d) Calculer le rayon de la trajectoire après 1 tour (2 passages entre les "D") et après 10 tours.
5. Le rayon de la dernière trajectoire décrite par les protons accélérés avant de bombarder une cible est $R_N = 35$ cm, déterminer :
   (a) l'énergie cinétique du proton avant le choc contre la cible proche du cyclotron,
   (b) le nombre de tours décrits par le proton après sa première accélération.

   N.B. : On traitera le problème dans le cadre de la mécanique non relativiste.

1. À l'intérieur des "D", seule la force $\vec{F}_m = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ agit sur le proton.

   Cette force étant normale au déplacement à tout instant, elle ne travaille pas, sa puissance est nulle.





Or, d'après le théorème de la puissance cinétique appliqué au proton dans le référentiel galiléen local, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique est égale à la puissance de la résultante des forces soit ici

$$\left[\frac{dE_c(M)}{dt}\right]_{R_g} = \mathcal{P}(\vec{F}_m) = 0$$

ce qui implique $E_c(M) = \frac{1}{2}mv^2$ constante.

Comme la masse m ne varie pas, on en déduit que v est constante.

2. La trajectoire des protons est un arc de cercle, c'est d'ailleurs ce que suggère fortement l'énoncé. On se place donc dans le système de coordonnées polaires et on applique le principe fondamental de la dynamique à un proton :

$$m\vec{a} = q.\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow m(-\frac{v^2}{R}.\vec{e}_r) = qv.\vec{e}_\theta \wedge B.\vec{e}_z = -qvB\vec{e}_z \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

La trajectoire circulaire de longueur $L = \pi R$ (un demi tour) est parcourue à la vitesse constante v en un temps

$$\tau = \frac{L}{v} = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{qB} \simeq 21{,}7 \text{ ns.}$$

3. Pour que le proton soit accéléré de manière optimale sous la tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, il faut que $u(t)$ passe de sa valeur maximale ($+U_m$) à sa valeur minimale ($-U_m$) pendant que le proton parcourt un "D" (graphe ci-dessus). On a ainsi

$$\frac{T}{2} = \tau \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\tau} = \frac{qB}{2\pi m} \simeq 23{,}0 \text{ MHz}$$

4. On donne $U_m = 200$ kV

   (a) Nous avons établi une relation liant R_n à v_n la vitesse du proton lors du demi-tour n :

$$R_n = \frac{mv_n}{qB} \text{ et } R_{n+1} = \frac{mv_{n+1}}{qB} \qquad \text{soit} \qquad \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

   Il reste à obtenir la relation entre n et v_n. L'utilisation du théorème de l'énergie cinétique semble le plus adapté. En effet, à chaque passage entre les "D", les protons sont accélérés et leur variation d'énergie cinétique est

$$\Delta E_c = W(\vec{F}_e) = qU_m$$

Ainsi, après n passages, la variation d'énergie cinétique est $n\Delta E_c = E_{c,n} - E_{c,0} = nqU_m$. En supposant v_0 faible devant les vitesses suivantes, on peut considérer que $E_{c,n} - E_{c,0} \simeq E_{c,n} = \frac{1}{2}mv_n^2$. Finalement, on obtient la relation

$$\frac{1}{2}mv_n^2 = nqU_m \Rightarrow v_n = \sqrt{\frac{2nqU_m}{m}} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{\frac{2(n+1)qU_m}{m}} \quad \text{soit} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

On en déduit le rapport des rayons des demi cercles consécutifs

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

(b) Après un tour, soit $n = 2$ demi tours, d'après les relations précédentes,

$$v_2 = \sqrt{\frac{4qU_m}{m}} \text{ et } R_2 = \frac{mv_2}{qB} = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{U_m m}{q}} \simeq 6{,}10 \text{ cm}$$

Après 10 tours, soit $n' = 20 = 10n$ demi-tours,

$$v_{20} = \sqrt{\frac{20qU_m}{m}} = \sqrt{10}v_2 \text{ et } R_{20} = \frac{mv_{10}}{qB} = \sqrt{10}R_2 \simeq 19{,}2 \text{ cm}$$

5. On donne $R_N = 35$ cm le rayon du dernier demi cercle.

(a) À partir des équations précédentes,

$$R_N = \frac{mv_N}{qB} \Rightarrow v_N = \frac{qBR_N}{m} \Rightarrow E_{c,N} = \frac{1}{2}mv_N^2 = \frac{q^2B^2R_N^2}{2m} \simeq 2{,}12.10^{-12} \text{ J soit } 13{,}5 \text{ MeV}$$

(b) En notant $2N$ le nombre de demi tours effectués (et donc le nombre d'accélérations subies par le proton), on a

$$\Delta E_{c,N} = 2NqU_m \Rightarrow 2N = \frac{\Delta E_{c,N}}{qU_m} \simeq 33$$

Le proton a donc effectué 33 tours avant de quitter le cyclotron et percuter la cible. Ce doit être un vieux un cyclotron 33 tours, peut-être vinyle ;)

Exercice 3 : Expérience de Millikan

L'expérience de Millikan a permis de déterminer la valeur de la charge élémentaire.

Entre deux plateaux horizontaux d'un condensateur plan à air, distants de $h = 16$ mm, on introduit de petites gouttes de glycérine de rayon uniforme a et de volume V. On prendra $g = 10\,\text{m.s}^{-2}$.

1. Le condensateur n'est pas chargé.

(a) Montrer que chaque goutte abandonnée sans vitesse, atteint une vitesse limite $\vec{v}_0$ qu'on exprimera en fonction des données (on n'oubliera pas la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho' V\vec{g}$) ; on donne :

- $\vec{R}$ résistance de l'air $R = 6\pi\eta a v$ (force $\vec{R}$ opposée à la vitesse $\vec{v}$),

- coefficient de viscosité de l'air $\eta = 1{,}83.10^{-5}$ kg.m^{-1}.s^{-1},
- masse volumique de la glycérine $\rho = 1260$ kg.m^{-3},
- masse volumique de l'air $\rho' = 1{,}3$ kg.m^{-3}.

(b) A l'aide d'une lunette d'observation, on constate qu'une goutte parcourt $7{,}84$ mm en $20{,}4$ s. Calculer le rayon a de la goutte.

(c) Au bout de combien de temps la vitesse limite est-elle atteinte à 1 pour mille près ?

2. On établit une ddp U constante entre les plateaux du condensateur.

(a) Exprimer la nouvelle vitesse limite v_1 d'une goutte qui porte une charge q, en fonction de v_0, q, η, a, U et h.

(b) Pour immobiliser la goutte, il faut appliquer une tension $U_1 = 7$ kV. Calculer q et commenter.

1. a. $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{\rho-\rho'}{\rho}\vec{g}$ avec $\tau = \frac{2\rho a^2}{9\eta}$ d'où $\vec{v}_0 = \frac{2a^2(\rho-\rho')}{9\eta}\vec{g}$. 1. b. hypothèse : $\tau \ll 20{,}4$ s $\rightarrow a = 1{,}6.10^{-6}$ m. Vérification : $\tau = \frac{v_0}{g} = 3{,}91.10^{-5} \ll 20{,}4$ s. 1. c. $t = 3\tau \ln 10 \simeq 2{,}6.10^{-4}$ s. 2. a. $v_1 = v_0 - \frac{qU}{6\pi\eta a h}$ (si $q > 0$). 2. b. $q = \frac{6\pi\eta a h v_0}{U_1} \simeq 3e$ charge quantifiée.
Correction détaillée (à vérif) :

1.a Montrer que chaque goutte atteint une vitesse limite $\vec{v}_0$

Définition du système : Une goutte de glycérine de rayon a et de volume $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.
Définition du référentiel : Référentiel terrestre, supposé galiléen.
Application de la 2ème loi de Newton : Les forces agissant sur la goutte sont :

- Le poids : $\vec{P} = \rho V \vec{g}$
- La poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -\rho' V \vec{g}$
- La résistance de l'air : $\vec{R} = -6\pi\eta a\vec{v}$

La 2ème loi de Newton s'écrit :
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{R}$$
En projetant sur l'axe vertical descendant :
$$\rho V\frac{dv}{dt} = \rho V g - \rho' V g - 6\pi\eta a v$$
En simplifiant avec $V = \frac{4}{3}\pi a^3$:
$$\frac{4}{3}\pi a^3\rho\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi a^3(\rho-\rho')g - 6\pi\eta a v$$
Divisons par $\frac{4}{3}\pi a^3\rho$:
$$\frac{dv}{dt} = \frac{(\rho-\rho')}{\rho}g - \frac{9\eta}{2\rho a^2}v$$
Posons $\tau = \frac{2a^2\rho}{9\eta}$ (identification avec la forme canonique du 1er ordre), on obtient :
$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{(\rho-\rho')}{\rho}g$$
Lorsque la vitesse limite est atteinte, $\frac{dv}{dt} = 0$, donc :
$$v_0 = \frac{(\rho-\rho')}{\rho}g\tau = \frac{2a^2(\rho-\rho')}{9\eta}g$$

1.b Calculer le rayon a de la goutte

Hypothèse : On suppose que le temps caractéristique τ est beaucoup plus petit que le temps d'observation (20,4 s), ce qui permet d'assimiler la vitesse limite à la vitesse moyenne. Ainsi, dans cette approximation $v(t) = v_0 = distance/temps$

Calcul du rayon a : La vitesse moyenne observée est $\frac{7{,}84\times10^{-3}\,\mathrm{m}}{20{,}4\,\mathrm{s}} = 3{,}84 \times 10^{-4}\,\mathrm{m/s}$.

En utilisant $v_0 = \frac{2a^2(\rho-\rho')}{9\eta}g$, on résout pour a :

$$a = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2(\rho-\rho')g}}$$

1.c Temps pour atteindre la vitesse limite à 1 pour mille près

Équation : On a $\frac{v_{\text{lim}}-v}{v_{\text{lim}}} = \frac{1}{1000}$. On a pris ce sens pour la soustraction car $v < v_{\text{lim}}$

Cela signifie que $v = v_{\text{lim}}\left(1 - \frac{1}{1000}\right)$.

Résolution : La solution de l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{(\rho-\rho')}{\rho}g$ est :

$$v(t) = v_{\text{lim}}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Pour $v = v_{\text{lim}}\left(1 - \frac{1}{1000}\right)$, on a :

$$1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{1}{1000}$$

Donc :

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{1000}$$

En prenant le logarithme naturel :

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{1}{1000}\right)$$

$$t = -\tau\ln\left(\frac{1}{1000}\right) = \tau\ln(1000) = 3\tau\ln 10 \simeq 2{,}6.10^{-4}$$

s.

2.a Exprimer la nouvelle vitesse limite v_1 en présence d'une tension U

Changements par rapport à 1.a : Une force électrique $\vec{F}_e = q\vec{E} = -\frac{qU}{h}\vec{e}_z$ s'ajoute. La force est selon la verticale ascendante pour freiner, soit selon $-\vec{e}_z$. De plus, d'après le cours, $E = U/h$ (en norme)

La nouvelle équation devient :

$$\rho V\frac{dv}{dt} = \rho V g - \rho' V g - 6\pi\eta a v - \frac{qU}{h}$$

À l'équilibre :

$$0 = (\rho-\rho')Vg - 6\pi\eta a v_1 - \frac{qU}{h}$$

Donc :

$$v_1 = v_0 - \frac{qU}{6\pi\eta a h}$$

2.b Calculer la charge q pour immobiliser la goutte

Condition d'immobilisation : Pour $v_1 = 0$:

$$v_0 = \frac{qU_1}{6\pi\eta ah}$$

Donc :

$$q = \frac{6\pi\eta ahv_0}{U_1}$$

Numériquement, on trouve $3e$ (trois fois la charge élémentaire). On trouve des paliers lorsque l'on mesure U pour différents système car la charge est quantifiée.