TRAVAUX DIRIGÉS DE M_5

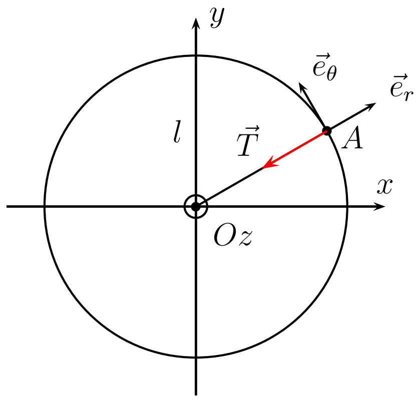
Exercice 1 : Non conservation de l'énergie mécanique

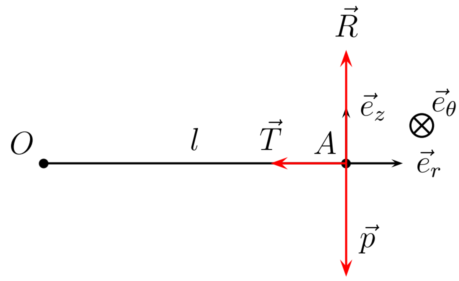
Au cours d'une de ses aventures, Indiana Jones se retrouve glissant sans frottement sur un plan horizontal verglacé, lié par un filin inextensible et de masse négligeable à un poteau d'axe vertical placé en O. Le filin ne s'enroule pas sur le poteau mais glisse autour sans frottement.

Pour simplifier, on assimile notre héros à un point matériel A de masse m.

1. Indiana Jones tourne autour du poteau à la distance $l = OA$ avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_\theta$ dans le référentiel lié au plan, supposé galiléen.
   Quelle est la nature de son mouvement ? Exprimer le module T de la tension du filin.
2. Après calcul, notre héros décide, pour sortir de sa situation, de "remonter" lentement de long du filin.
   (a) Montrer qu'au cours de l'opération son moment cinétique par rapport à O reste constant.
   (b) En déduire la vitesse finale v' d'Indiana Jones en A' tel que $OA' = \frac{l}{2}$.
   (c) Exprimer la variation d'énergie mécanique au cours de la remontée.
   Du point de vue énergétique, quel a été le rôle de notre héros ?
3. Discuter de ce qui va arriver si il continue sa remontée.

1. Comme la distance OA est constante, le mouvement est circulaire et $v = r\dot{\theta} = l\dot{\theta}$.





   On cherche maintenant à montrer qu'il est également uniforme.
   Les forces appliquées au point matériel { A } sont $\vec{T} = -T.\vec{e}_r$ la tension du fil, $\vec{p} = -mg\vec{e}_z$ le poids de A et $\vec{R}$ la réaction du sol avec $\vec{R} = \vec{N}$ verticale car il n'y a pas de frottement.
   Toutes ces forces sont normales au déplacement ($d\vec{r} = vdt.\vec{e}_\theta$) donc elles ne travaillent pas et par application du théorème de l'énergie cinétique, $\Delta E_c = W(\vec{T}) + W(\vec{p}) + W(\vec{R}) = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow E_c = Cte \Rightarrow v = Cte$ la vitesse de A est constante, mouvement circulaire et uniforme.
2. On a maintenant $l = OA$ qui diminue.
   (a) Comme il n'y a pas de frottement, $\vec{R} = \vec{N}$ et comme le déplacement est horizontal ($z = Cte$), par projection du principe fondamental de la dynamique sur l'axe Oz vertical, $m\ddot{z} = -p + R = 0 \Rightarrow \vec{p} + \vec{R} = \vec{0}$
   La résultante des forces est donc $\vec{T} + \vec{p} + \vec{R} = \vec{T}$ centrale. Par application du théorème du moment cinétique sur le point A et par rapport au point O fixe dans le référentiel lié au sol considéré comme galiléen,

$$\frac{d\vec{L}_0(A)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0(A) = \vec{Cte}$$

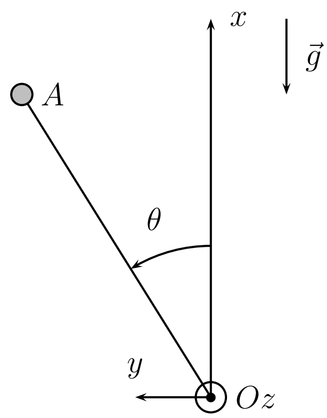
(b) Au cours du mouvement de A le long du filin, comme on reste dans le cas d'une force centrale $\vec{T}$, on a toujours conservation du moment cinétique $\vec{L}_0(A)$.
Quand $OA = l$, $v = v_0$ d'où $\vec{L}_0(A) = m\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}_0 = mlv_0\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = mlv_0\vec{e}_z$.
De même, quand A est en A', $OA' = \frac{l}{2}$, $v = v'$ d'où $\vec{L}_0(A) = m\overrightarrow{OA'} \wedge \vec{v'} = m\frac{l}{2}v'\vec{e}_z$.
Par identification, on a alors $mlv_0 = m\frac{l}{2}v' \Rightarrow v' = 2v_0$.

(c) La seule force conservative appliquée à A est son poids mais il ne travaille pas donc son énergie potentielle ne varie pas et $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(4v_0^2 - v_0^2) = \frac{3}{2}mv_0^2 > 0$: gain d'énergie mécanique.
Le rôle d'Indiana Jones était d'augmenter l'énergie mécanique du système par apport d'énergie d'origine musculaire.

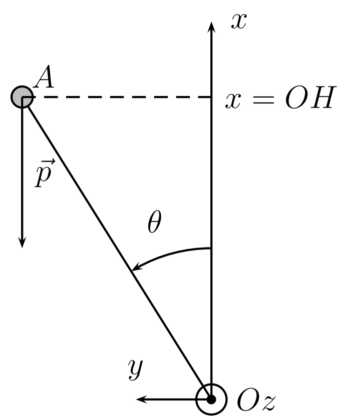
3. Par conservation du moment cinétique, $mrv = mlv_0 \Rightarrow v = \frac{v_0 l}{r}$ la vitesse de A pour $OA = r$. La vitesse de A va tendre vers l'infini quand r va tendre vers 0 (il faudrait un apport d'énergie infini). On peut, par application du principe fondamental de la dynamique montrer que $T = \frac{mv_0^2}{r}$ va également tendre vers l'infini, le filin va rompre.

Exercice 2 : Pendule de Holweck – Lejay.

Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable et de longueur $L = OA$, articulée en O et mobile dans un plan vertical.
Un ressort "spirale" (non représenté sur la figure) exerce sur A, via la tige, un couple de rappel équivalent à un moment de force dont la projection sur Oz est : $\mathcal{M}_{Oz} = -C\theta$.



1. Déterminer, par application du théorème scalaire du moment cinétique, l'équation différentielle vérifiée par θ.
2. À quelle condition, la position $\theta = 0$ correspond elle à un équilibre stable ?
3. Si cette condition est vérifiée, calculer la période T des petites oscillations autour de $\theta = 0$ et mettre T sous la forme $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{G-g}}$. On donnera l'expression de G.
4. Calculer $\frac{\Delta T}{T}$ la variation relative de T si g varie de Δg. On pourra pour cela calculer la dérivée $\frac{dT}{dg}$ et l'exprimer en fonction de T, puis approximer que le taux d'accroissement est peu différent de la dérivé et en déduire $\frac{\Delta T}{T}$ en fonction de Δg. Voyez-vous une application ?



1. Application du théorème scalaire du moment cinétique sur l'axe Oz. On commence par calculer le moment cinétique de A par rapport à O : $L_{Oz}(A) = +L.mv = mL^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{dL_{Oz}}{dt} = mL^2\ddot{\theta}$.
Les moments de force sont $\mathcal{M}_{Oz} = -C\theta$ pour le couple de rappel et $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{p}) = +mgAH = mgL\sin\theta$ (AH est le bras de levier.)
Par application du TSMC selon Oz fixe,

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{Oz} \Rightarrow mL^2\ddot{\theta} = -C\theta + mgL\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{mL^2}\theta - \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

2. En considérant $\sin\theta \simeq \theta$ (oscillations de faible amplitude autour de 0), l'équation devient linéaire :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{mL^2}\theta - \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C - mgL}{mL^2}\theta = 0$$

et correspond à l'équation d'un oscillateur harmonique oscillant autour d'une position d'équilibre stable si tous les coefficients sont de même signe c'est à dire si $C \geqslant mgL$.

Physiquement, il faut que le ressort ait une constante de raideur assez grande pour "retenir A".

3. La condition précédente étant vérifier, l'équation devient :

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{C - mgL}{mL^2}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\frac{C}{mL} - g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{G-g}} \text{ où } G = \frac{C}{mL}$$

4. D'après la réponse à la question précédente,

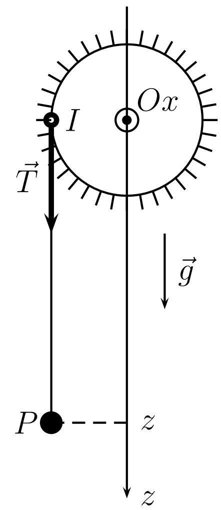
$$T = 2\pi\sqrt{L}(G-g)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dT}{dg} = \pi\sqrt{L}(G-g)^{-\frac{3}{2}} = \frac{2\pi\sqrt{L}(G-g)^{-\frac{1}{2}}}{2(G-g)} = \frac{T}{2}\frac{1}{G-g} \Rightarrow dT = \frac{Tdg}{2(G-g)}$$

En considérant des variations ΔT et Δg faibles, on peut remplacer dT par ΔT et dg par Δg, on dit qu'on "passe aux Δ" et on a alors $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta g}{2(G-g)}$

On voit que la variation relative de la période (qui peut être facilement mesurée) dépend de Δg, elle peut même être très importante y compris pour Δg faible, il faut pour cela choisir $G = \frac{C}{mL}$ proche de g en choisissant correctement les caractéristiques du pendule) : appareil très sensible si $G \simeq g$. Ainsi, on peut mesurer des variations, mêmes faibles de g qui peuvent par exemple être dues à la présence dans le sous sol d'une cavité (nappe de pétrole, mine ...) : utile en géodésie (science qui a pour objet de mesurer la surface de la terre ou une partie de cette surface).

Remarque : on utilise maintenant d'autres méthodes qui font intervenir la vitesse de propagation d'ondes sismiques.

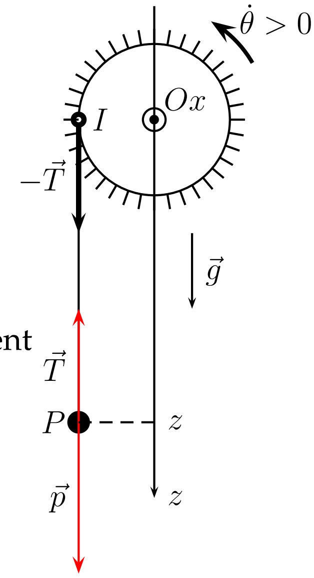
Exercice 3 : Régulateur de FOUCAULT



Un point P de masse m est accroché à un fil sans masse enroulé autour d'un cylindre de moment cinétique négligeable (il suffit pour cela de négliger sa masse) et de rayon R tournant librement autour de son axe Ox fixe et horizontal. La chute de P entraîne la rotation du cylindre.
Ce cylindre, muni d'ailettes, est soumis à la résistance de l'air que l'on modélisera par un moment de frottement total $\vec{\Gamma}_f = -\lambda\vec{\omega}$ où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire du cylindre. Le système est abandonné sans vitesse initiale.

1. Donner la relation qui lie T l'intensité de la tension du fil en fonction de l'accélération $\ddot{z}$ de P.
2. Déterminer l'expression de $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ en appliquant le théorème du moment cinétique au système { cylindre }.
3. Reprendre en considérant le système { masse + fil + cylindre }.
4. Voyez-vous une application ?

1. On commence par appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) au point P.



Ce dernier n'est soumis qu'à son poids $\vec{p} = m\vec{g} = +mg\vec{e}_z$ et à la tension du fil $\vec{T}$ sur la figure.

Son accélération est alors $\vec{a} = \ddot{z}.\vec{e}_z$ telle que $m\vec{a} = \vec{p} + \vec{T}$ et par projection selon $\vec{e}_z$, on aboutit à $m\ddot{z} = mg - T \Rightarrow T = m(g - \ddot{z})$.

2. Les forces appliquées **au cylindre** sont :
   - la tension $-\vec{T}$ du fil de bras levier est R. La projection selon Ox de son moment est $\mathcal{M}_{Ox}(\vec{T}) = +TR = m(g - \ddot{z})R$.
   - la résultante des forces de frottement $\vec{f}$ dont la projection du moment est $\Gamma_{Ox} = -\lambda\vec{\omega}.\vec{e}_x$ où le vecteur rotation $\vec{\omega} = \dot{\theta}.\vec{e}_x$ soit $\Gamma_{Ox} = -\lambda\dot{\theta}$
   - la réaction $\vec{R}$ de l'axe Ox, de bras de levier nul d'où $\mathcal{M}_{Ox}(\vec{R}) = 0$

Remarque : on ne doit pas considérer $\vec{p}$ qui n'est pas appliqué au cylindre.
Par contre, la présence de P se traduit par l'apparition de $\vec{T}$ en I.
Le moment cinétique du cylindre est négligé (car sa masse est nulle) et par application du théorème scalaire du moment cinétique,

$$\frac{dL_{Ox,\text{cyl}}}{dt} = \mathcal{M}_{Ox}(\vec{T}) + \Gamma_{Ox} + \mathcal{M}_{Ox}(\vec{R}) \Rightarrow 0 = m(g - \ddot{z})R - \lambda\dot{\theta} + 0 = 0$$

Pour se ramener à une équation en θ, il faut éliminer $\ddot{z}$. Pour cela, on utilise l'hypothèse du fil inextensible : tous les points du fil ont la même vitesse au même instant. Ceux qui sont encore au contact du cylindre ont une vitesse $R\dot{\theta}$ (mouvement circulaire) alors que les autres ont la même vitesse que P, c'est à dire $\dot{z}$. On en déduit $\dot{z} = R.\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{z} = R.\ddot{\theta}$ et en remplaçant dans l'équation,

$$mgR - mR^2\ddot{\theta} - \lambda\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\lambda}{mR^2}\dot{\theta} = \frac{g}{R} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{g}{R}$$

avec $\omega = \dot{\theta}$ et $\tau = \frac{mR^2}{\lambda}$. On reconnaît une équation différentielle du premier ordre, à cœfficients constants et dont la solution est de la forme $sol = sol_H + sol_P$ avec $sol_H = A\exp(-\frac{t}{\tau})$ et $sol_P = Cte = \frac{\tau g}{R} = \frac{Rmg}{\lambda} = \omega_{\text{lim}}$ ici. D'où $\omega = A\exp(-\frac{t}{\tau}) + \omega_{\text{lim}}$ et en utilisant la condition initiale $\omega(0) = 0$, on en déduit finalement

$$\omega = \frac{Rmg}{\lambda}(1 - \exp(-\frac{t}{\tau})) = \omega_{\text{lim}}(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$$

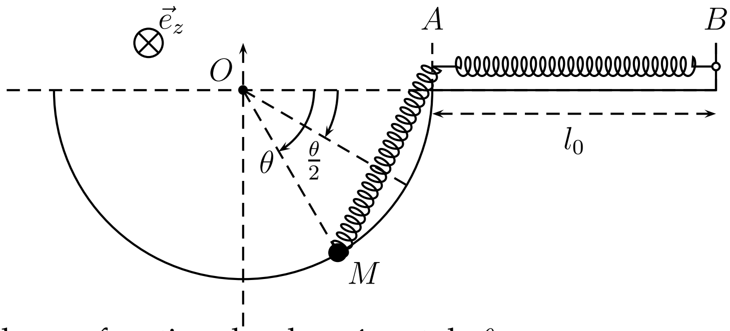
3. En considérant à présent le système { masse + fil + cylindre }, la résultante des forces appliquées est $\vec{F} = \vec{p} + \vec{T} - \vec{T} + \vec{f} + \vec{R} = \vec{p} + \vec{f} + \vec{R}$ il n'est donc plus nécessaire de calculer $\vec{T}$ dans un premier temps.
Par contre, le moment cinétique du système est la somme du moment cinétique du cylindre (nul) et du moment cinétique de P : $L_{Ox}(P) = +mRv = mR\dot{z} = mR^2\dot{\theta}$.
Par application du théorème scalaire du moment cinétique,

$$\frac{dL_{Ox,\text{cyl et }P}}{dt} = \mathcal{M}_{Ox}(\vec{p}) + \Gamma_{Ox} + \mathcal{M}_{Ox}(\vec{R}) \Rightarrow mR^2\ddot{\theta} = +mgR - \lambda\dot{\theta} + 0 = 0$$

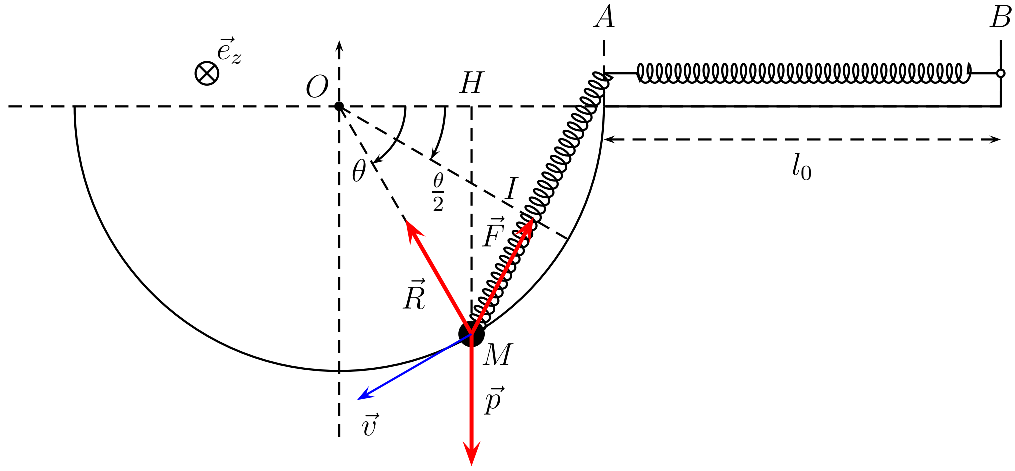
On retrouve bien la même équation.

4. Ce système permet, après un régime transitoire de durée 4 à 5 τ d'obtenir ω constant. On peut retrouver ce genre de dispositif en horlogerie ou dans des boites à musique.

Exercice 4 : Point matériel dans une rigole
Un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement dans une rigole circulaire de centre O et de rayon R.
Il est soumis à la force de rappel d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, fixé en A tel que $AB = l_0$.



1. Par application du théorème scalaire du moment cinétique suivant l'axe Oz normal au plan de la figure et vers le fond, déterminer la position d'équilibre θ_0 en fonction de m, g, k, et R.
2. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de M vérifiée par θ.
3. Quelle est la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre en fonction des données et de θ_0.
   On pourra poser $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll \theta_0$ et en déduire l'équation différentielle vérifiée par ε.



Comme on travaille en référentiel galiléen et Oz est un axe fixe, on utiliser le théorème moment cinétique (dans sa version scalaire).

1. Les forces appliquées à M sont :
   - La réaction du support $\vec{R} = \vec{N}$ (pas de frottement) dont la direction passe par l'axe Oz. Son moment de force est donc nul et $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{R}) = 0$.
   - Le poids $\vec{p} = m\vec{g}$ de bras de levier OH où H est le projeté orthogonal de O sur la droite d'action de $\vec{p}$. Ici, $OH = R\cos\theta$ d'où $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{p}) = +mgOH = mgR\cos\theta$.
   - La force de rappel $\vec{F} = k(l - l_0)\vec{u} = k.MA\vec{u}$ et de bras de levier OI.
     $\vec{u}$ est le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}$ et I est le projeté de O sur (MA).
     Ici, $MA = 2MI = 2R\sin\frac{\theta}{2}$ et $OI = R\cos\frac{\theta}{2}$ d'où un moment de force

$$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}) = -F.OI = -k.AM.OI = -2kR^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = -kR^2\sin\theta$$

   À l'équilibre, le point M est immobile $\theta = \theta_0$, sa vitesse est nulle donc sont moment cinétique est nul et constant. Par application du théorème scalaire du moment cinétique on a alors

$$\frac{dL_{Oz}(M)}{dt} = 0 = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{p}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}) \Rightarrow mgR\cos\theta_0 - kR^2\sin\theta_0 = 0 \Rightarrow \tan\theta_0 = \frac{mg}{kR}$$

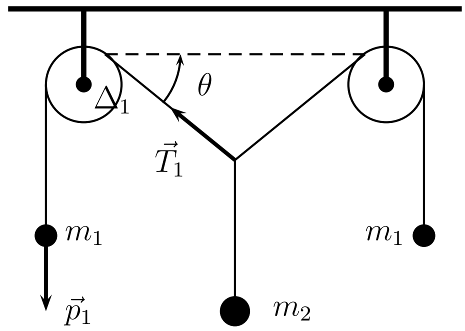
2. Hors équilibre, le point M se déplace et son moment cinétique varie. Sa projection selon Oz est $L_{0z}(M) = +mRv$ car $OM = R$ est la distance la plus faible entre $\vec{v}$ et Oz. Comme le mouvement de M est circulaire, on a également $v = R\dot{\theta}$ d'où $L_{Oz}(M) = mR^2\dot{\theta}$.
   Par application du théorème scalaire du moment cinétique on a maintenant

$$\frac{dL_{Oz}(M)}{dt} = mR^2\ddot{\theta} = mgR\cos\theta - kR^2\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\cos\theta + \frac{k}{m}\sin\theta = 0$$

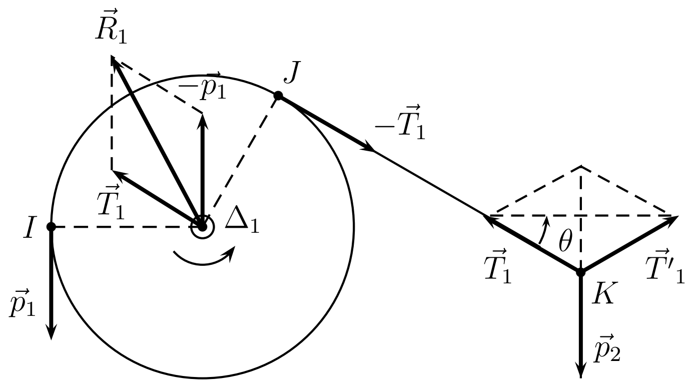
3. Pour déterminer la période T_0 des petites oscillations, on doit se ramener à l'équation d'un l'oscillateur harmonique, faire apparaître ω_0 dans l'équation puis en déduire T_0.
   Dans l'équation précédente, on pose $\theta = \theta_0 + \varepsilon$, c'est à dire qu'on ne considère que des oscillations d'amplitude ε faible autour de la position d'équilibre θ_0. On a alors $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_0 + \ddot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon}$ et
   $$\ddot{\varepsilon} - \frac{g}{R}\cos(\theta_0+\varepsilon) + \frac{k}{m}\sin(\theta_0+\varepsilon) = 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} - \frac{g}{R}(\cos\theta_0.\cos\varepsilon - \sin\theta_0\sin\varepsilon) + \frac{k}{m}(\sin\theta_0\cos\varepsilon + \cos\theta_0.\sin\varepsilon) = 0$$
   On utilise ensuite $\cos\varepsilon \simeq 1$ et $\sin\varepsilon \simeq \varepsilon$ et $-g\cos\theta_0 + kR\sin\theta_0 = 0$ pour simplifier l'équation précédente. Il vient alors $\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{g}{R}\sin\theta_0 + \frac{k}{m}\cos\theta_0$ et on en déduit $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Exercice 5 : Statique

On considère le dispositif suivant à l'équilibre et dans un plan. Les deux poulies, identiques, sont idéales (masses et moment cinétiques négligeables, rotation sans frottement) et les fils idéaux (masses nulles, inextensibles et parfaitement souples) et ne glissent pas.



1. Quelles sont les forces appliquées à la poulie 1 d'axe de rotation Δ_1 ? (ou plutôt au système { poulie + fil en contact avec la poulie })
2. Montrer que $T_1 = p_1$ où $p_1 = ||\vec{p_1}||$ est la norme du poids de la masse 1.
   On appliquera le théorème scalaire du moment cinétique à la poulie 1.
3. Représenter la réaction de l'axe Δ_1 sur la poulie.
4. Déterminer θ et commenter.



1. On travaille en référentiel galiléen.
   L'axe de rotation Δ_1 de la poulie de gauche, représentée ci-contre, est fixe.
   On l'oriente comme indiqué.
   On peut appliquer le théorème du moment cinétique à la poulie.
   Les fils utilisés étant idéaux, ils transmettent entièrement l'intensité des forces à la poulie.

   Bilan des forces appliquées à la poulie : $\vec{R}_1$ la réaction de l'axe Δ_1, on néglige son poids, $\vec{p}_1$ (le poids de m_1) et $-\vec{T}_1$ par intermédiaire des fils idéaux.

Calcul des projections des moments de forces :

- Le point d'application de $\vec{p}_1$ est I d'où un bras de levier $OI = R$ le rayon de la poulie. Comme $\vec{p}_1$ tend à faire tourner la poulie dans le sens d'orientation de Δ_1, on obtient $\mathcal{M}_{\Delta_1}(\vec{p}_1) = +Rp_1 = Rm_1g$ la projection du moment de $\vec{p}_1$ sur Δ_1.
- La force $-\vec{T}_1$ est appliquée au point J, le bras de levier est là aussi $OJ = R$ mais comme elle tend à faire tourner la poulie en sens inverse, $\mathcal{M}_{\Delta_1}(-T_1) = -RT_1$
- Quant à la réaction $\vec{R}_1$ de l'axe de la poulie, son point d'application est sur l'axe d'où un moment de force $\mathcal{M}_{\Delta_1}(\vec{R}_1) = 0$.

Application du théorème scalaire du moment cinétique : à l'équilibre, le moment cinétique de la poulie est constant (il est d'ailleurs nul si la masse de la poulie est négligée) et par application du théorème scalaire du moment cinétique,

$$\frac{dL_{\Delta_1}(\text{Poulie})}{dt} = 0 = \mathcal{M}_{\Delta_1}(\vec{p_1}) + \mathcal{M}_{\Delta_1}(-\vec{T_1}) + \mathcal{M}_{\Delta_1}(\vec{R_1}) = Rp_1 - RT_1 \Rightarrow T_1 = p_1 = m_1 g$$

2. La poulie de gauche étant à l'équilibre, la résultante des forces qui lui sont appliquées est nulle (première loi de Newton) d'où $\vec{p_1} - \vec{T_1} + \vec{R_1} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R_1} = -\vec{p_1} + \vec{T_1}$
3. En reprenant le même raisonnement que pour le 1., on montre que $T_1' = m_1 g$ la norme de la force $\vec{T_1'}$.
   Le point K étant à l'équilibre, la résultante des forces qui lui sont appliquées est nulle : $\vec{T_1} + \vec{T_1'} + \vec{p_2} = \vec{0}$ avec $\vec{p_2} = m_2.\vec{g}$ et $T_1 = T_1' = m_1 g$.
   Par projection sur l'axe vertical ascendant,
   $$T_1.\sin\theta + T_1'\sin\theta - p_2 = 0 \Rightarrow 2m_1 g\sin\theta = p_2 = m_2 g \Rightarrow \sin\theta = \frac{m_2}{2m_1}$$
   On remarque que l'équilibre n'est possible que si $m_2 < 2m_1$.