

TRAVAUX DIRIGÉS DE M<sub>6</sub>

**Exercice 1 : Premier vol habité (par un homme) ★★**



Le 12 avril 1961, le commandant soviétique Y. Gagarine fut le premier cosmonaute, le vaisseau spatial satellisé était un engin de masse  $m = 4725$  kg. Les altitudes au périgée  $P$  et à l'apogée  $A$  étaient  $z_P = 180$  km et  $z_A = 327$  km.

Exprimer la vitesse  $v$  du satellite en fonction de son altitude  $z$ , de  $z_P, z_A, M_T, R_T$  (masse et rayon de la Terre) et de  $\mathcal{G}$ , la constante de gravitation. Calculer  $v$  en  $P$  et en  $A$ .

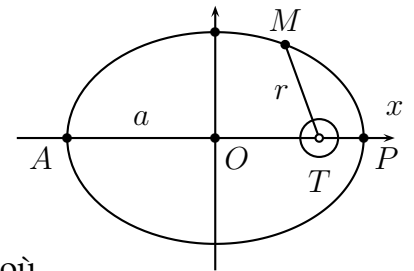
Comme l'énoncé parle de périgée et d'apogée, on est dans le cas d'un état lié (mouvement elliptique, heureusement pour Youri!) et la relation  $E_m = -\frac{k}{2a}$  s'applique.

En notant  $r = TM = z + R_T$  la distance entre le centre de la Terre et l'engin spatial, on a ici

$2a = r_A + r_P = R_T + z_A + R_T + z_P = 2R_T + z_A + z_P$  et  $k = \mathcal{G}mM_T$  d'où

$$E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{2R_T + z_A + z_P} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}mM_T}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2\mathcal{G}M_T \left( \frac{1}{z + R_T} - \frac{1}{2R_T + z_A + z_P} \right)}$$



Les applications numériques donnent  $v_P = v_{\max} \simeq 7,9$  km.s<sup>-1</sup> et  $v_A = v_{\min} \simeq 7,7$  km.s<sup>-1</sup>.

**Exercice 2 : Satellite et frottements ★★**

Un satellite  $M$  de masse  $m$  est placé sur une orbite circulaire de rayon  $r_0$  contenue dans le plan équatorial de la Terre. On travaillera dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_{Géo}$  considéré comme galiléen.

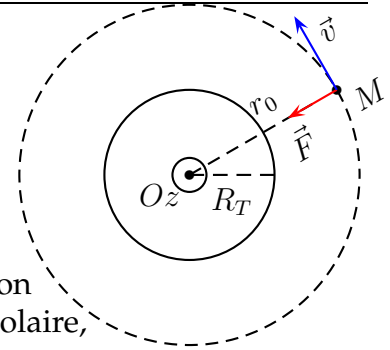
On notera  $\Omega$  la vitesse angulaire de rotation de la Terre dans  $\mathcal{R}_{Géo}$ .

1. Déterminer la vitesse  $v_0$  du satellite, l'énergie potentielle  $E_{p0}$ , cinétique  $E_{c0}$  et mécanique  $E_{m0}$  du satellite sur cette orbite en fonction de la constante de gravitation  $\mathcal{G}$ ,  $M_T$  la masse de la Terre et des données.
2. Avant d'être placé sur son orbite, le satellite est posé sur le sol, en un point  $P$  de latitude  $\lambda$ . Sa vitesse est la vitesse d'entraînement  $\vec{v}_e$  due à la rotation de la Terre, supposée sphérique de rayon  $R_T$ . Déterminer  $E_{p1}$ ,  $E_{c1}$  et  $E_{m1}$  du satellite au point  $P$ . Pour le placer sur son orbite, il faut lui fournir  $\Delta E = E_{m0} - E_{m1}$ .  
Où doit-on placer les bases de lancement pour que  $\Delta E$  soit minimale?
3. On suppose maintenant que l'altitude du satellite étant faible devant  $R_T$ , il subit les frottements de l'atmosphère. Son énergie mécanique  $E_m$  diminue avec le temps selon la loi  $E_m = E_{m0}(1 + \alpha t)$ . Quel est le signe de  $\alpha$ ? On suppose que la trajectoire reste pratiquement circulaire. Déterminer en fonction de  $t$ , le rayon  $r$  de la trajectoire, et la vitesse  $v$  du satellite. Comment  $v$  varie-t-elle? Commentez.

1. On est dans le cas classique d'un mouvement circulaire.

En travaillant dans la base polaire, on a ici  $\vec{OM} = r_0 \cdot \vec{e}_r$  d'où  $\vec{v} = r_0 \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta$  et enfin  $\vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r_0 \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$ .

La seule force appliquée au satellite { M } est la force de gravitation  $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r_0^2} \vec{e}_r$ .



Dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen, par application du principe fondamental de la dynamique sur M dans la base polaire,

$$m(-r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r_0 \ddot{\theta} \vec{e}_\theta) = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r_0^2} \vec{e}_r$$

- Par projection selon  $\vec{e}_\theta$ , on obtient  $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow r_0 \dot{\theta} = v_0 = Cte$ , le mouvement est donc circulaire et uniforme :  $\dot{\theta} = \frac{v_0}{r_0}$ .
- Par projection selon  $\vec{e}_r$ , on obtient

$$-mr_0 \dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r_0^2} \Rightarrow r_0 \frac{v_0^2}{r_0^2} = \frac{\mathcal{G}M_T}{r_0^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_0}}$$

On en déduit ensuite son énergie cinétique  $E_{c0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\mathcal{G}mM_T}{2r_0}$  et  $E_{m0} = E_{c0} + E_{p0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{k}{r_0}$  avec  $k = \mathcal{G}mM_T$  d'où  $E_{m0} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{2r_0}$  (on retrouve  $E_{m0} = -\frac{k}{2a}$  avec  $a = r_0$  car l'état est lié).

2. Le satellite étant posé à la surface du globe on a simplement  $E_{p1} = -\frac{k}{R_T} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T}$ .

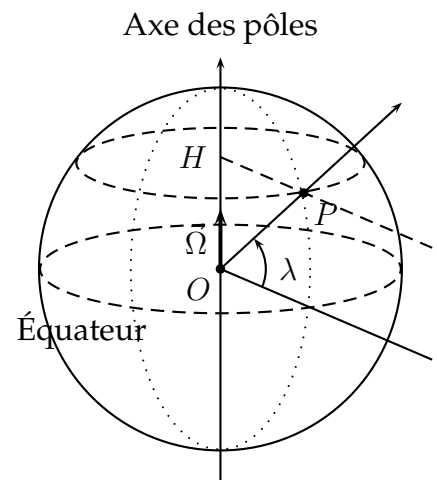
Dans le référentiel géocentrique, il est animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon  $r_1 = HP = R_T \cos \lambda$  et en notant  $\Omega$  la vitesse angulaire de rotation de la Terre dans  $\mathcal{R}_{Gé0}$  et  $v_e = \Omega \cdot r_1 = \Omega \cdot R_T \cos \lambda$ .

On en déduit  $E_{c1} = \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2}m\Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda$  et

$$E_{m1} = E_{c1} + E_{p1} = \frac{1}{2}m\Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda - \frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T}$$

Pour placer le satellite sur son orbite, il faut lui fournir  $\Delta E = E_{m0} - E_{m1}$ .

Cette énergie sera minimale quand  $\lambda = 0$ , c'est à dire sur l'équateur.



3. Si l'énergie mécanique de M diminue,  $\frac{dE_m}{dt} = E_{m0}\alpha < 0$  or le satellite était (et reste) dans un état lié donc  $E_{m0} < 0 \Rightarrow \alpha > 0$ .

Si on considère que la trajectoire reste quasiment circulaire, on peut encore utiliser la relation

$$E_m = -\frac{k}{2r} \Rightarrow E_{m0}(1 + \alpha t) = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{2r} \Rightarrow r = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{2E_{m0}(1 + \alpha t)} = \frac{r_0}{1 + \alpha t}$$

Donc r diminue au cours du temps.

En reprenant le résultat du 1.,  $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_0}(1 + \alpha t)}$  augmente au cours du temps.

Cela provient du fait que  $E_m = -E_c \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = -\frac{E_m}{dt} > 0$ , la force de frottement n'est pas la seule à intervenir.

**Exercice 3 : Troisième loi de KEPLER ★★**

1. Sachant que la trajectoire de la Terre est presque un cercle de rayon  $a = 150.10^6$  km et que la constante de gravitation  $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$  SI, calculer la masse du soleil.

- La période de révolution de Mars autour du Soleil est de 1,9 année, en déduire  $a'$  le demi grand axe de l'ellipse décrite par Mars du soleil.
- Une comète décrit une orbite elliptique autour du soleil, avec une période de 11,5 années. La distance au périhélie est  $r_P = 0,22a$  ( $a$  : distance terre soleil si on considère le mouvement de la Terre autour du Soleil comme circulaire), calculer la distance  $r_A$  de l'apogée au soleil et l'excentricité  $e$  de la trajectoire elliptique.  $e$  étant proche de 1, calculer sa vitesse maximale.
- La comète de Halley est passée en 1986 au voisinage de la Terre. Sa période de révolution autour du Soleil est de 76 ans et sa distance minimale au Soleil est 0,59 u.a (unité astronomique correspondant à la distance moyenne Terre Soleil).  
Calculer la plus grande distance de cette comète au Soleil et l'excentricité de sa trajectoire.

- Mouvement quasi circulaire de la Terre autour du Soleil  
Pour relier  $M_S$  à  $a$ ,  $\mathcal{G}$  et des valeurs connues, on peut passer par l'expression de  $v$  la vitesse de la Terre sur son orbite.  
L'énergie mécanique de la Terre est

$$E_m = -\frac{k}{2a} = E_c + E_p = E_c - \frac{k}{a} \Rightarrow E_c = \frac{\mathcal{G}M_T M_S}{2a} = \frac{1}{2}M_T v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{\mathcal{G}M_S}{a}$$

Le mouvement étant circulaire et uniforme, on a également

$$v = \frac{2\pi a}{T} \Rightarrow \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_S}{a} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S} \Rightarrow M_S = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G}T^2}$$

Où  $T$  est la période de révolution de la Terre autour du Soleil :  $T \simeq 365,25 \times 24 \times 3600$  secondes.

L'application numérique donne  $M_S \simeq 2.10^{30}$  kg.

- Par utilisation de la Troisième loi de Kepler,

$$\left[\frac{T^2}{a^3}\right]_{\text{Terre}} = \left[\frac{T^2}{a^3}\right]_{\text{Mars}} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{T'^2}{a'^3} \Rightarrow a' = a \left(\frac{T'}{T}\right)^{\frac{2}{3}} \simeq 230.10^6 \text{ km.}$$

- À nouveau, par utilisation de la Troisième loi de Kepler,

$$\left[\frac{T^2}{a^3}\right]_{\text{Terre}} = \left[\frac{T^2}{a^3}\right]_{\text{Comète}} \Rightarrow a'' = a \left(\frac{T''}{T}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{r_P + r_A}{2} \Rightarrow r_A = 2a \left(\frac{T''}{T}\right)^{\frac{2}{3}} - r_P \simeq 1497.10^6 \text{ km}$$

Par ailleurs, comme

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \Rightarrow r_A = \frac{p}{1 - e} \text{ et } r_P = \frac{p}{1 + e} \Rightarrow e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P} \simeq 0,96$$

Comme  $e \simeq 1$ , on a presque un mouvement parabolique,

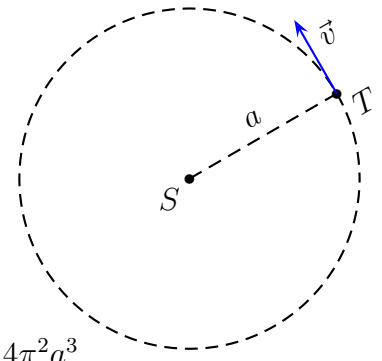
$$E_m \simeq 0 \Rightarrow E_c = -E_p \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{r} = \frac{\mathcal{G}mM_S}{r} \Rightarrow v_{\max} = v_P \simeq \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_S}{r_P}} \simeq 90 \text{ km.s}^{-1}$$

- Toujours par utilisation de la Troisième loi de Kepler, on calcule de la même manière  $r_A = 35,29$  u.a et  $e = 0,97$ .

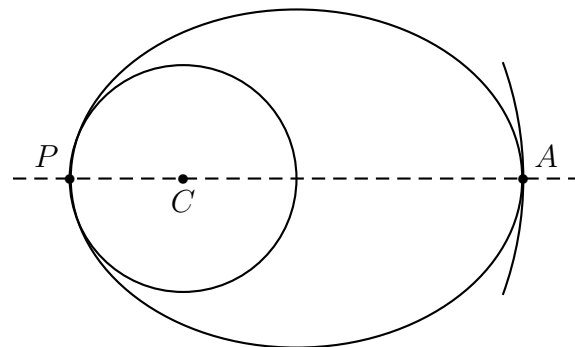
#### Exercice 4 : Changement d'orbite - Ellipse de transfert ★★

La Terre est supposée à symétrie sphérique, de centre  $C$ , de rayon  $r_0$ . On note  $g_0$  l'intensité du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol. On donne  $r_0 = 6400$  km et  $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

On rappelle que pour une conique, l'équation paramétrique en coordonnées polaires est  $r(\theta) = \frac{p}{1+e \cos \theta}$



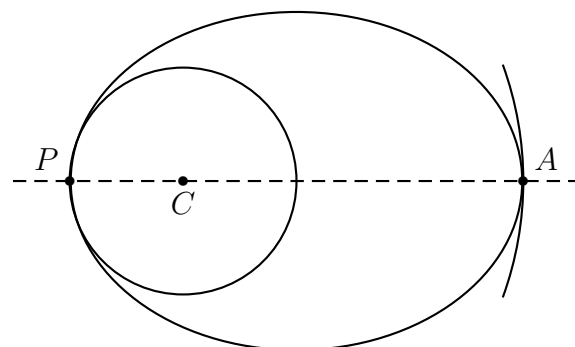
1. Un satellite, de masse  $m$ , décrit une trajectoire circulaire rasante de rayon  $r_0$ . Quelles sont les expressions de sa vitesse  $v_0$  et de sa période de révolution  $T_0$  ?
2. Un satellite géostationnaire semble fixe pour un observateur terrestre. Déterminer sa vitesse  $v_1$  et le rayon  $r_1$  de son orbite.
3. On veut faire passer un satellite de l'orbite circulaire rasante de rayon  $r_0 = CP$  à l'orbite géostationnaire de rayon  $r_1 = CA$ .



Un moteur auxiliaire permet de modifier la vitesse du satellite aux points  $P$  et  $A$ . Après l'allumage du moteur en  $P$ , le satellite parcourt une demi-ellipse, dite de transfert jusqu'en  $A$  où le moteur s'allume à nouveau pour le ralentir.

- (a) Déterminer les vitesses  $v'_0$  et  $v'_1$  du satellite en  $P$  et en  $A$  sur sa trajectoire elliptique.
- (b) Calculer la durée  $\tau$  du transfert de  $P$  à  $A$ .
- (c) Quelle est l'excentricité de l'orbite de transfert.

1. PFD sur satellite (cf cours pour la 1ère vitesse cosmique)  $\Rightarrow v_0 = \sqrt{g_0 r_0} \simeq 7,92 \text{ km.s}^{-1}$  et  $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} \simeq 1 \text{ h } 25 \text{ min}$ .
2. cf cours, plusieurs méthodes possibles (pfd, utilisation 3e loi Kepler etc...)  $T_1 = 1 \text{ jour}$ ,  $v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}$  et  $r_1 = r_0 (\frac{T_1}{T_0})^{3/2}$  d'où  $v_1 = 3,08 \text{ km.s}^{-1}$  et  $r_1 = 42400 \text{ km}$  (36 000 km du sol).
3. Cette question est un classique de ce genre de problème : on utilise souvent des orbites de transfert, le but étant de laisser allumer les moteurs peu de temps à des endroits stratégiques.



- (a) Puisque l'on connaît les vitesses  $v_0$  et  $v_1$ , le but de cette question est de savoir combien de temps laisser allumer les moteurs. On nous demande de déterminer les vitesses  $v'_0$  et  $v'_1$  du satellite en  $P$  et en  $A$  sur sa trajectoire elliptique, pour cette question on a assez peu de choix pour la méthode puisque l'on ne sait pas grand chose sur les trajectoires elliptiques. Le mieux est d'utiliser une méthode énergétique. La formule pour l'énergie le long d'une trajectoire elliptique a été démontrée en cours. Sur l'ellipse,  $E_m = -\frac{k}{2a} \Rightarrow v = r_0 \sqrt{2g_0 (\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0+r_1})}$  soit  $v'_0 = 10,4 \text{ km.s}^{-1}$  et  $v'_1 = 1,56 \text{ km.s}^{-1}$ .
- (b) On cherche un temps le long d'une ellipse, une fois encore, on n'a pas vraiment le choix de la méthode : par utilisation de la 3e loi de Kepler, le satellite a le même  $T^2/a^3$  dans l'état 0 et sur l'ellipse de transfert.  $\tau = \frac{1}{2} T_0 (\frac{r_0+r_1}{2r_0})^{3/2} \simeq 5 \text{ h } 14 \text{ min}$ .
- (c) On prend la formule donnée pour une conique, en l'utilisant au périhélie et à l'apogée ( $\theta = 0$  ou  $\pi$ ), puis on résout connaissant  $r_1$  et  $r_0$ . On trouve  $e = \frac{r_1-r_0}{r_1+r_0}$ .

**Exercice 5 : Satellite géostationnaire ★**

Un satellite est géostationnaire si il semble immobile pour un observateur situé sur la surface de la Terre.

1. Montrer que le satellite orbite forcément dans le plan équatorial. On pourra représenter les forces appliquées au satellite dans le référentiel géocentrique galiléen.

- Calculer le rayon  $R$  de la trajectoire du satellite géostationnaire dans le référentiel géocentrique connaissant la valeur du champ de pesanteur au sol  $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  et le rayon de celle-ci :  $R_T = 6400 \text{ km}$ .
- Calculer l'énergie à fournir pour satelliser ainsi une masse  $m = 1 \text{ kg}$  depuis un point à la surface de la Terre et à l'équateur. Exprimer cette énergie en kWh et commenter.

1.  $R = \left(\frac{g_0 R_T^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$  où  $T = 1$  jour sidéral  $\simeq 23 \text{ h } 56 \text{ min}$ . 2.  $W = \frac{2m\pi^2}{T^2}(R^2 - R_T^2) + mg_0 R_T \left(1 - \frac{R_T}{R}\right) \simeq 57,7 \text{ J} \simeq 16 \text{ kWh}$  relativement faible car on a négligé les frottements, le rendement des moteurs ...

### Exercice 6 : Influence du lieu de lancement d'un satellite ★★

On projette de construire une nouvelle base de lancement de fusée et deux choix nous sont proposés. L'un des deux est situé à Paris et l'autre à Kourou en Guyane Française. Les familles préféreraient que la base soit située à Paris pour éviter l'éloignement. On se propose de calculer la différence de carburant nécessaire pour lancer un satellite depuis ces deux bases.

Donnée : Rayon terrestre  $R_T = 6400 \text{ km}$ ; accélération de pesanteur à la surface de la terre :  $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ ; un jour sidéral  $T_S = 23 \text{ h } 56 \text{ min}$

- Quel va être le référentiel d'étude?
- On veut placer le satellite sur une orbite basse (i.e. rasante). Calculez l'énergie d'un satellite de masse  $m = 100 \text{ kg}$  en orbite basse.
- Comparez l'énergie à fournir au satellite dans le cas où il est placé à Kourou ( $5^\circ$  Nord) et à Paris ( $48^\circ$  Nord). A-t-on intérêt à lancer le satellite vers l'est ou vers l'ouest? (En Israël, le lancement se fait vers l'ouest et à Kourou le lancement se fait vers l'est)
- Dans le cas d'un satellite géostationnaire, voyez vous un autre intérêt (énergétiques) à la base de Kourou par rapport à une située à Paris?

#### 1. Géocentrique

- En orbite basse, on n'a pas de variation d'altitude donc d'énergie potentielle mais seulement une variation d'énergie cinétique. La vitesse s'obtient alors de la façon suivante (PFD en coord polaire) :  $mg_0 = mv^2/R_T \Rightarrow v = \sqrt{R_T g_0} = 7,9 \text{ km/s}$ .

Dans le cas d'un mouvement circulaire  $E_c + E_p = E_m = E_p/2 \Rightarrow E_c = -E_p/2 = -E_m$  d'où  $E_m = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mg_0 R_T = -3,1 \text{ GJ}$

- L'énergie cinétique initiale est  $\frac{1}{2}m(R_T \cos \lambda \Omega)^2$  avec  $\lambda$  la latitude et  $\Omega = \frac{2\pi}{T_S}$  la vitesse de rotation de la terre. A.N.  $E_{c,i}(\text{Kourou}) = 1,1 \times 10^7 \text{ J}$  ;  $E_{c,i}(\text{Paris}) = 0,49 \times 10^7 \text{ J}$  ;  $\Delta E_{c,i} = 5,9 \text{ MJ}$

L'énergie potentielle initiale est la même dans les deux cas  $E_{p,i} = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{R_T}$  or  $\mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} = g_0$  d'où  $E_{p,i} = -g_0 m R_T = -6,3 \text{ GJ}$  (cohérent avec la question précédente où on a dit  $E_c = -E_p/2$ )

On doit donc apporter  $E_p/2 = 3,1 \text{ GJ}$ , le gain d'un lancement à Kourou plutôt qu'à Paris est donc d'environ 0,2 % assez faible a priori. Mais ce gain néglige le poids de la fusée et du carburant que l'on doit aussi envoyer dans l'espace, (et dont une partie importante du carburant brûle au début et donc ne gagne pas autant d'énergie que le satellite en proportion). Le poids d'Ariane V au lancement est de 750 t pour une charge utile de 20 t

On a intérêt à lancer le satellite dans le même sens que la rotation de la terre : vers l'est pour bénéficier de l'énergie initiale conférée par la rotation de la terre. Dans le cas contraire on perd de l'énergie.

- On est déjà sur la bonne orbite ou presque.

Les bases de lancement (à part le site de Xichang) sont placés de façon à ce que les endroits où retombent les débris lors des lancements ou lors des échecs de lancements soient inhabités.

Lorsqu'il faut emporter du carburant supplémentaire pour envoyer un satellite, il faut aussi prendre en compte le poids de ce carburant que la fusée doit transporter, ce que nous n'avons pas fait dans cet exercice mais qui rend les bases équatoriales un peu plus intéressantes que ce que nous avons montré.

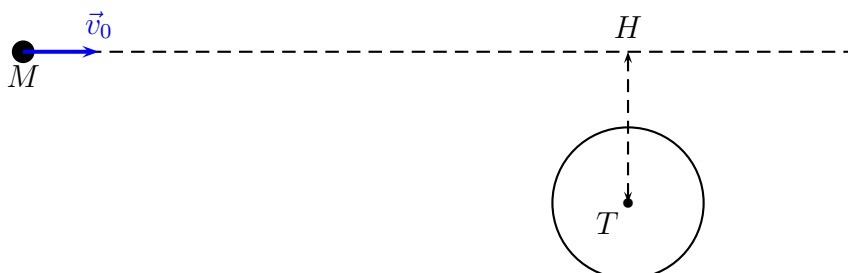
Pour les orbites polaires, le site de lancement est en fait indifférent.

**Exercice 7 : Menace sur la Terre ★★**



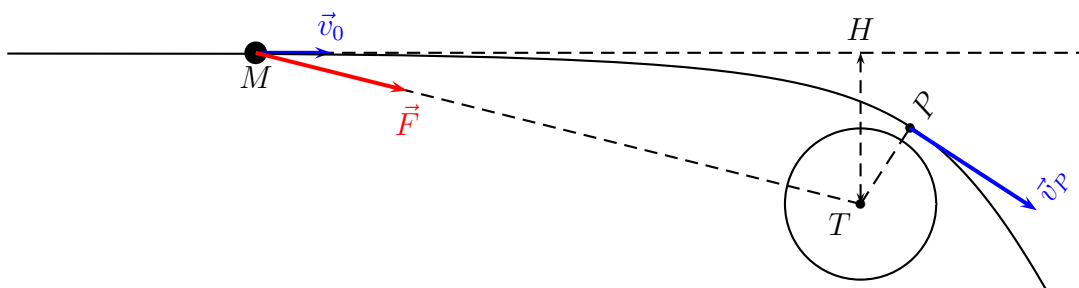
Un météore arrive d'une distance très grande par rapport au rayon de la Terre  $R_T$  avec une vitesse  $v_0 = 30 \text{ km.s}^{-1}$  et un paramètre d'impact  $b = TH = 50R_T$  (Cf figure).

On note  $P$  le périhélie du météore et  $r_P$  la distance  $TP$  où  $T$  est le centre de la Terre.



On donne : la constante de gravitation  $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$  ; la masse de la Terre  $M_T = 6.10^{24} \text{ kg}$  et  $R_T = 6400 \text{ km}$ .

1. Quelles sont les grandeurs qui se conservent au cours du mouvement ?
2. Quelle est la nature de trajectoire du météore (ellipse, parabole ou hyperbole) ? Justifier.
3. Montrer que le moment cinétique du météore par rapport à  $T$  vaut  $L_T = mbv_0$ .
4. En écrivant les lois de conservation, déterminer l'équation vérifiée par  $r_P$ .
5. Calculer  $r_P$  et conclure



1. La force  $\vec{F}$  appliquée sur le système { Comète  $M$  } est centrale et conservative, on a donc conservation de son énergie mécanique  $E_m$  et de  $\vec{L}_T$  son moment par rapport à  $T$ .
2. La trajectoire de la comète est une conique dont on détermine la nature par le calcul de son énergie mécanique. Lorsqu'elle est très loin de la Terre,  $r \rightarrow \infty$  et son énergie potentielle  $\frac{-k}{r}$  est donc quasiment nulle. Pourtant, son énergie mécanique est  $\frac{1}{2}mv_0^2 > 0$ , on a donc

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 > 0 \Rightarrow \text{mouvement hyperbolique}$$

3. Comme il y a conservation du moment cinétique, on peut le calculer à n'importe quel moment et en particulier lorsque la comète est très loin. On a alors une vitesse  $v_0$  et paramètre d'impact  $b$  soit

$$L_T = ||\vec{L}_T|| = m. ||\overrightarrow{TM} \wedge \vec{v}_0|| = mbv_0$$

4. On écrit la conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique entre ( $r \rightarrow \infty; v = v_0$ ) et ( $r = r_P; v = v_P$ ) :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{\mathcal{G}M_T m}{r_P} \text{ et } L_T = mv_0 b = mv_P r_P$$

car en  $P$  le paramètre d'impact est  $r_P$ . On en déduit par substitution :

$$v_P = \frac{b}{r_P}v_0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 \left(1 - \frac{b^2}{r_P^2}\right) = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r_P} \Rightarrow r_P^2 + \frac{2\mathcal{G}M_T}{v_0^2}r_P - b^2 = 0$$

5. On pouvait résoudre numériquement l'équation du second degré précédente ou bien calculer l'expression littérale de sa racine positive :

$$r_P = -\frac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \text{ avec } \Delta = \sqrt{\frac{4\mathcal{G}^2 M_T^2}{v_0^4} + 4b^2} \text{ et } b = 50R_T$$

L'application numérique donne  $r_P \simeq 320.10^3$  km soit environ  $49,9R_T > R_T$ . Si cette application numérique est bonne, la Terre ne devrait donc pas être percutée par cette comète, ouf!

**Exercice 8 : Champs à la surface de la Terre \***

déterminer le champ de gravitation créé par la Terre, la Lune puis le soleil en un point de la surface de la Terre. Conclure.

On donne :

Rayon de la Terre : $R_T = 6,4.10^3$ km	Masse de la Terre $M_T = 6,0.10^{24}$ kg
Distance Terre – Lune : $d_{TL} = 38.10^4$ km	Masse de la Lune $M_L = 7,3.10^{22}$ kg
Distance Terre – Soleil : $d_{TS} = 15.10^7$ km	Masse du soleil $M_S = 2,0^{30}$ kg

En  $m/s^2$  :

- terre à sa surface : 9.7734375 ;
- lune à la surface de la terre : 3.372963988919668e-05 ;
- sol à la surf de la terre : 0.005930666666666667 ;

Lune et soleil ont une influence complètement négligeable en terme de gravité direct sur les objets (le phénomène de marée est plus complexe)

**Exercice 9 : Force de gravitation \*\***

1. La valeur du champ de gravitation à la surface de la Terre est  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ , le rayon terrestre  $R = 6,40.10^6$  m, la constante de gravitation universelle  $G = 6,672.10^{-11}$  u.s.i.  
En déduire la masse  $M$  de la Terre supposée sphérique et homogène.
2. Comparer le résultat obtenu avec celui déduit de l'étude du mouvement de la Lune : celle-ci, située à la distance  $a = 3,86.10^8$  m du centre de la Terre effectue un tour complet autour de la Terre en environ 27 jours et 7 heures.

On admet que le centre de la Terre peut être considéré comme l'origine d'un référentiel galiléen.

Réponse : a. Le module du champ de gravitation terrestre répond à  $G(r) = GM/r^2$ , avec à la surface de la Terre :  $G(r = R) = GM/R^2 = g$  valeur du champ de pesanteur. D'où  $M = gR^2/G$ . Par l'étude du mouvement de la Lune :  $M = 4\pi^2 a^3 / GT^2$ . D'où  $m = 6,02.10^{24}$  kg.

(Attention, indentations non mises en forme ci-dessous, à corriger à la main)

$G = 6.672e-11$   
 $RT = 6.4e6 \text{ #m}$   
 $MT = 6e24 \text{ #kg}$   
 $dTL = 38e7 \text{ #m}$   
 $dTS = 15e10 \text{ #m}$   
 $ML = 7.3e22 \text{ #kg}$   
 $MS = 2e30 \text{ #kg}$

```
def exo10(a) :
return ML*a**2-MT*(dTL-a)**2
def dichot(f,a,b) :
while b-a>1e-7 :
m = (b+a)/2
fm = f(m)
if f(a)*fm < 0 :
b= m
else :
a = m
return (a+b)/2,a,b
res,a,b = dichot(exo10,0,dTL)
print(res/1e6)
```

```
print("ou sol analytique")
delta = (4*MT**2*dTL**2 + 4*MT*dTL**2*(ML-MT))
sol1 = (-2*MT*dTL+delta**0.5)/(2*(ML-MT))
```

342 000 km

### Exercice 10 : Masse de la Terre \*\*

1. La valeur du champ de gravitation à la surface de la Terre est  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ , le rayon terrestre  $R = 6,40.10^6 \text{ m}$ , la constante de gravitation universelle  $G = 6,672.10^{-11} \text{ u.s.i.}$   
En déduire la masse  $M$  de la Terre supposée sphérique et homogène.
2. Comparer le résultat obtenu avec celui déduit de l'étude du mouvement de la Lune : celle-ci, située à la distance  $a = 3,86.10^8 \text{ m}$  du centre de la Terre effectue un tour complet autour de la Terre en environ 27 jours et 7 heures.  
On admet que le centre de la Terre peut être considéré comme l'origine d'un référentiel galiléen.
3. La masse de la lune est  $M_L \simeq 7,36.10^{22} \text{ kg}$ .  
Déterminer en fonction de  $a$ , la position d'équigravité du système  $T - L$  par rapport à la Terre; endroit de l'espace où la force de gravitation due à  $T$  est compensée par celle due à  $L$ .

Réponse : a. Le module du champ de gravitation terrestre répond à  $G(r) = GM/r^2$ , avec à la surface de la Terre :  $G(r = R) = GM/R^2 = g$  valeur du champ de pesanteur. D'où  $M = gR^2/G$ . b. Par l'étude du mouvement de la Lune :  $M = 4\pi^2 a^3 / kT^2$ . D'où  $m = 6,02.10^{24} \text{ kg}$ .

### Exercice 11 : Modèle de l'atome de Bohr \*\*\*

À la base du modèle de Bohr se trouve le modèle planétaire d'atomes d'hydrogène : un électron de masse  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg et de charge  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C est en orbite circulaire autour d'un proton immobile en  $O$  de charge  $+e$ . On donne  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  F.m<sup>-1</sup>

1. Donner l'expression de la norme  $v$  de la vitesse de l'électron en fonction du rayon  $r$  de sa trajectoire.
2. Exprimer l'énergie mécanique  $E_m$  de l'orbite circulaire de rayon  $r$  en fonction de  $r$ ,  $e$  et  $\varepsilon_0$ .
3. Exprimer le moment cinétique de  $\vec{L}_O$  de l'atome en fonction des mêmes quantités et de  $m$ .
4. L'expérience montre que l'atome d'hydrogène ne peut émettre ou absorber des photons ne possédant que certaines longueurs d'ondes bien précises. Pour interpréter ces résultats, Niels Bohr (1885 – 1962) a proposé de quantifier la norme du moment cinétique  $L_O = n\hbar$ , où  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  J.s est la constante de Planck réduite et  $n > 0$  un entier strictement positif. En déduire que les orbites ont des rayons  $r_n = n^2 r_1$  et les énergies  $E_n = -\frac{E_1}{n^2}$ .
5. Faire les application numériques pour  $r_1$  et  $E_1$  (en eV pour cette dernière) . Commenter les résultats obtenus.

1. La trajectoire est circulaire, et par application du principe fondamental de la dynamique sur l'électron dans le référentiel lié au noyau et considéré comme galiléen.

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow -m\frac{v^2}{r} = -\frac{e \cdot e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r}}$$

2. Par définition,

$$E_m = E_m + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

**Remarque :** on retrouve  $E_m = -\frac{k}{2a}$

3. Par définition, dans la base polaire

$$\vec{L}_O = m\vec{r} \wedge \vec{v} = mrv \cdot \vec{e}_z = \sqrt{\frac{e^2 m r}{4\pi\varepsilon_0}} \cdot \vec{e}_z$$

4. En reprenant la relation précédente,

$$L_O = n\hbar \Rightarrow \sqrt{\frac{e^2 m r}{4\pi\varepsilon_0}} = n\hbar \Rightarrow r = r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{me^2} = n^2 r_1$$

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{me^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 n^2 \hbar^2} = -\frac{E_1}{n^2}$$

5. On obtient pour les AN :  $r_1 \simeq 5,3 \cdot 10^{-11}$  m et  $E_1 = 2,2 \cdot 10^{-18}$  J soit 13,6 eV.

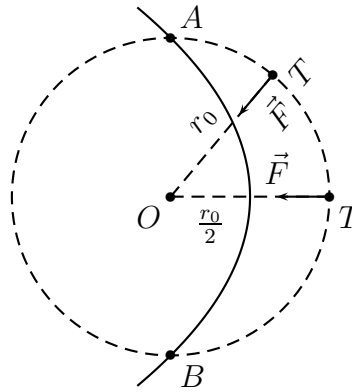
On retrouve les valeurs tout à fait cohérentes avec celles mesurées par d'autres méthodes.

### Exercice 12 : Retour d'une comète? ★★

Dans le référentiel Héliocentrique, on considère le mouvement d'une comète et celui de la Terre. La masse du Soleil sera notée  $M_0$ . La trajectoire de la Terre est supposée circulaire de rayon  $r_0$ .

1. Calculer, en fonction de  $M_0$ ,  $r_0$  et  $\mathcal{G}$  (la constante de gravitation), la vitesse  $v_0$  de la Terre sur son orbite ainsi que sa période de rotation  $T_0$ .

2. La trajectoire de la comète est coplanaire à celle de la Terre, sa distance péricentrique est  $\frac{r_0}{2}$  et sa vitesse maximale est alors  $2v_0$ . Déterminer son énergie mécanique.
  3. Cette comète reviendra-t-elle ?
1. Pour déterminer la vitesse  $v_0$  de la Terre sur son orbite quasi-circulaire puis  $T_0$  sa période de révolution, on peut utiliser le principe fondamental de la dynamique ou une méthode énergétique.



- Par application du PFD sur le système { Terre de masse  $m_T$  } en mouvement circulaire dans le référentiel héliocentrique galiléen : la seule force à considérer est la force de gravitation et dans la base polaire,

$$\overrightarrow{OT} = r_0 \cdot \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = r_0 \dot{\theta} \vec{e}_\theta = v \cdot \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{r_0} \cdot \vec{e}_r$$

$$m \vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m_T \left[ \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_\theta - \frac{v^2}{r_0} \cdot \vec{e}_r \right] = - \frac{\mathcal{G} m_T M_0}{r_0^2} \cdot \vec{e}_r$$

Par projection selon  $\vec{e}_\theta$  on obtient  $v = Cte = v_0$  et selon  $\vec{e}_r$ ,

$$-m_T \frac{v^2}{r_0} = - \frac{\mathcal{G} m_T M_0}{r_0^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_S}{a}}$$

Le mouvement étant circulaire uniforme,

$$v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} = \frac{2\pi r_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mathcal{G} M_0}} \quad (\text{on devrait obtenir un an})$$

- Par une méthode énergétique : comme la Terre est dans un état lié, son  $E_m$  est

$$E_m = -\frac{k}{2a} = -\frac{k}{2r_0} = E_c + E_p = E_c - \frac{k}{a} \Rightarrow E_c = \frac{\mathcal{G} m_T M_0}{2r_0} = \frac{1}{2} m_T v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_0}{r_0}}$$

2. Comme l'énergie mécanique de la comète est constante, on peut la déterminer en se plaçant à n'importe quel point et comme l'énoncé précise  $r_{min}$  et  $v_{max}$  au périastre ( $r_{min} = \frac{r_0}{2}$ ;  $v_{max} = 2v_0 = 2\sqrt{\frac{\mathcal{G} M_0}{r_0}}$ ), on obtient en utilisant le résultat précédent :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m (2v_0)^2 - \frac{\mathcal{G} m M_0}{r_0/2} = \frac{2\mathcal{G} m M_0}{r_0} - \frac{2\mathcal{G} m M_0}{r_0} = 0$$

ce qui signifie qu'on a affaire à une trajectoire parabolique.

3. Non elle ne reviendra pas car elle est en état de diffusion ( $E_m = 0$ ).

**Remarque :** on peut montrer que la trajectoire de la comète coupe celle la Terre en deux points diamétralement opposés (A et B sur la figure).