Travaux Dirigés de M_7

Exercice 1 : Étude d'une poulie
Une masse m de $5{,}0$ kg est suspendue à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie de masse $m_p = 1{,}0$ kg et de rayon $R = 10$ cm en liaison pivot idéale autour de son axe (horizontale) avec un support fixe. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $I = \frac{1}{2}m_pR^2$

1. Si la poulie est en rotation uniforme autour de son axe à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, quelle est la vitesse de la masse m ?
2. La poulie est retenue par un opérateur. Où ce dernier a-t-il le plus intérêt à appliquer sa force et dans quelle direction ? Quelle est la force minimale qu'il doit exercer sur la poulie pour l'empêcher de tourner ?
3. L'opérateur lâche la poulie qui se met en mouvement. Déterminer l'accélération de la masse ainsi que la tension de la corde

1. La même que celle d'un point du fil, donc un point de la périphérie de la poulie : $R\dot{\theta}$
2. L'opérateur a tout intérêt a exercer sa force le plus loin possible de l'axe de rotation et telle que la force soit tangente à la poulie pour que le bras de levier soit le plus grand possible. La force qu'il doit exercer est alors simplement l'opposé du poids de la masse (bilan sur le système {poulie+fil+masse}
3. Système : { poulie +fil+masse }; Forces extérieures : poids de la masse, poids de la poulie, réaction du support de la poulie. Ref : terrestre local galiléen. On ne connait pas la réaction du support, il faut donc utiliser un théorème qui ne la fait pas apparaitre, ici le TMC car son moment est nul.

   On pose Δ l'axe orienté tel que le moment du poids de la masse soit positif, on note x l'altitude de la masse selon un axe orienté vers le bas, on a alors d'après le TMC projeté sur Δ

   $$\frac{d}{dt}\left(I\dot{\theta} + m_pR\dot{x}\right) = mgR \Leftrightarrow (I + R^2m)\ddot{\theta} = mgR \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{mgR}{(I + R^2m)}$$

   d'où $\theta = \frac{1}{2}\frac{mgR}{(I+R^2m)}t^2$ et $\dot{\theta} = \frac{mgR}{(I+R^2m)}t$ (pour avoir x et $\dot{x}$ il suffit de multiplier par R.

   Pour avoir la tension de la corde, il suffit de faire un PFD sur la masse seule (projeté selon x)

   $$-T + P = m_p\ddot{x} = mR\ddot{\theta} \Rightarrow T = m_p(g - R\frac{mgR}{(I + R^2m)}) \Rightarrow T = mg(1 - \frac{1}{(1 + \frac{I}{mR^2})})$$

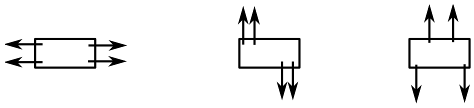
   On peut éventuellement remplacer I par l'expression donnée dans l'énoncée.

Exercice 2 : Destruction de cheminée par dynamitage On assimile une cheminée à une tige homogène OA de masse M et de longueur L. On dynamite sa base (point O) et elle amorce une rotation dans un plan vertical autour du point O bloqué par les débris de l'explosion ; on note Oz la verticale ascendante, zOx le plan de chute et $\theta(t)$ l'angle que fait OA avec Oz à l'instant t. Le moment d'inertie de la cheminée par rapport à l'axe Oy est $J = \frac{1}{3}ML^2$. Au moment de l'explosion ($t = 0$), on a $\theta \simeq 0$ et $\dot{\theta} \simeq 0$. On admet que l'action du sol sur la cheminée se résume à une force $\vec{R}$ appliquée en O. On note g l'intensité de la pesanteur.

1. Trouvez une équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ (deux méthodes possibles) . En déduire les expressions de $\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ et des constantes du problème.

2. Trouvez ensuite l'expression de $\vec{R}$ en fonction de $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}^2$ et θ puis θ seul. On utilisera des projections sur les vecteurs d'une base polaire.

   On considère la portion OB de la cheminée de longueur x, de masse $m = Mx/L$ dont le moment d'inertie par rapport à Oy est $j = \frac{1}{3}mx^2$. L'action de la partie BA de la cheminée sur la partie OB peut se résumer à l'action combinée d'une force $\vec{F} = N\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta$ appliquée en B et d'un couple $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{e}_y$
3. Trouvez les expressions de N, T et Γ en fonction de x,$\ddot{\theta}$,$\dot{\theta}^2$ et θ, puis de x et θ seuls.
4. Lorsque l'on casse un sucre en deux, par quelle méthode est-il le plus facile de le casser ? (traction, cisaillement, torsion ?) On admet que la cheminée se brise en B si $|\Gamma|$ atteint une valeur critique. Pour quelle valeur de x cette valeur critique est-elle atteinte la plus vite ? Où se brisent donc les cheminées dynamitées ?
5. L'image ci-dessous vérifie-t-elle le résultat obtenu ? Sinon pourquoi ?



Traction *Cisaillement* *Torsion*

1. théorème de l'énergie mécanique $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + E_p = E_p(t=0)$ i.e. $\frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MgL\cos\theta = \frac{1}{2}MgL$. L'autre méthode est d'appliquer le TMC.
2. Pour trouver R, on utilise le fait que l'on connait le mouvement du centre de gravité de la cheminée : c'est un arc de cercle de rayon $L/2$ et donc d'accélération $-L/2\dot{\theta}^2\vec{e}_r + ML/2\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$. Il suffit ensuite de projeter le pfd dans une base polaire.

$$-ML/2\,\dot{\theta}^2 = R_r - Mg\cos\theta$$

$$+ML/2\,\ddot{\theta} = R_\theta + Mg\sin\theta$$

   d'où

$$R_r = Mg\cos\theta - M\frac{L}{2}\dot{\theta}^2 = Mg\frac{5\cos\theta - 3}{2}$$

$$R_\theta = M\frac{L}{2}\ddot{\theta} - Mg\sin\theta = -\frac{1}{4}Mg\sin\theta$$

3. on recommence un coup de théorème du centre de masse appliqué à OB de masse m dont le centre décrit un cercle de rayon $x/2$. Il faut prendre en compte la réaction au niveau de O, calculée précédemment et N et T :

$$-m\frac{x}{2}\dot{\theta}^2 = R_r - mg\cos\theta + N$$

$$m\frac{x}{2}\ddot{\theta} = R_\theta + mg\sin\theta + T$$

ce qui donne

$$N = -M\frac{x}{L}\frac{x}{2}\frac{3g}{L}(1-\cos\theta) - \left(Mg\frac{5\cos\theta - 3}{2}\right) + M\frac{x}{L}g\cos\theta$$

$$T = M\frac{x}{L}\frac{x}{2}\frac{3g}{2L}\sin\theta - \left(-\frac{1}{4}Mg\sin\theta\right) - M\frac{x}{L}g\sin\theta$$

soit en simplifiant :

$$N = \frac{Mg}{2L^2}(-3x^2(1-\cos\theta) + 2xL\cos\theta - L^2(5\cos\theta - 3))$$

$$T = \frac{Mg}{4L^2}(3x^2 - 4xL + L^2)\sin\theta$$

Pour gamma, il nous faut ensuite le TMC
— R est de moment nul car s'applique en O
— poids : $\frac{1}{2}mgx\sin\theta\vec{e}_y$
— La force F appliquée en B soit $\vec{O}B \wedge \vec{F} = xT\vec{e}_y$
— Le couple $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{e}_y$
Donc en projettant sur Oy : $j\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mgx\sin\theta + xT + \Gamma$ ce qui donne en simplifiant : $\Gamma = -\frac{Mg}{4L^2}x(L-x)^2\sin\theta$

4. On casse le sucre par torsion, c'est donc que le couple atteint le plus facilement une valeur critique et c'est ainsi qu'il faut envisager la rupture de la cheminée. Le couple Γ s'écrit sous la forme $\Gamma = -Af(x)\sin\theta$ où
— $A = \frac{Mg}{4L^2}$ est une constante positive
— $f(x) = x^3 - 2Lx^2 + L^2x = x(L-x)^2$ une fonction positive pour les valeurs considérées de x (entre 0 et L)
En un point B repéré par x, la rupture a lieu si $Af(x)\sin\theta = \Gamma_c$, soit pour un angle $\theta_c(x) = \arcsin\left(\frac{\Gamma_c}{Af(x)}\right)$. Le point où se rompra la cheminée est celui pour lequel $\theta_c(x)$ est le plus petit, soit celui pour lequel $f(x)$ est le plus grand. En dérivant, on trouve que le maximum s'obtient pour $x = 1/3$

5. ici la cheminée se brise au milieu, plusieurs explications :
— la section de la cheminée n'est pas homogène donc elle est plus lourde et plus résistante en bas.
— la cheminée n'est pas été dynamitée mais plus vraissemblablement tractée à son sommet pour amorcer la chute, ce qui modifie les conditions initiales
— la cheminée ne tombe pas dans un plan perpendiculaire à l'axe optique de la caméra, ce qui modifie les proportions
— la cheminée ne tourne pas autour de sa base mais autour de l'arête du talus qui masque la partie inférieur.

Exercice 3 : Les hamsters vont conquérir le monde
Un hamster assimilé à un point matériel de masse m monte dans sa roue (homogène, de masse M répartie à la périphérie et de rayon R) mobile autour de son axe. La liaison entre la roue et son axe est parfaite (pas de frottement). On suppose que le hamster s'agrippe suffisamment pour rester en contact permanent avec la roue et qu'il se déplace en permanence dans un plan vertical. La position du hamster est repérée par un angle θ avec la verticale et la position de la roue par l'angle φ que fait l'un de ses rayons avec la verticale.
Initialement, l'ensemble est immobile, le hamster se trouvant au point le plus bas de la roue $\theta = 0$. Il démarre brusquement et acquiert une vitesse v_0 relativement à la roue, qu'il maintiendra constante. Pendant la phase de démarrage, la roue n'a quasiment pas bougée mais elle a acquise une vitesse angulaire initiale $\dot{\varphi}_0$.

1. En appliquant après l'avoir justifiée la conservation du moment cinétique du système total {roue + hamster} entre les instants $t = 0^-$ et $t = 0^+$, exprimez la valeur de $\dot{\phi}_0$
2. Étude du mouvement de la roue et du hamster : Déterminez l'équation différentielle vérifiée par θ (équation différentielle sur le mouvement du hamster).
3. Calculez $\dot{\theta}$ (ou $\dot{\theta}^2$) fonction de θ.
4. À quelle condition sur v_0 le hamster peut-il atteindre le point le plus élevé de la roue ?
5. La condition de la question 2 étant vérifiée ; quand le hamster arrive en haut de la roue, il cesse brusquement de courir et s'agrippe à la roue. Que se passe-t-il ?
6. Effectuez le bilan énergétique dans le référentiel du laboratoire. Quelle est la force motrice ? Retrouvez l'équation du mouvement.

1. à $t = 0$, le moment des forces appliquées au système est nul par rapport à l'axe de la roue (poids+reaction du support, bras de levier nul) donc $MR^2\dot{\phi}_0 + mR(v_0 + R\dot{\phi}_0) = 0$ d'où $\dot{\phi}_0 = -\frac{mRv_0}{(m+M)R^2} = \frac{v_0}{(1+\frac{M}{m})R}$
2. cinématique : $v_0 + R\dot{\phi} = R\dot{\theta}$. Dynamique : TMC, $MR^2\ddot{\phi} + mR^2\ddot{\theta} = -mgR\sin\theta$. La relation cinématique nous montrer que $\ddot{\phi} = \ddot{\theta}$, mais attention, $\dot{\phi} \neq \dot{\theta}$. D'où le TMC devient $(M + m)R^2\ddot{\theta} + mgR\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{(1+\frac{M}{m})R}\sin\theta = 0$.
3. Il faut ensuite intégrer pour pouvoir répondre à la question (en multipliant par $\dot{\theta}$). On trouve : $\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 - \frac{g}{(1+\frac{M}{m})R}(\cos\theta - \cos\theta_0) = 0$. Il faut utiliser la relation précédente pour avoir $\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_0 + \frac{v_0}{R} = \frac{v_0}{R}\left(1 + \frac{1}{1-\frac{M}{m}}\right)$ d'où
$$\dot{\theta}^2 = \left(1 - \frac{m}{M+m}\right)\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2mg}{(M+m)R}(\cos\theta - 1)$$
4. pour que le hamster puisse atteindre le sommet, il faut que la vitesse ne s'annule pas avant $\theta = \pi$, c'est à dire
$$\forall\theta \quad \left(1 - \frac{m}{M+m}\right)\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2mg}{(M+m)R}(\cos\theta - 1) >= 0$$
or le « pire » des cas arrive lorsque $\theta = \pi$, donc $\left(1 - \frac{m}{M+m}\right)\frac{v_0^2}{R^2} > \frac{2mg}{(M+m)R} \times 2$, c'est-à-dire $v_{0,min} = \sqrt{\frac{4(m+M)m}{M^2}Rg}$.
5. Avec le même raisonnement qu'au début, le moment cinétique total va se conserver au tout début. $L_{Oz}(t_1^-) = L_{Oz}(t_1^+)$, i.e.
$$L_{Oz}(t_1^-) = MR^2\dot{\phi}(t_1^-) + mR^2\dot{\theta}(t_1^-) = (M+m)R^2\dot{\theta}(t_1^-) - MRv_0$$

$$L_{Oz}(t_1^+) = (M+m)R^2\dot\theta(t_1^+)$$

car la roue et le hamster tourne à la même vitesse lorsque le hamster s'agrippe. On a donc $\dot\theta(t_1^+) = \dot\theta(t_1^-) - \frac{Mv_0}{(M+m)R}$ On utilise la réponse d'une question précédente pour avoir $\dot\theta(t_1^-) = \dot\theta(\theta = \pi)$ soit $\dot\theta(t_1^+) = \frac{Mv_0}{(M+m)R}\left(-1 + \sqrt{1 - \frac{4mgR(M+m)}{M^2 v_0^2}}\right) = \frac{Mv_0}{(M+m)R}\left(\sqrt{1 - \frac{v_{0,min}^2}{v_0^2}} - 1\right)$. Or on est plus grand que la vitesse minimale donc la roue et le hamster reviennent en arrière.

6. — force de l'axe sur la roue : ne travaille pas (liaison parfaite)
   — Poids de la roue : ne travaille pas parce que le centre de gravité de la roue est fixe
   — Le poids du hamster travaille $\mathcal{P}(m\vec g) = -mg\sin\theta R\dot\theta$
   — Action de contact entre le hamster et la roue : Travaille ! (il ne faut pas oublier la puissance des efforts intérieurs). On peut appeller $\vec T$ la force exercer par la roue sur le hamster et donc $-\vec T$ celle exercée par le hamster sur la roue. On le calcul grâce au TMC appliqué à la roue , ce qui donne $T = -MR\ddot\phi = MR\ddot\theta$. On retrouve ensuite l'équation du mouvement avec le théorème de la puissance cinétique.

Exercice 4 : Chute d'un arbre (ou d'un stylo)

✍ On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile.

On donne le moment d'inertie par rapport à un axe orthogonal à l'arbre et passant par une des extrémité : $I = \frac{1}{3}mL^2$

1. Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ, sa vitesse angulaire est :
$$\dot\theta = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$
3. ré-écrire cette relation en utilisant la méthode de séparation des variables telle qu'elle a été vue en cinétique chimique (mettre tout les t et dt d'un coté et tout les θ et $d\theta$ de l'autre)
4. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On donne pour $\theta = 5°$
$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5{,}1$$
5. Proposez un programme permettant d'évaluer cette intégrale dans le cas général.
6. On se rend compte que lorsque $\theta_0 \to 0$, l'intégrale tend vers l'infini. Et le temps de chute ? Est-ce surprenant ?
7. Par une méthode similaire, calculer la période des oscillations d'un pendule simple en fonction de l'amplitude lorsque l'on ne peut pas faire l'approximation des petites amplitudes. (on exprimera le résultat sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer)

1. Le poids s'applique au niveau du centre de masse, donc à une hauteur $L/2$. Son bras de levier par rapport à l'axe horizontal orthogonal à l'arbre passant par le point d'appui est donc $\frac{L}{2}\sin\theta$. (Voir le schéma qui n'est pas encore fait ...). Le TMC donne
$$I\ddot\theta = mg\frac{L}{2}\sin\theta \Leftrightarrow \ddot\theta = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta$$

2. On multiplie par $\dot{\theta}$ et on intègre entre $t' = 0$ et $t' = t$ (ou on fait une méthode énergétique, ce qui revient au même : $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = W(P) = -\Delta E_p = -\frac{mgL}{2}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$). On isole ensuite $\dot{\theta}$ et on a la relation demandée.
3. Séparation des variables : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$
4. $$\int_0^{T_{\text{chute}}} dt = \sqrt{\frac{L}{3g}} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$$
   d'où un temps de chute d'environ $5{,}1$ s (si on prend $g = 10$).
5. On peut faire une intégrale par la méthode des trapèzes (pose des problèmes à cause de la divergence en θ_0 de la fonction à intégrer) ou en utilisant une bibliothèque :
   ```
   theta0,thetaFinal=5*np.pi/180,np.pi*0.5
   import numpy as np
   from scipy.integrate import quad
   Int=quad(lambda x:1/np.sqrt(np.cos(theta0)-np.cos(x)),theta0,thetaFinal)
   ```
6. C'est normal car on a une position d'équilibre instable (instable certe, mais position d'équilibre)
7. Pour le pendule simple : $\frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) = E_m = cte = 0 + mgl(1-\cos\theta_{\text{max}})$ car la vitesse s'annule lorsque le pendule fait demi-tour. D'où
   $$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{g}{l} \times 2(\cos\theta - \cos\theta_{\text{max}})} \Rightarrow dt = \pm\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{g}{l} \times 2(\cos\theta - \cos\theta_{\text{max}})}}$$
   Ensuite, on va se placer sur une demi-période de $-\theta_{\text{max}}$ à θ_{max} et on sait que $\dot{\theta} > 0$ d'où
   $$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\theta_{\text{max}}}^{\theta_{\text{max}}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_{\text{max}})}}$$