Travaux Dirigés de O_1

Exercice 1 : Loi de Cauchy

La formule de Cauchy simplifiée, donnant l'indice d'un verre pour une radiation monochromatique de longueur d'onde λ est : $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ où A et B sont des constantes.

1. Quelles sont les dimensions et unités légales de A et B.
2. Des mesures effectuées avec un même verre ont donné :
   - $n_r = 1{,}618$ pour une radiation rouge de longueur d'onde dans le vide $\lambda_r = 768$ nm et
   - $n_v = 1{,}652$ pour une radiation violette de longueur d'onde dans le vide $\lambda_r = 434$ nm.

   (a) Calculer les valeurs de A et B.

   (b) Déterminer la valeur de l'indice n_j pour une radiation jaune de longueur d'onde dans le vide $\lambda_j = 589$ nm.

1. L'indice de réfraction est une grandeur sans dimension :

$$[n] = 1 = [A] + \frac{[B]}{[\lambda^2]} = [A] + \frac{[B]}{\mathrm{L}^2}$$

   Pour que la relation de Cauchy soit homogène, il faut donc que $[A] = 1$ et $[B] = \mathrm{L}^2$: A sans dimension (ni unité) et B homogène à une longueur carrée (ie une surface dont l'unité légale est le m^2).
2. Calcul de A, B et n_j :

   (a) Les données nous permettent de dresser un système de deux équations à deux inconnues (A et B) :

$$\left| \begin{array}{ll} n_r = A + \frac{B}{\lambda_r^2} & (1) \\ n_v = A + \frac{B}{\lambda_v^2} & (2) \end{array} \right. \Rightarrow n_r - n_v = A - A + B\left[\frac{1}{\lambda_r^2} - \frac{1}{\lambda_v^2}\right] = \frac{B(\lambda_v^2 - \lambda_r^2)}{\lambda_r^2\lambda_v^2} \Rightarrow B = \frac{\lambda_r^2.\lambda_v^2(n_r - n_v)}{\lambda_v^2 - \lambda_r^2}$$

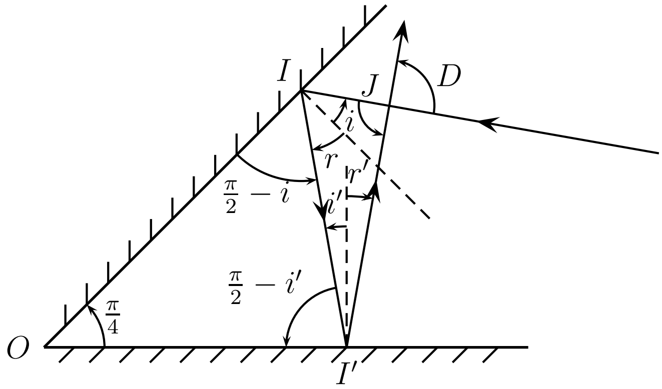
   et $(1) \Rightarrow A = n_r - \frac{B}{\lambda_r^2} = n_r - \frac{\lambda_v^2(n_r - n_v)}{\lambda_v^2 - \lambda_r^2}$ ce qui conduit, après vérification de l'homogénéité et application numérique à $B \simeq 9{,}41.10^{-15}$ m^2 et $A \simeq 1{,}602$.

   (b) Il s'agit maintenant d'une simple application numérique : $n_j = A + \frac{B}{\lambda_j^2} \simeq 1{,}63$ (résultat cohérent car $n_r < n_j < n_v$).

Exercice 2 : Équerre optique.

✍ Soient deux miroirs plans faisant un angle de 45°. On considère un rayon incident subissant une et une seule réflexion sur chacun des miroirs.

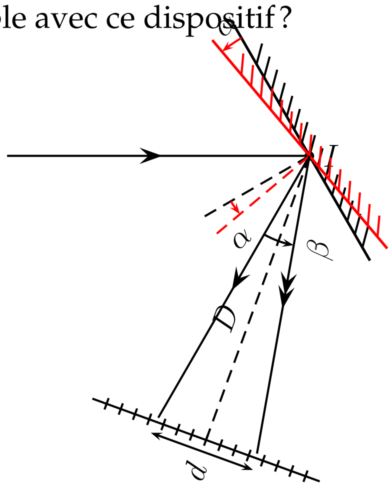
Déterminer la déviation, c'est-à-dire l'angle entre le rayon incident et le rayon émergent.



Faire la figure et orienter tous les angles dans le sens trigonométrique.
Par utilisation de la loi de la réflexion, on peut écrire $r = -i$ et $r' = -i'$ (optique).
La somme des angles orientés d'un triangle est égale à π (géométrie).
Dans le triangle OII', on a donc
$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - i + \frac{\pi}{2} - i' = \pi \Rightarrow i + i' = \frac{\pi}{4}$.
De même, dans le triangle $II'J$, on a
$D + (-r) + i + (-r') + i' = \pi$.
En combinant les relations précédentes, on obtient $D + 2i + 2i' = \pi \Rightarrow D = \pi - 2(i + i') = \frac{\pi}{2}$.
On vérifie la cohérence sur la figure avant de conclure $\boxed{D = \frac{\pi}{2}}$.
On parle d'équerre optique, ce système est parfois utilisé dans le bâtiment.

Exercice 3 : Mise en évidence de faibles rotations
Un pinceau lumineux arrive perpendiculairement en I à la surface d'un miroir plan (M). Ce miroir peut tourner autour d'un axe Δ passant par I et perpendiculaire au plan d'incidence.

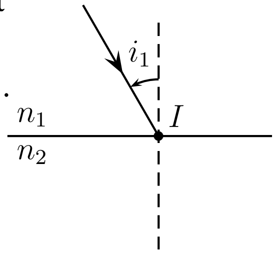
1. Le miroir tourne d'un angle α autour de Δ. De quel angle β tourne le rayon réfléchi dans le même temps ?
2. À la distance $D = 1$ m, on place une règle R graduée perpendiculaire au pinceau réfléchi. Le plus petit déplacement visible de la tache lumineuse réfléchie arrivant sur la règle est $d_{\text{min}} = 1$ mm. Quel est le plus petit angle de rotation mesurable avec ce dispositif ?



Comme souvent en optique, la plus grande difficulté est franchie quand on a réalisé une figure correcte.

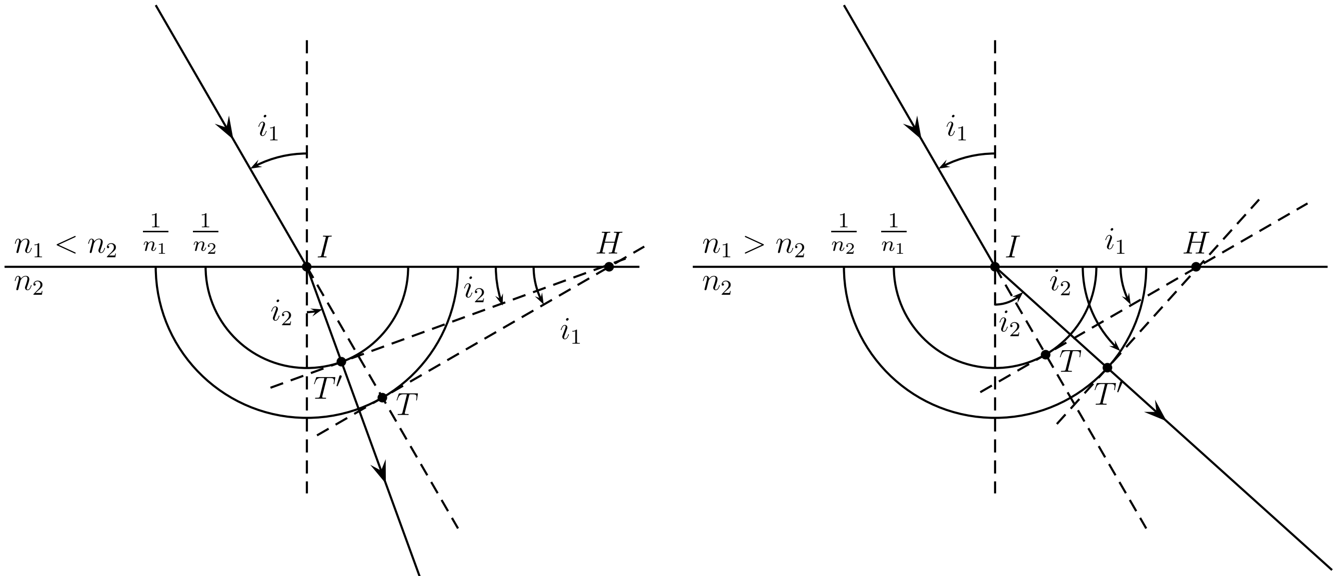
1. Voir cours $\beta = 2\alpha$.
2. Vu les valeurs numériques de d et D, on peut estimer que β reste faible devant 1 rad.
   On a alors $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{d}{2D} \simeq \frac{\beta}{2}$ d'où $\beta = 2\alpha \simeq \frac{d}{D}$.
   Pour $d = d_{\text{min}}$, on mesure $\alpha_{\text{min}} = \frac{d_{\text{min}}}{2D} = 5.10^{-4}$ rad soit $\boxed{1{,}7'}$.

Exercice 4 : Construction d'Huygens
Cette construction géométrique permet de construire le rayon réfracté correspondant à un rayon incident donné.
Du point d'incidence I comme centre, on trace deux demi-cercles de rayons $\frac{1}{n_1}$ et $\frac{1}{n_2}$.
On prolonge le rayon incident jusqu'à ce qu'il rencontre le demi-cercle de rayon $\frac{1}{n_1}$.
Du point d'intersection T, on mène la tangente qui coupe le dioptre en H.
À partir de H, on mène la tangente à l'autre demi-cercle ce qui définit un point T'.
Le rayon réfracté est alors IT'.

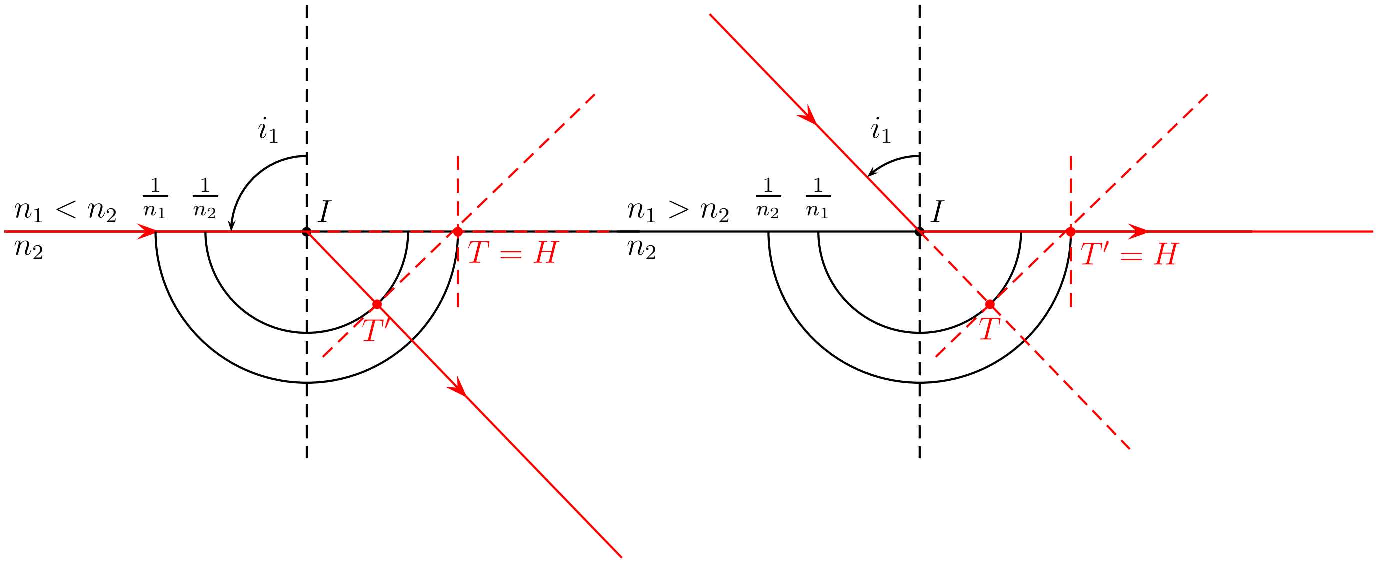


1. Suivre le mode opératoire dans les deux cas : $n_1 < n_2$ et $n_1 > n_2$.
2. Vérifier que cette construction est bien conforme aux lois de Snell-Descartes.
3. Retrouver les cas de la réfraction limite et de la réflexion totale.

1. Constructions :



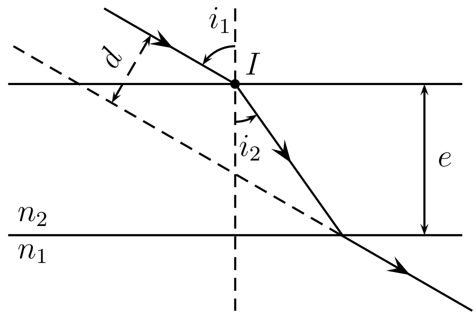
2. Le rayon réfracté est bien dans le plan d'incidence, reste à montrer que $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.
   Comme souvent dans ce genre de problème, on cherche des triangles rectangles ayant un coté commun. On identifie ici les triangles ITH et $IT'H$ de coté commun IH. La somme des angles orientés est égale à π et dans ITH, on en déduit $(IH,IT)+(TH,TI)+(HI,HT) = \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} - i_1 + \frac{\pi}{2} + (HI,HT) = \pi$ donc l'angle aigu (HI,HT) est i_1.
   Par application de relations analogues dans le triangle $IT'H$, on montre que l'angle aigu (HI,HT') est i_2.
   Dans ITH on lit ensuite $\sin i_1 = \frac{IT}{IH} \Rightarrow IH = \frac{IT}{\sin i_1}$ avec $IT = \frac{1}{n_1}$ d'où $IH = \frac{1}{n_1 \sin i_1}$.
   De même, dans ITH' de $\sin i_2 = \frac{IT'}{IH}$, on déduit $IH = \frac{1}{n_2 \sin i_2}$.
   Par identification, on reconnaît bien $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.
3. Les cas de la réfraction limite et de la réflexion totale correspondent à la situation pour laquelle H est situé sur le cercle extérieur, on obtient alors les figures suivantes :

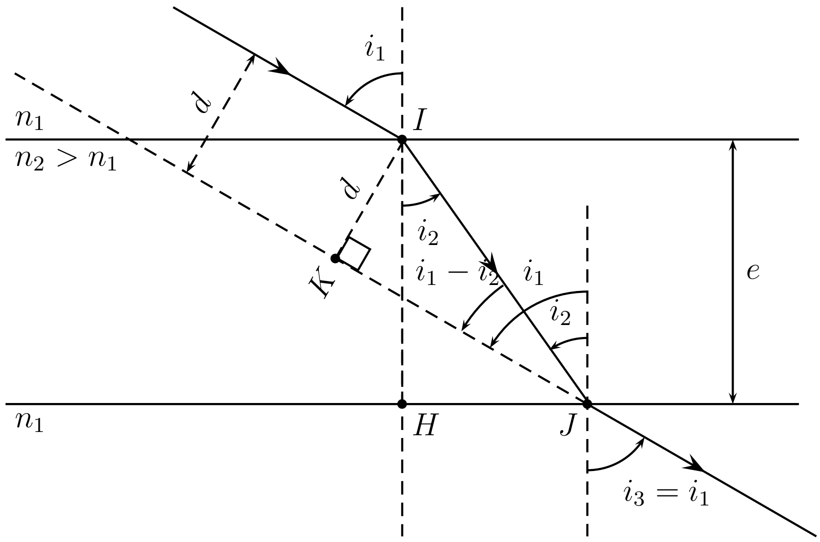


   Pour effectuer le second tracé, on pourra utiliser le principe du retour inverse de la lumière.

Exercice 5 : Traversée d'une lame à faces parallèles
Sur la face supérieure d'une lame de verre formée par deux dioptres plans parallèles, d'épaisseur $e = 8{,}0$ cm, d'indice $n_2 = 1{,}5$ plongée dans l'air dont on supposera l'indice n_1 égal à 1, arrive un pinceau lumineux sous une incidence $i_1 = 60°$. Cf. figure ci-dessous.

1. Y a-t-il toujours un rayon transmis de l'autre coté de la lame ?
2. Exprimer la déviation latérale du faisceau d en fonction de e, i_1 et i_2, l'angle "de transmission dans la lame".
3. À partir de la relation précédente, montrer que la déviation latérale d peut se mettre sous la forme
$$d = e(1 - \frac{n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_2}) \sin i_1$$
Effectuez l'application numérique.
4. À quelle condition la déviation d sera-t-elle proportionnelle à e et i_1 ?





1. En I, la lumière passe d'un milieu n_1 à un milieu d'indice $n_2 > n_1$, on a donc toujours réfraction sur le premier dioptre.
En J, sur le deuxième dioptre, l'angle d'incidence est i_2. Conformément au principe de retour inverse de la lumière, on aura a toujours un rayon transmis, sous l'incidence $i_3 = i_1$.
2. On cherche à exploiter les relations trigonométriques dans des triangles rectangles ayant un coté commun. On choisit de travailler dans IJH et IJK de coté commun IJ.
Dans IJH, $\cos i_2 = \frac{e}{IJ} \Rightarrow IJ = \frac{e}{\sin i_2}$ et dans IJK, $\sin(i_1 - i_2) = \frac{d}{IJ} \Rightarrow IJ = \frac{d}{\sin(i_1 - i_2)}$.
On en déduit $d = e\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\cos i_2}$
3. Dans la relation précédente, on développe $\sin(i_1 - i_2) = \sin i_1 . \cos i_2 - \sin i_2 . \cos i_1$ (mathématique) et on utilise $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (optique) :
$d = e\frac{\sin i_1 . \cos i_2 - \sin i_2 . \cos i_1}{\cos i_2} = e(\sin i_1 - \frac{n_1}{n_2 . \cos i_2} \sin i_1 . \cos i_1) = e(1 - \frac{n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_2}) \sin i_1 \simeq 4{,}1$ cm.
4. On cherche maintenant à linéariser la relation précédente, il faut alors penser à l'approximation des angles faibles (devant 1 rad).
On a peut alors écrire $\sin i_1 \simeq i_1$ et $\cos i_1 \simeq 1$ d'où $d \simeq e i_1 (1 - \frac{n_1}{n_2})$, proportionnelle à e et i_1.

Exercice 6 : Vu du fond de l'eau ...
Un poisson est posé sur le fond d'un lac : il regarde vers le haut et voit un disque lumineux de rayon r, centré sur sa verticale et dans lequel il voit tout ce qui est au dessus de l'eau.

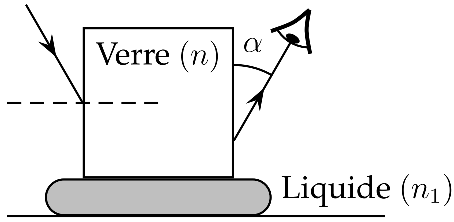
1. Expliquez cette observation à l'aide d'une figure.

2. Le rayon du disque est $r = 30$ cm, en déduire la profondeur h à laquelle se trouve le poisson.

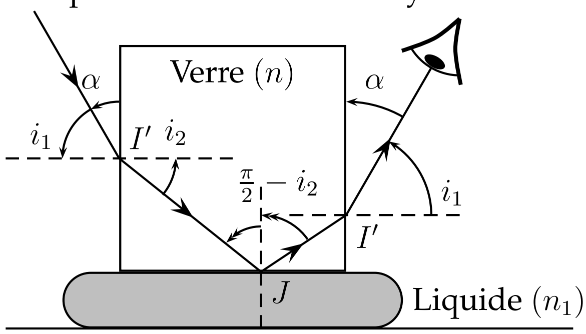
1. 2. $i_{\text{lim}} = \arcsin \frac{1}{n_{\text{eau}}} \simeq 48{,}7\,°$ et $h = \frac{r}{\tan i_{\text{lim}}} \simeq 26{,}3$ cm.

Exercice 7 : Méthode de mesure de l'indice d'un liquide.

On éclaire la face gauche du cube de verre sous différentes incidences.
La goutte de liquide apparaît brillante à partir de $\alpha = 75°56'$ (75 degrés et 56 minutes).
L'indice du verre est $n = 1{,}5200$, celui de l'air est $n_{\text{air}} = 1{,}0000$.
En déduire la valeur de l'indice du liquide $n_1 < n$.



On reproduit la figure et on la complète en dessinant les rayons à l'intérieur du verre.



La goutte apparaît brillante si la lumière parvient à l'œil, c'est à dire si il y a réflexion totale en J, sur le dioptre verre $\rightarrow$ liquide.
En appliquant les lois de la réfraction en I et I' et de la réflexion en J, on complète la figure en introduisant les angles orientés i_1 et i_2 avec $i_1 + \alpha = \frac{\pi}{2}$.
Comme on a réfraction en I et en I', on peut écrire $n \sin i_2 = n_{\text{air}} \sin i_1 = 1.\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$.
Par ailleurs, on a réflexion totale en J à partir d'un angle d'incidence $\frac{\pi}{2} - i_2 = \arcsin \frac{n_1}{n}$.
On a donc $\sin(\frac{\pi}{2} - i_2) = \cos i_2 = \frac{n_1}{n}$.
Reste, à partir des relations précédentes, à lier n_1 à α.
On utilise pour cela la relation mathématique $\cos^2 i_2 + \sin^2 i_2 = 1 \Rightarrow \cos^2 i_2 = 1 - \sin^2 i_2 \Rightarrow \frac{n_1^2}{n^2} = 1 - \frac{\cos^2\alpha}{n^2}$ soit finalement $n_1 = \sqrt{n^2 - \cos^2\alpha} \simeq 1{,}5004$.
Rappel : 1 minute correspond à un soixantième de degré, d'où $\alpha = 75 + \frac{56}{60} \simeq 75{,}933\,°$.

Exercice 8 : Mirage optique

1. Lors d'une forte chaleur, la température de l'air est plus élevée au niveau du sol qu'un peu au-dessus. Expliquer comment ceci peut entraîner un phénomène de mirage.
2. On suppose que la température de l'air soit T_0 sur une hauteur h et passe ensuite à $T < T_0$, l'indice de l'air passant, lui de n_0 à n. Pour un observateur dont les yeux sont à une hauteur $H > h$ au dessus du sol, déterminer à quelle distance minimale se situe le mirage.

$d = \frac{n_0}{\sqrt{n^2 - n_0^2}} H$