TRAVAUX DIRIGÉS DE On_2

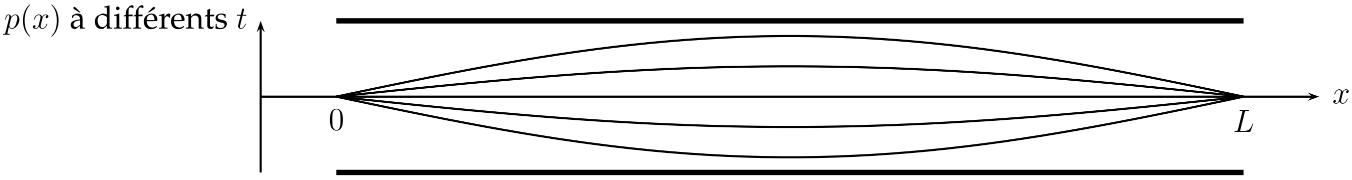
Exercice 1 : Tuyau d'orgue

On modélise la partie d'un tuyau d'orgue qui se trouve au dessus du biseau par un tube ouvert à ses deux extrémités. Les tranches de la colonne d'air contenue dans le tube vibrent parallèlement à l'axe du tube.

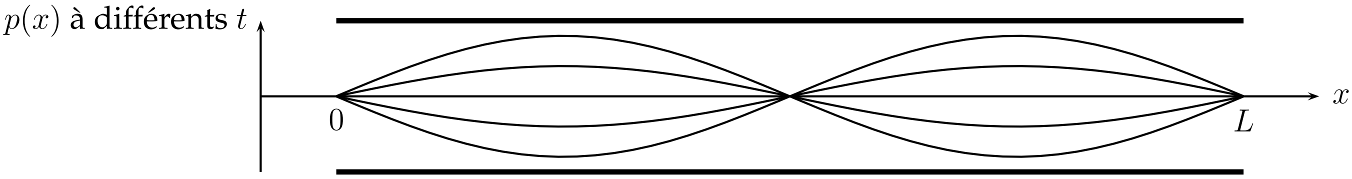
Dans le modèle proposé, il y a toujours un noeud de pression à chaque extrémité du tube.

1. Représenter les variations de pression (onde stationnaire) dans le tube dans le mode fondamental.
2. Faire une représentation analogue à la figure précédente pour le deuxième puis le troisième harmonique.
3. Donner la fréquence de ces deux harmoniques en fonction de la fréquence f_1 du mode fondamental.
4. Pour un tube de longueur $L = 132{,}8$ cm, quelle est la fréquence du mode fondamental ?
5. Comment la hauteur du son varie-t-elle avec la longueur du tube ?
6. On bouche une extrémité du tube, calculer la nouvelle fréquence du fondamental.

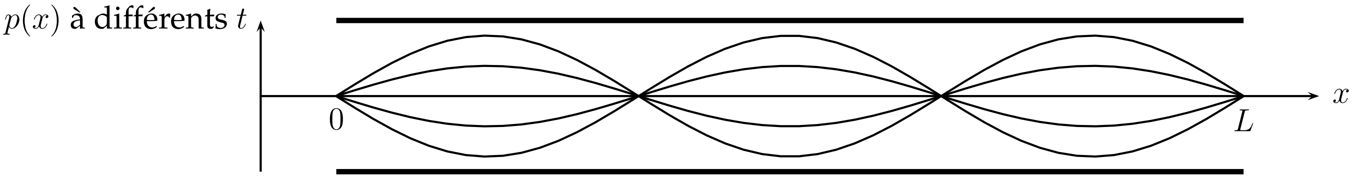
1. Représentation de pression acoustique dans le tube dans le mode fondamental : $L = \frac{\lambda}{2}$.



2. Pour l'harmonique de rang 2 tel que $L = 2\frac{\lambda}{2} = \lambda$.

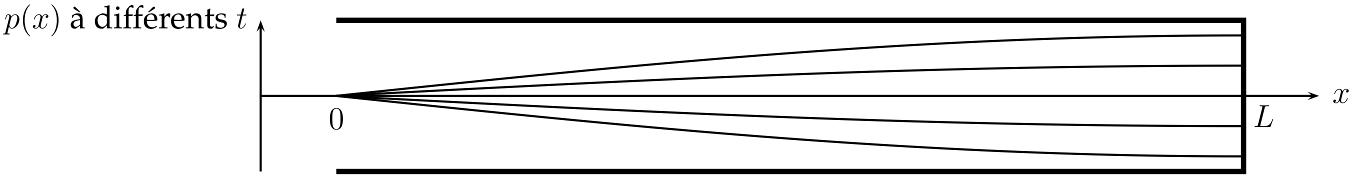


Et enfin l'harmonique de rang 3 tel que $L = 3\frac{\lambda}{2}$.



3. L'harmonique de rang n correspond à $L = n\frac{\lambda_1}{2} = \frac{nc}{2f_n} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{L} = nf_1$ soit ici $f_2 = 2f_1$ et $f_3 = 3f_1$.
4. Pour $L = 132{,}8$ cm et en prenant $c = 343$ m.s^{-1} la célérité du son dans l'air on calcule
$$f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{343}{2 \times 1{,}328} \simeq 129 \text{ Hz}.$$
5. La relation $f_1 = \frac{c}{2L}$ implique que f_1 est inversement proportionnelle à L. Ainsi lorsque L diminue, f_1 augmente ce qui correspond à un son fondamental plus aigu. Inversement, si L augmente le fondamental devient plus grave.

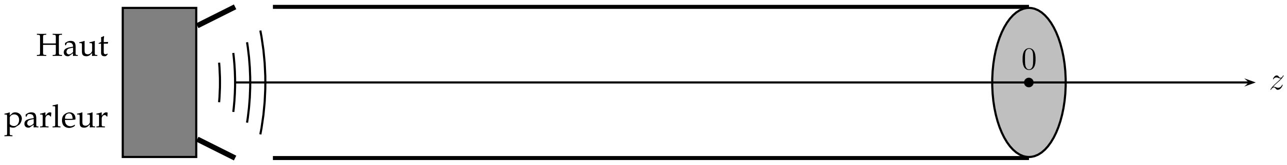
6. On peut supposer qu'en bouchant une extrémité du tube, on créé un ventre de vibration à cet endroit. Dans le mode fondamental on obtiendra alors ce type de variation de pression acoustique dans le tube.



On a alors $L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f'_1} \Rightarrow f'_1 = \frac{c}{4L} = \frac{f_1}{2}$ comme si on avait doublé la longueur du tube ouvert aux deux extrémités.

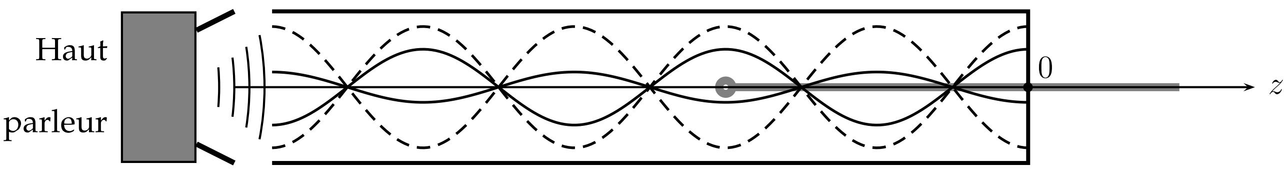
Exercice 2 : Tube à ondes stationnaires

Un haut-parleur est placé à l'entrée d'un tube à ondes stationnaire. Il est alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation ω. La célérité des ondes sonores est notée c.



1. Quelle est la grandeur physique qui oscille ?
2. Donner la forme de l'onde $p_i(z,t)$ engendrée par le haut-parleur
3. Une surface réfléchissante placée en bout de tube (repérée par $z = 0$) engendre une onde réfléchie. Donner la forme générale de cette onde réfléchie $p_r(z,t)$ sans expliciter les différentes inconnues pour l'instant.
4. La surface réfléchissante en $z = 0$ est telle qu'elle correspond à un ventre de vibration. Expliciter les différentes inconnues dans la forme de l'onde réfléchie grâce à cette condition aux limites. (Remarque, si on se place au niveau d'un ventre, cela correspond à un maximum de vibration et il existe une dérivée nulle).
5. En déduire la forme de l'onde totale $p(z,t)$. Montrer que cela correspond effectivement à une onde stationnaire. Représenter la à différents instants.
6. Proposer une méthode pour mesurer la longueur d'onde.

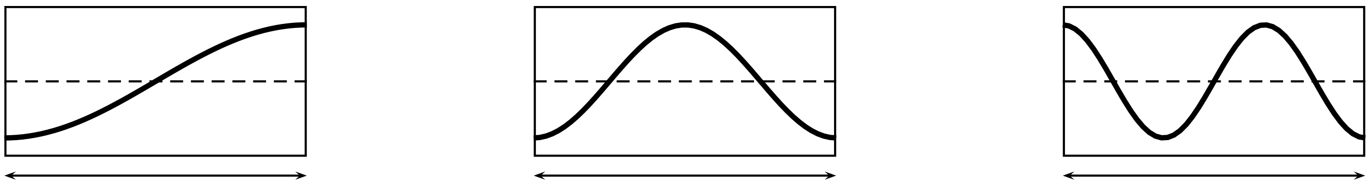
1. C'est la pression (et la vitesse en fait).
2. onde progressive vers la droite (ou la gauche : l'énoncé ne précise pas) : $p_i(z,t) = p_0 \cos(\omega t - kz)$ (convention prise : vers la droite)
3. onde qui va dans l'autre sens : $p_r(z,t) = p'_0 \cos(\omega t + kz + \varphi)$
4. la dérivée de la pression par rapport à z doit être nulle, donc $\frac{dp_{tot}}{dz} = -(-kp_0 \sin(\omega t - k(z = 0))) - p'_0 k \sin(\omega t + k(z = 0) + \varphi) = 0$ et ce pour tout t. Donc $\varphi = 0$ et $kp_0 = kp'_0$.
5. On a donc $p_{tot} = p_0(\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz))$ On utilise les formules de trigo : $p_{tot} = 2p_0(\cos(\omega t) \times \cos(kz))$ on a donc bien une onde stationnaire



6. On bouge un micro et on repère les nœuds (et les ventre). La distance entre deux nœuds est $\lambda/2$

Exercice 3 : Modes propres d'un instrument de musique
Un instrument de musique est modélisé par un tuyau de longueur $L = 30$ cm, qui est le siège d'une onde stationnaire de pression présentant un ventre aux deux extrémités.
Quelles sont les trois plus basses fréquences possibles ?
On prendra pour la vitesse de propagation du son dans l'air : $c = 3{,}4.10^2$ m.s^{-1}.

Si l'onde présente des ventres aux deux extrémités, c'est que le tuyau est fermé de part et d'autre. On représente sur la figure ci-dessous les trois premiers modes possibles.



$L = \frac{\lambda}{2}$ $L = \lambda$ $L = \frac{3\lambda}{2}$

On en déduit la relation $L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = n\frac{L}{2}$ avec n entier. La fréquence est liée à la célérité et la longueur d'onde par la relation $\lambda f = c$. En combinant les relations on en déduit $f = \frac{nc}{2L}$.
L'application numérique de donne pour le fondamental et les harmoniques de rang 2 et 3.

n	1	2	3
f (Hz)	570	1100	1700

Exercice 4 : Étude énergétique
On considère une corde de masse linéique μ (c'est-à-dire la masse par unité de longueur de corde), on note $u(x,t)$ l'altitude de la corde en x à l'instant t. La corde est fixée en $x = 0$ et en $x = L$. On considère le mode propre n qui s'exprime de la façon suivante :

$$u(x,t) = u_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

où u_0 est l'amplitude du mode et c la célérité des ondes.

1. On note $\mathrm{d}E_c$ l'énergie cinétique de la portion de corde comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$ ($\mathrm{d}x$ étant une longueur infiniment faible). Donner l'expression de $\mathrm{d}E_c$
2. En déduire l'énergie cinétique totale de la corde
3. Une étude approfondie montrerait que l'énergie potentielle de la portion de corde comprise entre x et $x + \mathrm{d}x$ est de la forme

$$\mathrm{d}E_p = \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{\mathrm{d}u_t(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

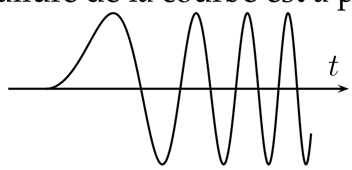
on dérive ici la fonction uniquement par rapport à x et on pourra donc considérer que t est une constante. α est une constante, montrer qu'elle a la dimension d'une force
4. En déduire l'énergie potentielle totale de la corde
5. En utilisant la conservation de l'énergie de la corde, exprimer α en fonction de la vitesse de propagation et de la masse linéique.

6. Exprimer l'énergie mécanique totale de la corde, comment dépend-telle du mode considéré ?
7. Calculer $\mathrm{d}E_m$ l'énergie mécanique d'une portion de corde de longueur $\mathrm{d}x$, pourquoi cette énergie dépend du temps contrairement à celle de la corde ?

1. $\frac{1}{2}\mathrm{d}m\, v^2 = \frac{1}{2}\mu \mathrm{d}x \left(u_0 \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right)^2$
2. $E_c = \int_0^L \mathrm{d}E_c$
$$E_c = \frac{1}{2}\mu \left(u_0 \frac{n\pi c}{L} \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right)^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x$$
On reconnait $\frac{1}{L}\int_0^L \sin^2$ sur un nombre entier de période pour le sinus carré, c'est donc la valeur moyenne donc ça vaut $\frac{1}{2}$ d'où
$$E_c = \frac{1}{4}\mu u_0^2 \frac{n^2\pi^2 c^2}{L} \cos^2\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$
3. La dérivée est sans dimension car u et x sont tout les deux des longueurs. On en déduit [E_p]=[α].L. Or une énergie est une force fois une longueur (d'après l'expression du travail) donc α a bien la dimension d'une force.
4. On intégre comme avant et de même $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$
$$E_p = \frac{\alpha n^2 \pi^2 u_0^2}{4L} \sin^2\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$
5. E_m est de la forme $A\cos^2 \omega t + B \sin^2 \omega t$. Si A et B ne sont pas égaux, alors l'énergie n'a pas la même valeur quand $\omega t = 0$ ou $\omega t = \frac{\pi}{2}$ donc (raisonnement par l'absurde) nécessairement $A = B$. D'où
$$\frac{1}{4}\mu u_0^2 \frac{n^2\pi^2 c^2}{L} = \frac{\alpha n^2 \pi^2 u_0^2}{4L}$$
donc $\alpha = \mu c^2$
6. Dans ce cas, on a simplement $E_m = \frac{1}{4}\mu u_0^2 \frac{n^2\pi^2c^2}{L}$, qui croit comme le numéro du mode au carré
7. $$\mathrm{d}E_m = \frac{1}{2}\mu \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}\mathrm{d}x \left(\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos^2\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right)$$
ne se conserve pas car échange entre les différents morceaux de corde.

Exercice 5 : Remplissage d'une bouteille d'eau
Lorsque l'on remplit lentement une bouteille d'eau et que les gouttes d'eau tombent une à une, on peut parfois entendre un son qui est de plus en plus aigu au cours du temps.
Proposer une allure pour le signal ainsi qu'une explication à ce phénomène. Lorsque l'on entend plus de son, quelle est la hauteur d'air restant dans la bouteille ?

L'allure de la courbe est a priori un sinus dont la fréquence augmente au cours du temps



Ce phénomène est probablement lié à l'apparition d'onde stationnaire dans l'air restant dans la bouteille. La hauteur d'eau augmentant au cours du temps, la « taille de la cavité » diminue. De plus, les conditions aux limites sont a priori asymétrique (ventre d'un coté, nœud de l'autre) puisqu'on n'est d'un coté en contact avec de l'air à pression imposée, de l'autre avec de l'eau (très peu compressible).
Le mode fondamental est donc tel que $\lambda/4 = h$ avec h la hauteur d'air restant. La fréquence correspondante vérifie (l'air étant un milieu non dispersif pour le son) $f = c/\lambda = \frac{c}{4h}$. Cette relation peut s'exprimer sous la forme $h = \frac{c}{4f}$, donc lorsque la hauteur diminue, on a bien une augmentation de fréquence. De plus, lorsque l'on atteint les limites de l'audible, $f = 20 \times 10^3$ Hz. On en déduit le h correspondant : $h = \frac{300}{4 \times 80 \times 10^3} \simeq 1$ mm. Si on se base sur cette méthode, l'eau risque de déborder ! (En fait, la sensibilité de l'oreille diminue dans les aigu et il est possible que l'on n'entende plus le son à cause d'une intensité trop faible par rapport à la sensibilité de l'oreille avant de "sortir" de la zone audible. De plus, l'eau chutant d'une hauteur assez faible en général, le fait de ne plus tomber "au fond de la bouteille, mais en haut" change de façon notable l'énergie cinétique lors du choc, et donc l'intensité de l'onde sonore.)

Exercice 6 : Station de radio

Un émetteur E et un récepteur M d'ondes radio se trouvent au sol à la distance D l'un de l'autre. Une couche atmosphérique réfléchissante horizontale se comporte comme un miroir plan vis-à-vis des ondes radio. Lorsque l'altitude de la couche réfléchissante est H, l'onde directe et l'onde réfléchie sont en phase ; quand l'altitude devient $H + h$, Mne reçoit aucun signal.

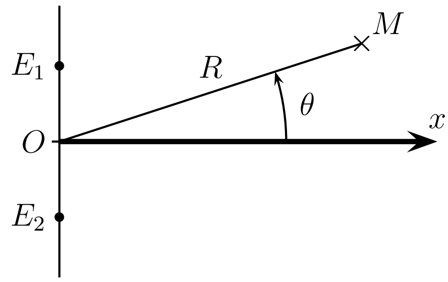
1. Établir la relation liant D, H, h et la longueur d'onde λ, en supposant que h est petit devant D et H. On rappelle pour les approximations que $(1 + \epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\epsilon$ si $| \epsilon | \ll 1$
2. On donne $H = 80{,}0$ km, $D = 200$ km et $\lambda = 400$ m. Calculer h.

1. Avec un schéma, la distance parcourue par l'onde dans le premier cas est $d_1 = 2\sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2}$ et dans le 2e cas $d_2 = 2\sqrt{\frac{D^2}{4} + (H+h)^2}$. Dans le premier cas, les interférences entre le trajet direct et le trajet réfléchie sont constructives, dans le deuxième cas, elles sont destructives, il y a donc eu une demi longueur d'onde de plus.
   D'où $d_2 - d_1 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2\sqrt{\frac{D^2}{4} + (H+h)^2} - 2\sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2} = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2(1+\frac{h}{H})^2} - \sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2} = \frac{\lambda}{4}$ On utilise la formule fournie pour le carré : $\sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2(1+2\frac{h}{H})} - \sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2} = \frac{\lambda}{4}$
   $\sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2 + 2hH)} - \sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2} = \frac{\lambda}{4}$
   puis pour la racine on factorise
   $\sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2}\sqrt{1 + 2\frac{h}{H\left(1+\frac{D^2}{4H^2}\right)}} - \sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2} = \frac{\lambda}{4}$
   on réutilise la formule
   $\sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2}\left(1 + \frac{2}{2}\frac{h}{H\left(1+\frac{D^2}{4H^2}\right)}\right) - \sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2} = \frac{\lambda}{4}$
   On simplifie avec le moins
   $\sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2}\frac{h}{H\left(1+\frac{D^2}{4H^2}\right)} = \frac{\lambda}{4}$
   $\sqrt{1 + \frac{D^2}{4H^2}}\frac{h}{1+\frac{D^2}{4H^2}} = \frac{\lambda}{4}$
   $\frac{h}{\sqrt{1+\frac{D^2}{4H^2}}} = \frac{\lambda}{4}$
   d'où $h = \frac{\lambda}{4}\sqrt{1 + D^2/4H^2}$.

2. $h = 160$m.

Exercice 7 : Interférence ultrasonores

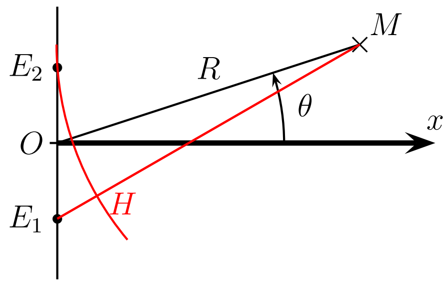
Une expérience d'interférences d'ondes ultra-sonores est réalisée en plaçant deux émetteurs E_1 et E_2 cote à cote relié à un même générateur. La fréquence d'émission est égale à 40 kHz, ce qui correspond à une longueur d'onde $\lambda = 8{,}5$ mm. A part à la question 3, les sources émettent des ondes en phase.



On note O le point milieu du segment délimité par les émetteurs distants de $a = 4$ cm, et Ox l'axe situé sur la médiatrice de ce segment.

On déplace le microphone sur un grand cercle de rayon $R = 0{,}5$ m et on relève l'évolution de l'amplitue mesurée en fonction de l'angle θ que fait la direction $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe x.

1. Distance interfrange
   (a) Faire une figure pour un angle θ faible mais non nul. Rajouter sur la figure l'arc de cercle de centre M passant par E_2, on note H son intersection avec la droite (E_1M). Que représente E_1H ?
   (b) Montrer que les distances E_1M et E_2M peuvent s'écrire :
$$E_1M = R\sqrt{1 - \frac{a\sin\theta}{R} + \frac{a^2}{4R^2}}$$
$$E_2M = R\sqrt{1 + \frac{a\sin\theta}{R} + \frac{a^2}{4R^2}}$$
   (c) On admet la formule suivante : si $\epsilon \ll 1$, alors $\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 + \frac{1}{2}\epsilon$ (On pourra essayer avec quelques valeurs à la calculatrice). On se place dans le cas où $a \ll R$, montrez que $E_1H \simeq a\sin\theta$ puis en déduire le déphasage entre les ondes reçues en M en fonction de θ,a,λ.
   (d) Quelles sont, dans l'intervalle $[-30°, 30°]$, les valeurs de θ où on observe un maximum d'amplitude résultante ?
2. Minima d'amplitude
   (a) Sur l'intervalle d'étude précédent, quelles sont les positions où un minimum d'amplitude est attendu ?
   (b) Si les ondes reçues ont même amplitude, quelle valeur d'amplitude minimale est prévue par la théorie ?
   (c) Quels défauts peuvent expliquer un écart entre prévision et observation ?
3. Inversion de phase
   Le dispositif permet d'inverser le signal émis par l'un des émetteurs (ce qui revient à le déphaser de π).
   (a) Quel est l'état d'interférence sur l'axe Ox ?
   (b) Quelles sont les positions des nouveaux points de maximum et de minimum d'amplitude ?
   (c) Qu'advient-il si l'on inverse également l'autre signal ?



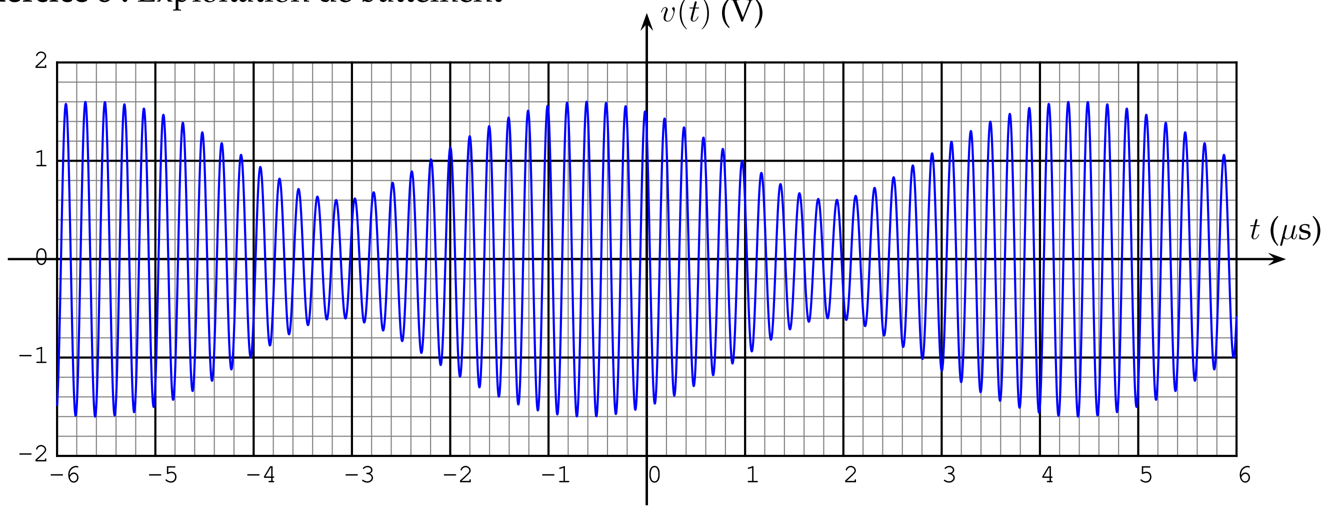
1. (a) E_1H est la différence de distance parcourue par les deux ondes
   (b) On utilise pour cela les coordonnées : $E_1M = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, on développe ensuite en utilisant $\sin^2 + \cos^2 = 1$, puis on factorise par R^2.
   (c) $E_1H = E_1M - E_2M = R\left(1 + \frac{a\sin\theta}{2R} + \frac{a^2}{8R^2}\right) - R\left(1 - \frac{a\sin\theta}{2R} + \frac{a^2}{8R^2}\right) = a\sin\theta$. Le déphasage est donc $2\pi a \sin\theta/\lambda$
   (d) Les interférences constructives sont obtenues lorsque l'ordre d'interférence est entier : $p = a\sin\theta/\lambda$ c'est-à-dire $\sin\theta = p\lambda/a$ avec p entier.

p	0	± 1	± 2
θ	0	$\pm 12°$	$\pm 25°$

   (a) C'est avec p demi-entier soit $p = \pm 1/2 \Rightarrow \theta = \pm 6°$et $p = \pm 3/2 \Rightarrow \theta = \pm 19°$
   (b) si l'amplitude incidente est la même, alors l'amplitude résultante s'annule.
   (c) L'état d'amplitude nulle est particulièrement sensible à tout parasite, en particulier
      i. si l'amplitude n'est pas exactement la même, à cause du générateur ou de la distance parcourue
      ii. la présence de parasites qui viennent s'ajouter en ce point
      iii. la taille du récepteur qui moyenne sur une zone où l'intensité n'est pas nulle.
2. sur l'axe Ox, la distance est parcourue est la même et n'est donc pas source de déphasage. Les interférences sont donc destructives.
3. on échange les lieux de max et de mini
4. on revient à l'état d'avant

Exercice 8 : Exploitation de battement

✍

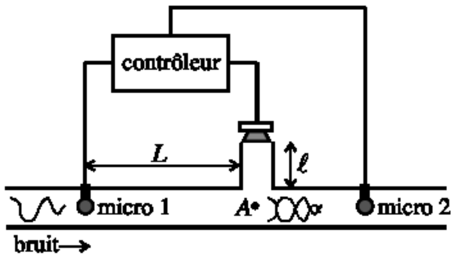


Un étudiant patient compte le nombre de fois où le signal coupe l'axe des abscisses sur le graphique ci-dessus et trouve 120. Quelles sont les fréquences des signaux originaux ? Leur amplitude ? Tracer le spectre en amplitude de v.

Attention au facteur 2 : un cosinus coupe l'axe des abscisse 2 fois par période. La pseudo période est donc $12{,}0/60 = 0{,}200\,\mu$s et la fréquence moyenne est donc $f = 5{,}00$ MHz.
On mesure $5{,}0\ \mu$s pour la période des battements, d'où $f_2 - f_1 = 0{,}20\,$MHz. Les deux fréquences sont donc $f_2 = 5{,}10\,$MHz et $f_1 = 4{,}9\,$MHz.
Pour les amplitudes, il est bon d'avoir la représentation de Fresnel en tête. L'amplitude maximale est atteinte lorsque les deux signaux sont en phases et faut $A+A'$ et elle est minimale lorsqu'ils sont en opposition de phase et vaut $|A - A'|$. On ne peut pas déterminer quelle amplitude correspond à quelle fréquence mais ici la valeur maximale est 1,6 V et la valeur minimale est 0,6 V donc on a 1,1 V et 0,5 V.
Le spectre contient deux pics, d'amplitude différente (facteur presque 2 entre les 2) centré autour de 5 MHz et proche l'un de l'autre. On ne sait pas si c'est celui de « gauche » le plus grand ou celui de « droite » donc les deux représentations sont possibles.

Exercice 9 : Contrôle actif du bruit en conduite

On s'intéresse à un système conçu pour l'élimination d'un bruit indésirable transporté par une conduite. Le bruit est détecté par un premier micro dont le signal est reçu par un contrôleur électronique. Le contrôleur, qui est le centre du système, envoie sur un haut- parleur la tension adéquate pour générer une onde de signal exactement opposé à celui du bruit de manière à ce que l'onde résultante au point A (voir figure) et en aval de A soit nulle.



1. Exprimer, en fonction de L, l et la célérité c du son, le temps disponible pour le calcul du signal envoyé sur le haut-parleur.
2. On suppose le bruit sinusoïdal de pulsation ω. On appelle φ_1 la phase initiale du signal détecté par le micro 1 et φ_{HP} la phase initiale du signal émis par le haut-parleur. Exprimer, en fonction de ω, c, L et l, la valeur que doit avoir $\Delta\varphi = \varphi_{HP} - \varphi_1$.
3. L'onde émise par le haut-parleur se propage dans la conduite dans les deux sens à partir de A. Expliquer l'utilité du micro 2.

1. L'onde reçue par le micro 1 met un temps L/c à se propager jusqu'en A, toutefois il faut que le son émis par le HP soit émis avant puisqu'il doit parcourir une distance l. Cela lui prend un temps l/c, d'où le temps disponible $(L - l)/c$
2. en A, les deux ondes doivent être déphasées de π.
   au niveau de l'onde incidente en A : $s_b = s_0 \cos(\omega t - kL + \phi_1)$
   au niveau de l'onde créée en A : $s_b = s_0 \cos(\omega t - kl + \phi_{HP})$
   d'où $(-kl + \phi_{HP}) - (-kL + \phi_1) = \pm\pi$
   d'où $\phi_{HP} - \phi_1 = k(l - L) \pm \pi = \frac{\omega}{c}(l - L) \pm \pi$
3. L'onde mesurée par le micro 1 est en fait le bruit i+ l'onde émise par le HP. Le 2e micro doit permettre en mesurant le résultat du contrôle actif d'améliorer la réduction de bruit via une rétroaction.