TRAVAUX DIRIGÉS DE MO_1

Exercice 1 : Statique des fluides
Nous rencontrerons ce type d'équation cette année dans le chapitre sur la statique des fluides.
✍ On considère un champ en coordonnées cartésiennes $p(x,y,z)$ pour lequel on dispose de l'équation $\overrightarrow{\text{grad}}\, p = -\rho\vec{g}$ avec $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

1. Montrer que le champ p ne dépend en fait que de la variable z. (Certains physiciens concluent parfois en écrivant « on a donc $p(x,y,z) = p(z)$ ». Il s'agit d'une notation pour dire « p ne dépend en fait QUE de z »)
2. Résoudre l'équation en considérant la condition aux limites $p(x, y, z = 0) = 0$ (cette notation veut dire $\forall x,y; p(x,y,0) = 0$))

Exercice 2 : Forces conservatives
Les forces présentées dans cet exercice sont artificielles. On ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégrations.

1. Rappeler le lien entre énergie potentielle et force en utilisant les notions du chapitre.
2. On considère une force dont l'expression en coordonnées sphériques est $\vec{F} = A\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\vec{e}_\phi$. De quelle énergie potentielle $E_p(r,\theta,\phi)$ dérive-t-elle ?
3. On considère une force dont l'expression en coordonnées cylindrique est $\vec{F} = B\frac{\sin\theta}{r}\vec{e}_\theta$. De quelle énergie potentielle $E_p(r,\theta,z)$ dérive-t-elle ?

Exercice 3 : Fonction constante
Vous rencontrerez ce type de chose plus loin dans le TD. Ce type de raisonnement apparait l'an prochain dans le chapitre de mécanique des fluides (PC) et sur la propagation des ondes stationnaires.
On considère deux fonctions f et g de deux variables réelles telles que $\forall x,y; f(x,y) = g(x,y)$. On sait de plus que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$. On cherche à montrer que f et g sont en fait constante.

1. Déduire des équations aux dérivées partielles que f ne dépend que de y et g que de x. Ce type d'équation est parfois noté $f(y) = g(x)$.
2. On considère un raisonnement graphique : soit deux points quelconques du plan $M_0 = (x_0,y_0)$ et $M_1 = (x_1,y_1)$. Puisque f ne dépend que de y, représenter dans le plan l'ensemble des points M tel que $f(M) = f(M_0)$. Puisque g ne dépend que de x, représenter dans le plan l'ensemble des points M tel que $g(M) = g(M_1)$. Déduire de l'intersection des deux courbes précédentes que $f(M_0) = g(M_1)$ puis que f et g sont des fonctions constantes.
3. Raisonnement par le calcul. Montrer directement par le calcul que f est une fonction constante.

1. Lorsque l'on dérive f par rapport à x, on obtient 0, la fonction f serait donc une constante si elle n'avait que la variable x, c'est-à-dire f ne dépend pas de x. De même pour g par rapport à y.
2. On appelle M_2 l'intersection, on a $f(M_0) = f(M_2)$, $g(M_2) = g(M_1)$, or par hypothèse f = g donc $f(M_2) = g(M_2)$ d'où $f(M_0) = g(M_1) = f(M_1)$ donc pour tout couple de points M_0,M_1 $f(M_0) = f(M_1)$: f est constante.

3. Par le calcul, on laisse les fonctions sous la forme fonction de deux variables. On sait que $\partial_x f = 0$, or $f = g$ donc $\partial_x g = 0$, on peut donc résoudre cette équation sous la forme $g = h(y)$. Or $\partial_y g = 0 = h'$ donc h est constante donc g est constante.

Exercice 4 : Équation de d'Alembert

On considère une fonction z de deux variables réelles x et t. Cette fonction est solution de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$.

1. Montrer qu'une fonction de la forme $z(x,t) = f(x - ct)$ (avec f une fonction quelconque d'une seule variable) est solution de cette équation différentielle. De même pour une fonction de la forme $z(x,t) = f(x + ct)$ (attention, nous avons montré que ces solutions convenaient, mais pas que ce sont <u>toutes</u> les solutions)
2. On cherche maintenant des solutions où les variables d'espace et de temps sont « découplées » : c'est à dire que la fonction z peut s'écrire sous la forme $z(x,t) = g(x) \times h(t)$.
   (a) Montrer que l'équation peut s'écrire sous la forme $F(x) = G(t)$.
   (b) En déduire que $F(x)$ est constante et résoudre les équations (différentielles) $F(x) = K$ et $G(t) = K$ en fonction du signe de la constante (sans chercher à déterminer les constantes d'intégrations).
   (c) On considère les conditions aux limites $\forall t, z(0,t) = 0$ et $z(L,t) = 0$. Parmi les solutions précédentes, lesquelles restent possibles et lesquelles sont impossibles ?
3. Que vous rappelle les différentes solutions obtenues dans cet exercice ? À quel type de problème physique semble correspondre cette équation ?

1. On prend la solution proposée et on l'injecte dans la formule donnée. La partie délicate est la dérivée.
   Si $z(x,t) = f(x-ct)$, alors $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x-ct)$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x-ct)$. De même et en faisant attention à la dérivée composée : $\frac{\partial z}{\partial t} = -cf'(x - ct)$et $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (-c)^2 f'(x - ct)$. On voit ici que $-c$ ou $+c$ ne changera rien grâce au carré.
   En injectant : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = f''(x - ct) - \frac{1}{c^2} \times (-c)^2 f'(x - ct) = 0$ et la fonction est donc bien solution de l'équation proposée.
2. (a) $z(x,t) = g(x) \times h(t)$ d'où $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = g(x)h''(t)$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = g''(x)h(t)$. En remplaçant dans l'équation : $g''(x)h(t) - \frac{1}{c^2}g(x)h''(t) = 0$. On en déduit (pour les points où les fonctions ne s'annulent pas) : $\frac{g''(x)}{g(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{h''(t)}{h(t)}$. D'où on a bien une fonction de x égale à une fonction de t (ce qui fait référence à l'exercice précédent).
   (b) D'après l'exercice précédent, on a donc $\frac{g''(x)}{g(x)} = cte$ et de même pour $\frac{h''(t)}{h(t)}$.
   Supposons que la constante est positive, on aurait alors une équation de la forme $g''(x) - \omega_0^2 g(x) = 0$ dont les solutions sont $x \mapsto A\exp(\omega_0 x) + B\exp(-\omega_0 x)$. Si la constante est négative, alors : $g''(x) + \omega_0^2 g(x) = 0$ dont les solutions sont $x \mapsto C\cos(\omega_0 x) + D\sin(\omega_0 x)$. On trouve de même pour h (en terme de forme).
   (c) Compe tenu des conditions aux limites, les fonctions exponentielles ne peuvent pas convenir : $z(0,t) = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow A = -B$ et $z(L,t) = 0 \Rightarrow g(L) = 0 \Rightarrow A(exp(\omega_0 L) - \exp(-\omega_0 L)) = 0$. On en déduit $A = 0$ comme seule solution possible, ce qui reviendrait à avoir une fonction tout le temps nulle (ce qui est exclus compte tenu des division dans les questions précédentes). Seule les solutions en sinus restent possibles.
3. Il s'agit des solutions en ondes progressives (1.) et en onde stationnaire (2.) pour des ondes sur une corde vibrante. Cette équation est l'équation de d'Alembert extrêmement classique pour les phénomènes ondulatoires.