

TRAVAUX DIRIGÉS DE T₁
Exercice 1 : Caractéristiques d'un Gaz Parfait Monoatomique, fuite de Gaz

Soit un récipient de volume constant $V = 10$ L. Il contient un GPM (de l'hélium) à une pression $p = 2,1$ bar et à la température $T = 300$ K.

On donne : $R = 8,31$ J.mol⁻¹.K⁻¹, la constante des gaz parfaits, $k = \frac{R}{N_A} \simeq 1,38.10^{-23}$ J.K⁻¹, la constante de Boltzmann et $M_{He} = 4$ g.mol⁻¹, la masse molaire de l'hélium.

Exprimer en fonction des données puis calculer :

1. La masse m d'hélium contenue dans le récipient et la densité particulaire n^* des atomes dans le récipient.
2. L'énergie cinétique totale E_c du gaz enfermé puis l'énergie cinétique moyenne par atome $\langle e_c \rangle$ et la vitesse quadratique moyenne u des atomes.
3. Par suite d'une fuite de gaz, la pression passe à $p' = 1,4$ bar et la température à $T' = 290$ K. Calculer la masse du gaz échappé Δm .
4. On colmate la fuite, à quelle température T_1 doit-on porter le gaz pour atteindre à nouveau p ?

1. $m = \frac{MpV}{RT} = 3,4$ g et $n^* = \frac{p}{kT} = 5,1.10^{25}$ atomes.m⁻³. 2. $E_c = U = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}pV = 3150$ J et $\langle e_c \rangle = \frac{3}{2}kT = 6,2.10^{-21}$ J et $u = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1368$ m.s⁻¹. 3. $\Delta m = M\Delta n = \frac{MV}{R}(\frac{p}{T} - \frac{p'}{T'}) = 1,04$ g. 4. $T_1 = T' \frac{p_1}{p'} = 435$ K.

Exercice 2 : Effusion gazeuse


Une cabine de navette spatiale de volume $V = 2$ m³ contient N_0 molécules d'air maintenues à la température T . À l'instant $t = 0$, une petite météorite perce dans la paroi un petit trou de section $s = 1$ μm² par lequel le gaz peut s'échapper dans le vide. On supposera que le trou est suffisamment petit pour que la distribution des vitesses des particules dans la navette ne soit pas perturbée. On note $N(t)$ le nombre de molécules présentes à l'intérieur de l'enceinte à l'instant t . On prendra un modèle dans lequel les molécules se déplacent selon 6 directions, avec des vitesses de même norme (égale à la vitesse quadratique moyenne v^*).

1. Montrer qu'à un instant t , le nombre de molécules sortant de l'enceinte pendant dt s'écrit :

$$dN_s = \frac{N_s}{6V} v^* dt$$

2. En déduire une équation différentielle sur $N(t)$, on fera apparaitre un temps caractéristique dont on vérifiera la dimension.
3. En déduire l'expression du nombre de molécule dans l'enceinte à l'instant t .
4. Donner l'expression de l'instant $t_{1/2}$ au bout duquel la pression dans l'enceinte a diminué de moitié.

1. Raisonnement similaire à celui du cours : les atomes passant dans le trou sont ceux qui
 - (a) sont en face du trou (cylindre);
 - (b) vont vers la droite (1/6 des particules);
 - (c) sont assez proches (une distance au plus $v^* dt$ pour pouvoir atteindre le trou pendant dt).

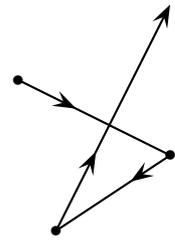
Le nombre de particule est donc $\frac{1}{6}n^*sv^*dt$ où $n^* = \frac{N}{V}$. D'où le résultat annoncé.

- N est donc régit par l'équation différentielle $N(t + dt) - N(t) = -dN_s = -\frac{N_s}{6V}v^*dt \Rightarrow \frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau}$ avec $\tau = \frac{6V}{sv^*}$.
 $[V] = L^3$; $[s] = L^2$ et $[v^*] = L.T^{-1}$ d'où $[\tau] = L^3 / (L^2.L.T^{-1}) = T$ est bien homogène à un temps.
- On a donc $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau)$.
- $t_{1/2}$ est solution de l'équation $N(t_{1/2}) = N_0/2$ soit $-t_{1/2}/\tau = -\ln(2) \Rightarrow t_{1/2} = \tau \ln 2$.

Exercice 3 : Libre parcours moyen



Les molécules constituant l'air sont modélisées par des sphères dures de diamètres d réparties avec une densité volumique n^* . On s'intéresse à une molécule donnée, toutes les autres étant supposées immobiles. La molécule considérée possède une vitesse de norme constante égale à la vitesse quadratique moyenne v^* . Elle se déplace suivant une ligne brisée suite à ses collisions avec les autres molécules.



1. Quelle distance entre le centre de la molécule considérée et le centre d'une autre doit être atteinte pour qu'il y ait collision ?
2. On définit le volume utile balayé par la molécule considérée de la manière suivante : une molécule dont le centre est situé dans ce volume utile sera percutée par la molécule considérée au cours de son mouvement. Estimer le volume utile V_u ainsi balayé au cours de la durée Δt du mouvement d'une molécule.
3. En déduire le nombre de collisions subies par la molécule pendant une durée Δt (nombre moyen en fait)
4. Exprimer alors le libre parcours moyen \bar{l} de la molécule. Vérifiez l'homogénéité du résultat.
5. Donner son ordre de grandeur pour de l'air à pression et température usuelle. (on donne $d = 300 \text{ pm}$; $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$)

1. C'est d (attention, ce n'est pas r , il faut faire un schéma pour s'en convaincre si besoin)
2. Il s'agit d'un cylindre de longueur $L = \Delta t v^*$ et de rayon d , donc de volume $V_u = \pi d^2 \Delta t v^*$
3. Dans ce volume, il y a $N = n^* V_u$ particules, c'est-à-dire $\pi d^2 \Delta t v^* n^*$, il y a donc autant de chocs. La durée entre deux chocs est donc de $\tau = \frac{\Delta t}{N} = \frac{1}{\pi d^2 v^* n^*}$
4. Le libre parcours moyen est alors $v^* \tau = \frac{1}{\pi d^2 n^*}$. Dimensionnellement $[n^*] = \text{L}^{-3}$ et $[d] = \text{L}$ donc $\left[\frac{1}{\pi d^2 n^*}\right] = \text{L}^{-2} \text{L}^3$ et le résultat est bien homogène.
5. Il nous faut d'abord n^* , pour cela on utilise $pV = Nk_B T \Rightarrow n^* = \frac{N}{V} = \frac{p}{k_B T} \simeq \frac{10^5}{1,38 \times 10^{-23} \times 293} \simeq 2,5 \text{ m}^{-3}$ d'où $\bar{l} = 1,4 \times 10^{-7} \text{ m} \simeq 140 \text{ nm}$

Exercice 4 : Energie interne, tables thermodynamiques.

Le tableau ci-dessous donne, avec trois chiffres significatifs, le volume molaire V_m (en $\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$) et l'énergie interne molaire U_m (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$) de la vapeur d'eau à la température $t = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ pour différentes valeurs de la pression p (en bars). On donne en outre la constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

p	1	10	20	40	70	100
V_m	$6,43 \cdot 10^{-2}$	$6,37 \cdot 10^{-3}$	$3,17 \cdot 10^{-3}$	$1,56 \cdot 10^{-3}$	$8,68 \cdot 10^{-4}$	$5,90 \cdot 10^{-4}$
U_m	56,33	56,23	56,08	55,77	55,47	54,78

1. Justifier sans calcul que la vapeur d'eau ne se comporte pas comme un gaz parfait.
2. On se propose d'adopter le modèle de Van der Waals pour lequel on a

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT \quad U_m = U_{m,GP} - \frac{a}{V_m}$$

- (a) Calculer le coefficient a en utilisant les énergies internes des états à $p = 1$ bar et $p = 100$ bars. Calculer b en utilisant l'équation d'état à $p = 100$ bars et en déduire un ordre de grandeur du rayon des particules r_S dans le modèle des sphères dures.
- (b) Quelle valeur obtient-on alors pour U_m à $p = 40$ bars? Quelle température obtient-on alors en utilisant l'équation d'état avec $p = 40$ bars et $V_m = 1,56 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$? Conclure sur la validité du modèle.
- On remarque tout de suite à l'aide du tableau que l'énergie interne de ce gaz dépend de sa pression. Il ne respecte donc pas la première loi de Joule et n'est donc pas parfait. Comme on travaille à température constante, U_m ne devrait pas varier.
 - Dans le cadre du modèle du gaz réel de Van der Waals,

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT \quad U_m = U_{m,GP} - \frac{a}{V_m}$$

- (a) On peut déterminer a en utilisant deux valeurs du tableau : $p = 1$ bar et $p = 100$ bar par exemple. Comme on travaille à température constante, $U_{m,GP}$ est le même dans les deux cas : $U_m(1) = U_{m,GP} - \frac{a}{V_m(1)}$ et $U_m(100) = U_{m,GP} - \frac{a}{V_m(100)}$

$$\Rightarrow a = \frac{U_m(1) - U_m(100)}{\frac{1}{V_m(100)} - \frac{1}{V_m(1)}} \simeq 0,923 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{mol}^{-2}$$

On en déduit ensuite b par utilisation de l'équation d'état par exemple à $p = 100$ bar :

$$b = \frac{-RT}{p + \frac{a}{V_m^2(100)}} + V_m(100) \simeq 8,19 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$$

Si on considère maintenant le modèle des sphères dures, chaque particule occupe un volume $V_S = \frac{4}{3}\pi r_S^3$ et b , le covolume correspond à celui occupé par une mole de particule. On a ainsi

$$b = \mathcal{N}_A \cdot V_S \Rightarrow r_S = \sqrt[3]{\frac{3b}{4\pi\mathcal{N}_A}} \simeq 5,06 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

- (b) Par application de la relation

$$U_m = U_{m,GP} - \frac{a}{V_m}$$

et en prenant $U_{m,GP}$ la limite de U_m aux faibles pressions, c'est à dire pour $p = 1$ bar (à défaut de valeur à plus faible pression), on obtient

$$U_m(40) \simeq U_m(1) - \frac{a}{V_m(40)} \simeq 55,75 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

soit un écart relatif d'à peine 0,04 % par rapport à la valeur du tableau.

A partir de l'équation d'état et des valeurs de a et b calculées on obtient $T \simeq 778 \text{ K}$ soit environ $505 \text{ }^\circ\text{C}$ ce qui correspond à un écart relatif de l'ordre de 1 % avec la valeur expérimentale.

On en déduit que l'équation de VDW traduit les relevés expérimentaux, le modèle est valide (en tout cas à 40 bars).

Exercice 5 : Piège à diazote liquide

Lorsqu'on cherche à atteindre de très basses pressions avec une pompe à vide, on est gêné par la vaporisation de l'huile servant à lubrifier la pompe.

Un piège à diazote liquide permettant d'atteindre des pressions faibles sans pompe est ainsi constitué : un petit récipient contenant le diazote liquide est en communication par un tuyau de petite section s avec le grand récipient dans lequel on veut faire baisser la pression et où on maintient une température T constante. Le grand récipient, de volume V , contient un gaz parfait de masse molaire M .

On suppose, pour simplifier les calculs que les molécules du gaz ont leur vitesse selon l'axe Oz du tuyau, 50 % ayant la vitesse $u\vec{u}_z$ et 50 % ayant la vitesse $-u\vec{u}_z$. Lorsque des molécules de gaz frappent la section s , on admet qu'elles se fixent à la surface du diazote liquide.

1. On note $N(t)$ le nombre de particules dans le grand récipient. Évaluer le nombre dN_a de molécules de gaz qui sont piégées par le diazote entre t et $t + dt$. En déduire dN la variation de $N(t)$.
2. Comment évolue la pression $p(t)$ dans le grand récipient? Calculer la durée t_1 au bout de laquelle la pression p dans le grand récipient est divisée par 10.

AN : $M = 100 \text{ g.mol}^{-1}$; $V = 1 \text{ L}$; $s = 1 \text{ mm}^2$; $T = 300 \text{ K}$ et $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$, la constante des gaz parfaits.

1. $dN_a = \frac{N}{2V} s u dt = -dN$. 2. $p = p_0 \cdot \exp(-\frac{t}{\tau})$ avec $\tau = \frac{2V}{su}$ et $u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$. $t_1 = \tau \ln 10 = 16,8 \text{ s}$. 3. Évaporation de l'azote.

Exercice 6 : Vitesses quadratiques moyennes

1. L'air est constitué principalement de dioxygène O_2 et de diazote N_2 .
Calculer les vitesses quadratiques moyennes de ces molécules à la température $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.
On donne $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$, la constante des gaz parfaits et les masses molaires $M_N = 14 \text{ g.mol}^{-1}$ et $M_O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$.
2. Calculer, en électron-volts (eV), l'énergie cinétique moyenne $\langle e_c \rangle$ d'une molécule O_2 à la température t_0 . L'énergie molaire de la liaison $O - O$ a pour valeur $E_{O-O} = 498 \text{ kJ.mol}^{-1}$. Calculer, en électron-volts, l'énergie de la liaison $O - O$ pour une molécule et comparer au résultat précédent. Que peut-on en conclure?
Pour quelle valeur de la température T_c a-t-on rupture de O_2 (vérifier que l'on reste dans le cadre de la mécanique classique).
3. Calculer numériquement la valeur de la vitesse de libération du diazote à la surface de la Terre. Quelle devrait être la température à la surface de la Terre pour que N_2 échappe à son attraction.
Mêmes questions pour la Lune ($R_L = 1800 \text{ km}$, $M_L = 7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$ la constante de gravitation universelle).

1. $u(O_2) = \sqrt{\frac{3RT}{M(O_2)}} = 477 \text{ m.s}^{-1}$ et $u(N_2) = 510 \text{ m.s}^{-1}$. 2. $\langle e_c \rangle (O_2) = \frac{5}{2} kT = 0,063 \text{ eV}$ et $E_{O-O} = 5,17 \text{ eV} \rightarrow$ ruptures par choc très rares. 3. $T_c = \frac{2E_{O-O}}{5k} = 23970 \text{ K}$, $u = 4321 \text{ m.s}^{-1} \ll c$. 4. Pour la Terre, $v_l = \sqrt{2gR_T} = 11200 \text{ m.s}^{-1}$, $T_T = \frac{2GM_T M}{3RR_T} = 161180 \text{ K}$ très improbable. Pour la Lune, $v_l = 2300 \text{ m.s}^{-1}$, $T_T = \frac{2GM_L M}{3RR_L} = 7038 \text{ K}$ à peine plus probable avec un gaz si lourd.

Exercice 7 : Etude d'un gaz de Clausius

1. Donner l'équation d'état d'un gaz parfait. Quelles sont les deux hypothèses qui définissent, au niveau microscopique, un gaz parfait?

2. L'argon est un gaz noble qui peut être modélisé, aux faibles pressions, par l'équation d'état molaire : $P(V_m - b) = RT$ où R est la constante des gaz parfaits, et b une constante positive caractéristique de ce gaz.
 - (a) Écrire cette équation d'état pour une quantité de matière n quelconque.
 - (b) Quelle est l'hypothèse du gaz parfait qui reste valable pour ce gaz, et quelle est celle qui ne l'est plus ?
 - (c) Tracer l'allure de quelques courbes isothermes (ensembles de points pour une valeur de T fixée) en coordonnées d'Amagat, c'est-à-dire $y = PV$ en fonction de P . Si on obtient de telles isothermes expérimentalement, comment en déduire la valeur de b ?
 - (d) Déterminer la limite du produit PV quand P tend vers 0 et commenter le résultat obtenu.

1. Question de cours : l'équation d'un gaz parfait est $PV = nRT$. Au niveau microscopique, les hypothèses du gaz parfait sont les suivantes : pas d'interaction entre les particules et particules ponctuelles (pas de volume propre).

2. Pour l'argon $P(V_m - b) = RT$.

(a) Par définition du volume molaire, $V_m = \frac{V}{n}$ et en injectant dans l'équation précédente,

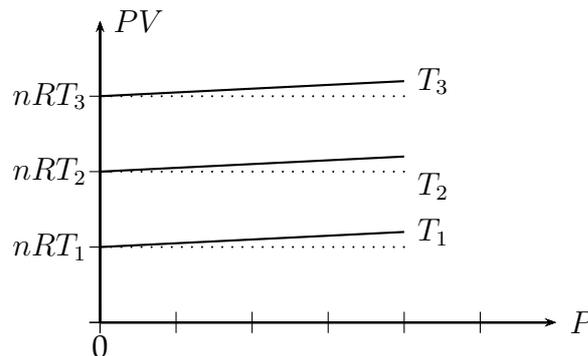
$$P\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT \Rightarrow nP\left(\frac{V}{n} - b\right) = nRT \Rightarrow P(V - nb) = nRT$$

(b) Le volume "offert" aux particules est passé de V à $V - nb$, on tient maintenant compte du volume propre des particules (b est appelé covolume). C'est le seul changement par rapport à l'équation d'état des gaz parfait, on ne considère donc toujours pas les interactions entre particules.

(c) L'équation précédente s'écrit

$$PV - Pnb = nRT \Rightarrow PV = nRT + nbP$$

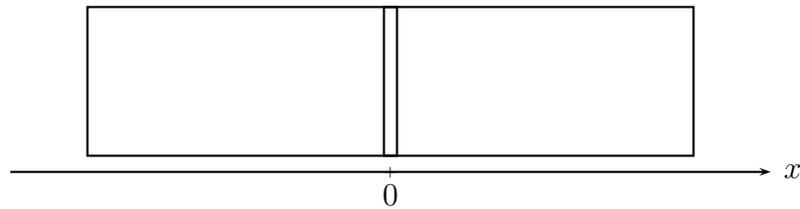
Dans le diagramme d'Amagat, $PV = f(P)$ on obtiendra donc des portions de droites de pente nb au lieu de portions horizontales si on avait affaire à un gaz parfait.



(d) Lorsque $P \rightarrow 0 \Rightarrow nbP \rightarrow 0$ et on retrouve l'équation d'état du gaz parfait. Le gaz réel est donc bien équivalent à un gaz parfait aux basses pressions.

Exercice 8 : Enceinte à deux compartiments

On place dans les deux compartiments d'une enceinte la même quantité n de deux gaz parfaits monoatomiques identiques. Ces deux compartiments sont séparés par un piston mobile de section $S = 200 \text{ cm}^2$.



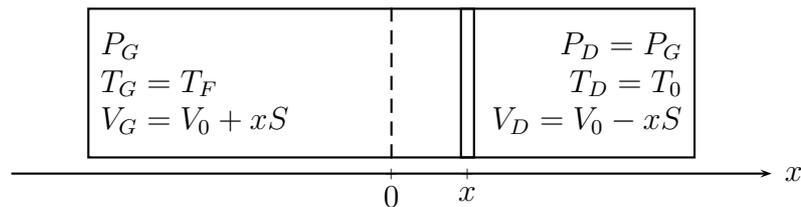
Initialement, les deux gaz ont même température $T_0 = 300$ K, même volume $V_0 = 10,0$ L et même pression $P_0 = 10,0$ bar, et le piston est au centre de l'enceinte, à l'abscisse $x = 0$.

1. Calculer la quantité de matière n de gaz dans chacun des compartiments.
2. On élève la température du gaz du compartiment de gauche jusqu'à $T_F = 350$ K, tout en maintenant la température du compartiment de droite à T_0 . Calculer l'abscisse x du piston une fois le nouvel état d'équilibre atteint.

1. On connaît les paramètres d'état initiaux P_0, V_0 et T_0 pour chaque gaz dans les deux compartiments. Par application de l'équation d'état des gaz parfaits, on en déduit (en utilisant les unités légales)

$$n = \frac{P_0 V_0}{RT_0} = \frac{10^6 \times 10^{-2}}{8,31 \times 300} \simeq 4,01 \text{ mole de gaz}$$

2. Sous l'effet de l'élévation de température, le gaz de gauche va se détendre, celui à droite, subissant une augmentation de pression va se comprimer.



Le piston s'est décalé de x , offrant un volume supplémentaire xS au gaz de gauche. Ce volume a été perdu par le gaz de droite.

L'équilibre mécanique du piston impose $P_G = P_D$, les paramètres d'états apparaissent sur la figure ci-dessus.

En utilisant à nouveau l'équation d'état et l'égalité des pressions, on peut écrire

$$\frac{nRT_G}{V_G} = \frac{nRT_D}{V_D} \Rightarrow T_F(V_0 - xS) = T_0(V_0 + xS) \Rightarrow x = \frac{V_0 T_F - T_0}{S T_F + T_0}$$

L'application numérique donne

$$x = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{200 \cdot 10^{-4}} \frac{350 - 300}{350 + 300} \simeq 3,85 \cdot 10^{-2} \text{ m soit } 3,85 \text{ cm}$$

Exercice 9 : Gonfler un ballon de volley

On souhaite gonfler à l'aide d'une pompe un ballon de volley-ball de volume $V_b = 2$ L. Initialement le ballon est à la température $T_0 = 293$ K et à la pression atmosphérique $P_{atm} = 1$ bar. La pompe a un volume utile de $V_p = 0,15$ L. L'air est approximé à un gaz parfait.

1. Calculer la pression dans le ballon après un aller retour du piston en supposant que la transformation est à température constante.
2. Combien d'aller-retour faut-il faire pour obtenir une pression de 4 bars dans le ballon ?

1. La pompe contient de l'air à la pression atmosphérique. L'air est assimilé à un gaz parfait et la pompe peut contenir n_1 moles d'air qui vérifient $P_0V_p = n_1RT$. Le ballon contient initialement n_0 moles d'air soit : $P_0V_b = n_0RT$.

Après un aller-retour de la pompe, le nombre de moles dans le ballon devient : $n_0 + n_1 = \frac{P_0}{RT}(V_b + V_p)$. La pression devient $P_1 = P_0 \frac{V_b + V_p}{V_b}$.

2. Après N aller-retours de la pompe, on a introduit Nn_1 mole d'air. La pression finale est donc $P_f = P_0 \frac{V_b + NV_p}{V_b}$ d'où en inversant la relation

$$N = \left(\frac{P_f}{P_0} - 1 \right) \frac{V_b}{V_p} = 40.$$

Exercice 10 : Oscillations d'un piston



Un tube cylindrique vertical de section S contient n moles de gaz parfait qui subit une transformation isotherme à la température T_0 . Un piston de masse m coulisse sans frottement dans le récipient (au dessus du gaz). La pression extérieure est égale à P_0 , l'axe z est pris vertical ascendant.

La pression étant uniforme sur chaque surface du piston, la force de pression s'exprime simplement comme la pression que multiplie la surface du piston.

1. Déterminer la hauteur h_0 de gaz dans le tube à l'équilibre.
2. Déterminer la pression dans le récipient en fonction de la hauteur h de gaz.
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le piston en fonction de $z = h - h_0$.
4. Déterminer la période des petites oscillations et vérifier l'homogénéité de l'expression.

1. À l'équilibre la somme des forces vaut 0. Le système considéré est le piston, soumis : à son poids, aux forces de pression extérieures, aux forces de pression intérieures. En supposant un axe z ascendant (schéma à faire) : $\vec{0} = -mg\vec{e}_z - P_0S\vec{e}_z + P_{eq}S\vec{e}_z$, d'où $P_{eq} = P_0 + \frac{mg}{S}$. La hauteur à l'équilibre est donc donné par $V_{eq} = Sh_0 = \frac{nRT_0}{P_{eq}} \Rightarrow h_0 = \frac{nRT_0}{SP_0 + mg}$

2. Lorsque la hauteur de gaz est h , on obtient d'après la loi des gaz parfaits : $PV = nRT_0$ où $V = sh$. La hauteur est donc $h = \frac{nRT_0}{PS}$.

3. on applique maintenant le principe fondamental de la dynamique au piston. Le bilan des forces est semblable à celui de la première question : $m\dot{h} = -mg + (P - P_0)S$.

En faisant la soustraction avec l'équation à l'équilibre, on obtient

$$m\ddot{h} = nRT_0 \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0} \right) = nRT_0 \left(\frac{h_0 - h}{hh_0} \right)$$

$$\text{d'où } m\ddot{z} = -nRT_0 \left(\frac{z}{(z+h_0)h_0} \right)$$

4. Pour les petites oscillations $m\ddot{z} \simeq -nRT_0 \left(\frac{z}{(h_0)h_0} \right)$ soit $\ddot{z} + \frac{nRT_0}{mh_0^2}z$.

On en déduit $\omega_0^2 = \sqrt{\frac{nRT_0}{mh_0^2}}$ et donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{mh_0^2}{nRT_0}}$.

nRT_0 est une énergie, mh_0^2 serait comme l'énergie cinétique si on divisait par un temps au carré, on a donc le terme dans la racine qui est homogène à $\frac{E.T^2}{E}$ et la formule est donc bien homogène.