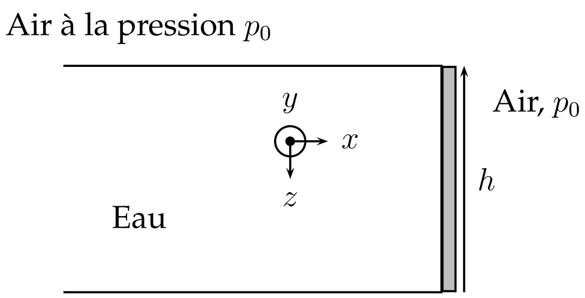
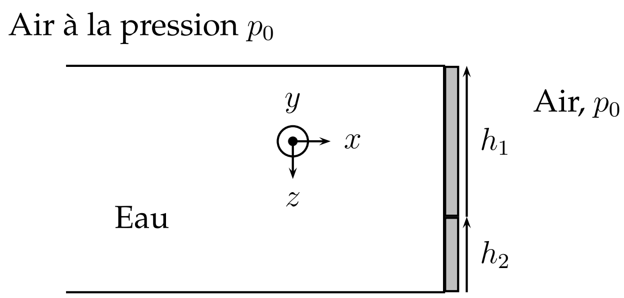
TRAVAUX DIRIGÉS DE T_2

Exercice 1 : Barrage Plan vertical

1. On modélise une retenue d'eau par un mur de soutien de hauteur h (selon la direction Oz) et de largeur a (selon la direction Oy) : figure ci-dessous à gauche.





   Ce mur est donc soumis aux forces de pression dues à l'action de l'eau (de masse volumique μ) et de l'air environnant à la pression uniforme p_0.

   Déterminer la résultante $\vec{F}$ des forces de pression exercées sur ce mur.

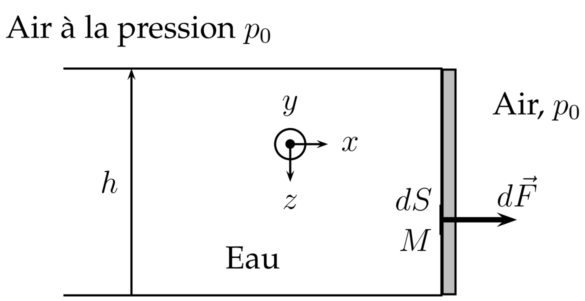
2. Le mur plan est maintenant constitué de deux parties, de même largeur a (selon la direction Oy) et de hauteurs respectives h_1 et h_2 : figure ci-dessus à droite.

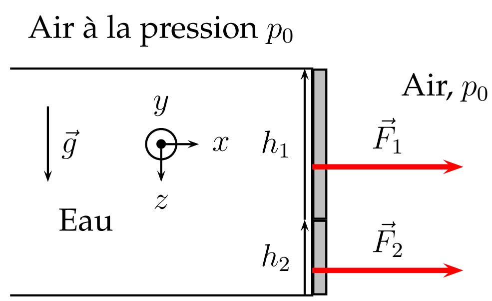
   On veut choisir le rapport $\frac{h_2}{h_1}$ pour que les résultantes $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ des forces de pression subies par les deux pavés soient identiques.

   Prévoir, sans calcul, si on doit prendre $h_1 > h_2$ ou $h_1 < h_2$.

   Calculer le rapport $\alpha = \frac{h_2}{h_1}$ convenable.

1. La force de pression élémentaire qu'exerce l'eau et l'air sur une surface élémentaire $dS = a.dz$ centrée en un point M est ici de la forme $d\vec{F} = d\vec{F}_{\text{eau/paroi}} + d\vec{F}_{\text{air/paroi}} \Rightarrow d\vec{F} = (p(M) - p_0)dS.\vec{e}_x$.





   La relation de la statique des fluides $dp = \rho\vec{g}.d\vec{r} = \rho(g\vec{e}_z).(dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z) = \rho g dz$ s'intègre facilement ici car ρ est constante (fluide incompressible).

   On obtient ainsi $p = \rho g z + Cte = \rho g z + p_0$ d'où $d\vec{F} = (\rho g z + p_0 - p_0).ds.\vec{e}_x \Rightarrow d\vec{F} = \rho g a z dz.\vec{e}_x$.
   Reste ensuite à intégrer de $z = 0$ à $z = h$:

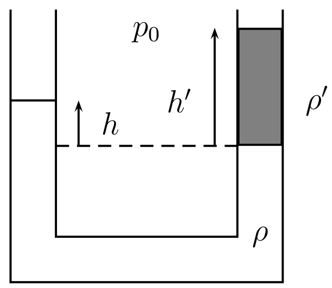
$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_{z=0}^{h} \rho g a z dz.\vec{e}_x = \rho g a.\vec{e}_x \int_{z=0}^{h} z dz = \rho g a.\vec{e}_x \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^h = \frac{\rho g a h^2}{2}.\vec{e}_x$$

2. On cherche maintenant à obtenir $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$.
   On a montré que $p(z)$ est ici une fonction croissante de z et donc à surfaces égales, $d\vec{F}$ augmente avec z.
   Pour obtenir $F_1 = F_2$, on devra donc choisir $h_2 < h_1$.
   On calcule maintenant F_1 et F_2 la norme des forces de pression sur les deux pavés en procédant comme dans la partie précédente. La seule différence réside dans les bornes d'intégration : pour déterminer F_1 on intégre dF de $z = 0$ à h_1 et de $z = h_1$ à $h_1 + h_2$ pour F_2. Ainsi,

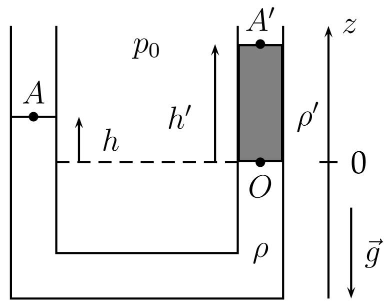
$$F_1 = \int_{z=0}^{h_1} \rho g a z.dz = \rho g a \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{h_1} = \frac{\rho g a h_1^2}{2} \text{ et } F_2 = \rho g a \left[\frac{z^2}{2}\right]_{h_1}^{h_1+h_2} = \frac{\rho g a[(h_1+h_2)^2 - h_1^2]}{2}$$

   On utilise ensuite $F_1 = F_2 \Rightarrow h_1^2 = (h_1+h_2)^2 - h_1^2 \Rightarrow h_1^2 = h_2^2 + 2h_1h_2 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$ en posant $\alpha = \frac{h_2}{h_1}$. Cette équation du second degré admet comme déterminant $\Delta = 2^2 + 4 = 8$ d'où les racines $\alpha_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2} < 0$ et $\alpha_2 = -1 + \sqrt{2}$. Mais comme le rapport $\alpha = \frac{h_2}{h_1}$ ne peut être que positif, on ne conserve que $\alpha_2 = \alpha = \sqrt{2} - 1$ d'où finalement $h_2 = (\sqrt{2} - 1).h_1 \simeq 0{,}41 h_1$ (on vérifie bien à posteriori que $h_2 < h_1$).

Exercice 2 : Liquides non miscibles dans un tube en U



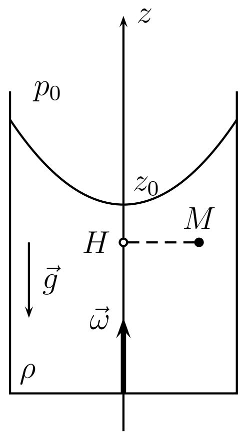
On verse de l'eau, de masse volumique ρ, dans un tube en U de section $S = 1$ cm^2.
On ajoute ensuite dans la branche de droite, 3 mL d'un liquide non miscible de masse volumique $\rho' = 600$ kg.m^{-3}.
Déterminer la différence de hauteur $\Delta h = h' - h$ entre les deux surfaces libres des deux branches.
p_0 est la pression atmosphérique.



En versant un volume $V' = 3$ mL$= 3$ cm^3 de liquide de masse volumique ρ' dans le tube de section $s = 1$ cm^2, on a formé une colonne de hauteur $h' = \frac{V'}{s} = 3$ cm.
La relation de la statique des fluides en référentiel galiléen s'écrit $dp = \rho\vec{g}.d\vec{r} = \rho(-g.\vec{e}_z).(dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z) = -\rho g.dz$ où ρ est la masse volumique du fluide et Oz l'axe vertical ascendant.
On travaille ici avec des fluides incompressibles (ρ et ρ' sont constants) et par intégration $p = -\rho g z + Cte \Rightarrow p + \rho g z = Cte$. De même $p + \rho' g z = Cte'$.
En se plaçant au point O de la surface de séparation entre les deux fluides, où règne une pression $p(0)$, on peut écrire $p(0) + 0 = Cte$ et $p(0) + 0 = Cte'$ ce qui montre que la constante est la même pour les deux fluides.
En appliquant maintenant la loi de l'hydrostatique au niveau des surfaces libres (points A et A') où la pression est p_0, la pression atmosphérique, on a

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \rho' g h' \Rightarrow h = \frac{\rho'}{\rho} h' \Rightarrow \Delta h = h' - h = 1{,}2 \text{ cm.}$$

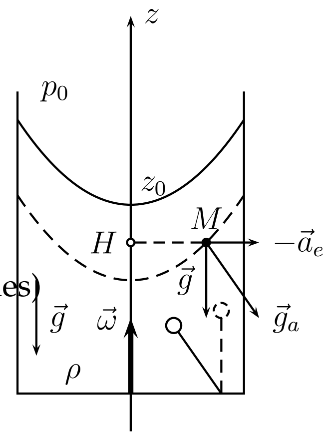
Exercice 3 : Statique des fluides en référentiel non galiléen : rotation.
On fait tourner un récipient contenant de l'eau autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire ω constante par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$.



1. On se place dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$. On admet qu'à cause de son caractère non galiléen, il faut ici rajouter une pseudo-force $\vec{F}_{i,e} = -m\vec{a}_e(M)$ pour un point matériel situé en M, où $\vec{a}_e$ est l'accélération d'un point P par rapport à $\mathcal{R}$ d'un point situé au même endroit que M, mais immobile par rapport à $\mathcal{R}'$.
   Exprimez le champ $\vec{a}_e(r,\theta,z)$.
2. Quelles sont les forces appliquées à une particule fluide immobile dans $\mathcal{R}'$, centrée autour de M et de volume dV ? Montrer que le champ de pesanteur $\vec{g}$ peut être remplacé par un champ apparent $\vec{g}_a$ qu'on exprimera en fonction de $\vec{g}$ et du vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{HM}$, H étant la projection de M sur l'axe de rotation.
3. Que devient la relation fondamentale de la statique des fluides ? on pourra utiliser la formulation locale.

4. Quelle est la forme de la surface libre air / eau ?
5. Citer une application en instrumentation optique qui s'appuie sur le résultat précédent.
6. On ajoute, son sein du liquide une balle très légère qui est maintenue par un fil idéal accroché au fond du récipient. Comment s'oriente, par rapport à la verticale du lieu le fil à l'équilibre dans le référentiel tournant ? Justifier physiquement.
7. Quelle remarque peut-on faire quant à la viscosité du fluide mis en rotation.

1. Pour un point $P(r,\theta,z)$ immobile dans $\mathcal{R}'$, la trajectoire dans $\mathcal{R}$ est un cercle, parcouru à vitesse constante. L'accélération d'entrainement vaut donc $\vec{a}_e = -r\omega^2\vec{e}_r$ en coordonnées cylindro-polaires.
2. Dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$ non galiléen, il faut tenir également compte des pseudo forces d'inertie. Ainsi, la particule fluide de volume dV centrée en M est soumise :



   - à son poids $d\vec{p} = dm\vec{g} = \rho dV\vec{g}$,
   - à la force d'inertie d'entraînement $d\vec{f}_{ie} = -dm\vec{a}_e = -\rho dV\vec{a}_e$,
   - la force d'inertie de Coriolis est nulle car $\vec{v}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$.
   - aux forces de pression.

   En posant $\vec{g} - \vec{a}_e = \vec{g}_a$ l'accélération de pesanteur apparente, on peut rassembler le poids et le force d'inertie d'entraînement (forces volumiques) sous $d\vec{p}_a = \rho dV(\vec{g} - \vec{a}_e) = \rho dV\vec{g}_a$ le poids apparent. Ici,

$$\vec{a}_e = -\omega^2\overrightarrow{HM} \Rightarrow \vec{g}_a = \vec{g} + \omega^2\overrightarrow{HM}$$

3. $-\overrightarrow{\text{grad}}p + \rho\vec{g} - \rho\vec{a}_e$
4. On s'est ramené au cas classique étudié en classe en remplaçant simplement $\vec{g}$ par $\vec{g}_a$.
   On peut donc admettre que la relation de la statique des fluides prend la forme $dp = \rho\vec{g}_a.d\vec{r}$.
   La surface libre correspond à $p = p_0 = Cte \Rightarrow dp = 0 \Rightarrow \rho\vec{g}_a.d\vec{r} = 0$.
   Dans le système de coordonnées cylindro polaires (le plus adapté ici, vu les symétries du problème) $d\vec{r} = dr.\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$ le déplacement élémentaire exprimé en fonction des vecteurs de la base orthonormée directe et

$$\vec{g}_a.d\vec{r} = 0 \Rightarrow (-g\vec{e}_z + \omega^2 r\vec{e}_r).(dr.\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z) = 0 \Rightarrow -gdz + \omega^2 rdr = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

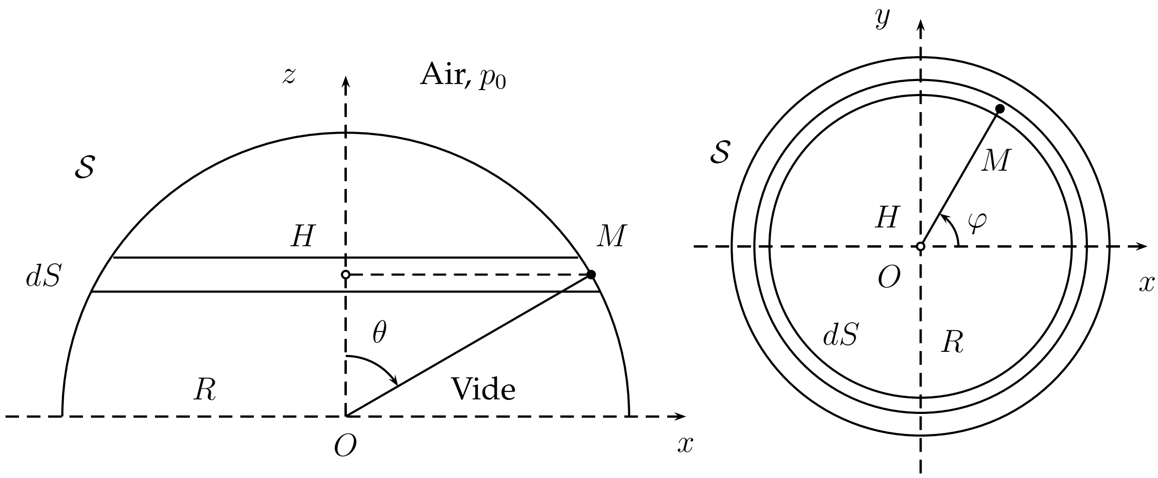
et par intégration, on obtient $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + Cte$. On peut déterminer la constante d'intégration car on a $z = z_0$ pour $r = 0$ (Cf figure) d'où finalement $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_0$: surface de révolution (indépendant de θ) paraboloïde.

Les surfaces isobares sont normales à $\vec{g}_a$ (Cf courbe pointillée sur la figure).

5. Application : mettre un bain de verre fondu en rotation peut être la première étape de la fabrication d'un grand miroir de télescope parabolique (Hubble).
6. Si $\omega = 0$, la direction de la ficelle est verticale ascendante (direction de $-\vec{g}$). Si $\omega \neq 0$, la direction de la ficelle est celle de $-\vec{g}_a = -\vec{g} - \omega^2 \vec{HM}$ c'est à dire qu'elle se rapproche de l'axe de rotation (inverse d'une force centrifuge, effet paradoxal) !

   Physiquement, ceci cela s'explique par le fait que la balle se déplace vers les lieux où la pression est plus faible, sous l'action de la poussée d'Archimède.
7. La mise en mouvement n'est possible que si des forces de viscosité existent entre le fluide et les parois. Par contre, en équilibre relatif, elles n'interviennent plus.

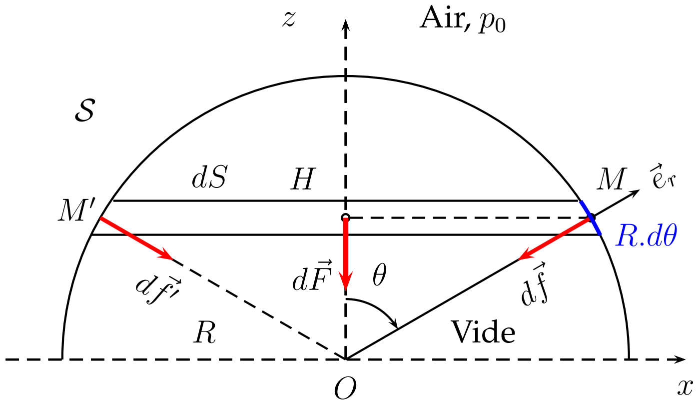
Exercice 4 : Force de pression sur une ventouse.
On considère une ventouse demi sphérique $\mathcal{S}$ de masse négligeable.

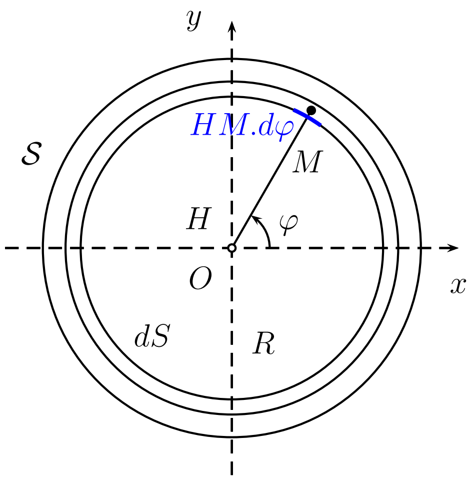


1. Représenter la force de pression élémentaire $d\vec{f}$ appliquée par l'air environnant sur une surface élémentaire ds entourant le point M. Donner son expression vectorielle en fonction de p_0, R, θ, φ, $d\theta$, $d\varphi$ les variations élémentaires et un vecteur unitaire.
2. En déduire, par symétrie, la direction et le sens de la force de pression élémentaire $d\vec{F}$ appliquée par l'air environnant sur la couronne de surface dS représentée sur le dessin.

   Donner l'expression de $d\vec{F}$ en fonction de p_0, R, θ, $d\theta$ et $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire de (Oz).
3. En déduire la force $\vec{F}$ appliquée sur la ventouse. Faire l'application numérique avec $R = 10$ cm et $p_0 = 1$ bar.

1. La force élémentaire de pression $d\vec{f}$ a pour point d'application le centre M de la surface élémentaire ds, elle est normale à cette dernière et orientée du fluide vers le paroi (Cf. figure).





Par définition de la pression p_0, on a $d\vec{f} = p_0.ds.\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire normal à la surface élémentaire ds et orienté du fluide vers la paroi.

En se plaçant dans le système de coordonnées sphériques, $\vec{u} = -\frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = -\vec{e}_r$ et $d\vec{f} = -p_0.ds.\vec{e}_r$.

On peut également exprimer ds en fonction des coordonnées R, θ, φ et leurs variations $d\theta$ et $d\varphi$ ($r = R = Cte$ ici) : si θ varie de $d\theta$ et φ de $d\varphi$, M se déplace sur la surface ds de cotés $R.d\theta$ et $HM.d\varphi = R\sin\theta d\varphi$. On en déduit $ds = R.d\theta \times R\sin\theta d\varphi = R^2\sin\theta d\theta.d\varphi$ et $d\vec{f} = -p_0R^2\sin\theta d\theta.d\varphi.\vec{e}_r = df_r.\vec{e}_r$ où $df_r < 0$ est la composante radiale de $d\vec{f}$.

2. À chaque point M on peut associer un point M' diamétralement opposé centre d'une surface ds' sur laquelle s'exerce une force élémentaire $d\vec{f}'$ (Cf figure).

   Les composantes "horizontales" de $d\vec{f}$ et $d\vec{f}'$ se compensent alors que leurs composantes "verticales" s'additionnent. On dit que df_z est la composante "utile" de $d\vec{f}$.

   Il en résulte que la force $d\vec{F}$ exercée sur la couronne dS est verticale. On peut par exemple la représenter en H (Cf. figure).

   $d\vec{F}$ est la résultante sur dS des forces élémentaires $d\vec{f}$, c'est à dire pour $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$:

$$d\vec{F} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\vec{f} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} df_x.\vec{e}_x + \int_{\varphi=0}^{2\pi} df_y.\vec{e}_y + \int_{\varphi=0}^{2\pi} df_z.\vec{e}_z = 0 + 0 + \int_{\varphi=0}^{2\pi} df_z.\vec{e}_z$$

   car on a montré par symétrie que seule la composante verticale de $d\vec{F}$ est non nulle. On en déduit $dF = \int df_z = \int d\vec{f}.\vec{e}_z = \int df_r.\cos\theta$: on passe ainsi d'une intégrale vectorielle à une intégrale simple. Attention, on a donc $d\vec{F} = \int d\vec{f}$ et $dF = \int df_z = \int \cos\theta.df_r \neq \int df_r$!
   En reprenant le résultat obtenu en 1. ($df_r = -p_0R^2\sin\theta d\theta d\varphi$), on en déduit :

$$dF = -\int_{\varphi=0}^{2\pi} p_0R^2\sin\theta\cos\theta d\theta.d\varphi = -2\pi p_0R^2\sin\theta\cos\theta d\theta \Rightarrow d\vec{F} = -2\pi p_0R^2\sin\theta\cos\theta d\theta.\vec{e}_z$$

3. $\vec{F}$ correspond à la somme des $d\vec{F}$ sur l'ensemble des couronnes dS c'est à dire pour $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

   Par additivité des forces exercées sur la ventouse, $\vec{F} = \int d\vec{F} = \int dF_z\vec{e}_z = \vec{e}_z\int dF_z$ car $\vec{e}_z$ est constant pour toutes les couronnes (les $d\vec{F}$ ont cette fois tous la même direction) et on a ainsi directement (sans avoir à projeter)

$$\vec{F} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\vec{F} = -2\pi p_0R^2.\vec{e}_z\int_{\theta=0}^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta = 2\pi p_0R^2.\vec{e}_z\left[\frac{1}{2}\cos^2\theta\right]_{\theta=0}^{\pi/2} = -\pi R^2p_0.\vec{e}_z$$

Remarque : $\vec{F} = -p_0 S \vec{e}_z$ où S est la surface du disque couvert par la ventouse.

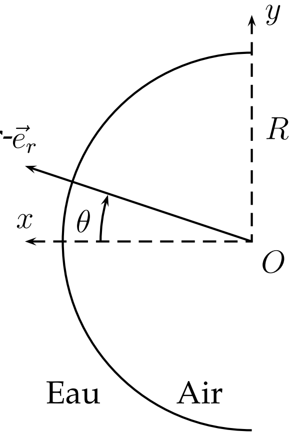
Pour $R = 10$ cm et $p_0 = 1$ bar soit 10^5 Pa, on calcule $||\vec{F}|| = 3140$ N. Cela signifie qu'en fixant cette ventouse à un plafond, on pourrait y suspendre une masse d'environ 320 kg.

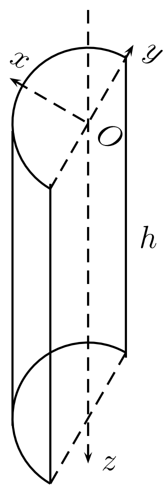
Exercice 5 : Force de pression sur un barrage hémicylindrique

Un barrage est constitué d'un demi-cylindre vertical de rayon R.
Il retient de l'eau, de masse volumique ρ sur une hauteur h.
Au dessus de la surface de l'eau et de l'autre coté du barrage, l'air impose une pression p_0 uniforme.

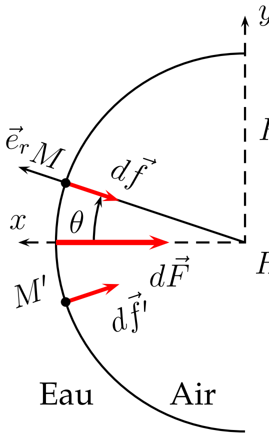
1. À votre avis, pourquoi est-ce la face convexe du barrage en béton (plus résistant en compression qu'en traction) qui est orientée vers l'eau ?
2. Donner l'expression de la force élémentaire $d\vec{f}$ exercée par l'eau et l'air sur une surface élémentaire ds.

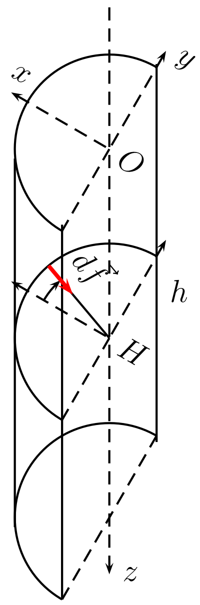
   On précisera sa norme, sa direction et son sens en fonction des données.
3. Montrer, à l'aide de considérations de symétrie que la force exercée par l'eau et l'air sur le barrage est selon la direction Ox. En déduire l'expression de la composante utile de $d\vec{f}$.
4. Calculer enfin F la norme de la force exercée par l'eau et l'air sur le barrage.





1. La forme du barrage est choisie de façon à ce que la résultante des forces de pression exercées par l'eau ait tendance à comprimer le mur de béton, il est alors plus résistant que si on l'étirait.
2. La force de pression élémentaire qu'exerce l'eau et l'air sur ds centrée en M est
   $d\vec{f} = d\vec{f}_{\text{eau/paroi}} + d\vec{f}_{\text{air/paroi}} = (p(M) - p_0)d\vec{s}$
   avec d'après la relation de la statique des fluides
   $dp = \rho\vec{g}.d\vec{r} = \rho g dz \Rightarrow p = \rho g z + Cte = \rho g z + p_0$
   d'où





$$d\vec{f} = (\rho g z + p_0 - p_0).d\vec{s} = -\rho g z ds.\vec{e}_r$$

   où $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{HM}}{HM}$ est le vecteur radial de la base cylindro polaire (H est le projeté de M sur Oz) et $ds = R.d\theta.dz$ la surface élémentaire.
3. À chaque point M on peut associer un point M' symétrique par rapport au plan Oxz, centre d'une surface ds' sur laquelle s'exerce une force élémentaire $d\vec{f}'$ (Cf figure).

Les composantes "verticales" de $d\vec{f}$ et $d\vec{f}'$ se compensent alors que leurs composantes "horizontales" s'additionnent. On dit que

$$df_x = d\vec{f}.\vec{e}_x = -\rho g z ds.\cos\theta = -\rho R g z dz.\cos\theta d\theta$$

est la composante "utile" de $d\vec{f}$.

4. Par sommation sur une bande demi circulaire ($-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$) et hauteur dz la force $d\vec{F}$ est colinéaire à $\vec{e}_x$: $d\vec{F} = F_x.\vec{e}_x$ avec ici

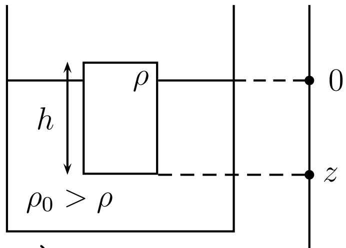
$$F_x = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} df_x = -\rho Rgzdz \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = -\rho Rgzdz \Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2\rho Rgzdz$$

Reste a sommer les $d\vec{F}$ sur toute la hauteur du barrage ($0 \leqslant z \leqslant 0$) pour obtenir la résultante des forces de poussée

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = -\int_{z=0}^{h} 2\rho Rgzdz.\vec{e}_x = (-2\rho Rg.\vec{e}_x)\int_{z=0}^{h} zdz = -\rho Rgh^2.\vec{e}_x$$

Exercice 6 : Oscillations verticales d'un cylindre dans l'eau

Un cylindre de section $s = 1$ cm^2, de hauteur $h = 10$ cm et de densité 0,6 (masse volumique ρ) est placé dans l'eau (masse volumique ρ_0). Un système annexe maintient son axe de révolution vertical.

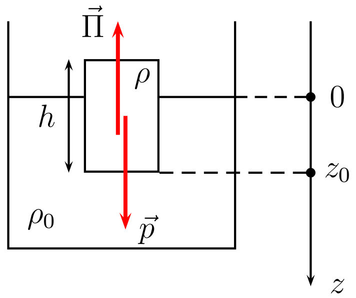


À l'équilibre

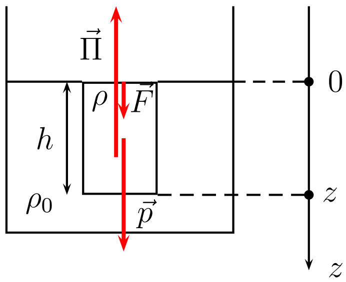
1. Déterminer z_0 la hauteur immergée à l'équilibre.
2. Quelle est la force à exercer sur le cylindre pour l'immerger en entier ?
3. À partir de la position d'équilibre déterminée en 1., on enfonce légèrement le cylindre et on le lâche. On néglige les frottements et on posera $\varepsilon = z - z_0$

Montrer que le cylindre effectuera des oscillations dont on déterminera la période.

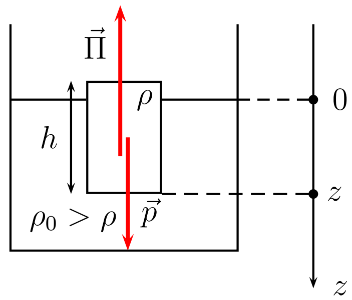
On travaille dans le référentiel lié au sol et considéré comme galiléen.
Le système étudié est le cylindre de volume $V = sh$ et de densité ρ c'est à dire de masse $m = \rho sh$.



À l'équilibre



Immersion totale



Hors l'équilibre

Il est soumis aux forces extérieures suivantes (figure ci-dessus à droite) :

- son poids : $\vec{p} = m.\vec{g} = \rho shg.\vec{e}_z$
- forces de pression des fluides dans lesquels il baigne : l'eau de masse volumique ρ_0 et l'air de masse volumique très inférieure.

  La résultante de ces forces est la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ égale à l'opposée du poids des fluides remplacés, c'est à dire un volume $V_0 = sz$ d'eau dont la masse est $m_0 = \rho_0 sz$ et le poids $\vec{p}_0 = \rho_0 sz\vec{g}$ (on néglige la masse et donc le poids du volume d'air $V_{\text{air}} = (h - z)s$ remplacé).

  Ainsi, $\vec{\Pi} = -\vec{p}_0 = -\rho_0 szg\vec{e}_z$ verticale ascendante.

1. À l'équilibre, $z = z_0$ et la résultante des forces est nulle (figure ci-dessus à gauche) :

$$\vec{p} + \vec{\Pi} = \vec{0} \Rightarrow \rho sh.\vec{e}_z - \rho_0 sz_0.\vec{e}_z = \vec{0} \Rightarrow z_0 = \frac{\rho}{\rho_0}h \simeq 6{,}0 \text{ cm}$$

2. Pour immerger le cylindre en entier ($z = h$), il faut qu'un opérateur exerce une force $\vec{F}$ supplémentaire verticale descendante telle que, à l'équilibre (figure ci-dessus au centre),

$$\vec{F} + \vec{p} + \vec{\Pi} = \vec{0} \Rightarrow F + \rho shg - \rho_0 shg = 0 \Rightarrow F = (\rho_0 - \rho)shg \simeq 4{,}0.10^{-2}\ \mathrm{N}$$

3. Hors équilibre l'application du théorème du centre d'inertie appliquée au cylindre de centre d'inertie G, s'écrit

$$m\vec{a}(G) = \vec{p} + \vec{\Pi} \Rightarrow \rho sh\ddot{z} = \rho shg - \rho_0 sgz \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\rho_0 g}{\rho h}z = g \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\rho_0 g}{\rho h}(z - \frac{\rho}{\rho_0}h) = 0$$

Équation (différentielle du second ordre à cœfficients constants et tous de même signe) qu'on peut également mettre sous la forme canonique

$$\ddot{z} + \omega_0^2(z - z_0) = 0 \text{ ou } \ddot{\varepsilon} + \omega_0^2.\varepsilon = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho h}} \text{ et } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 et de période $T_0 \simeq 0{,}5$ s.

Exercice 7 : Ballon Sonde

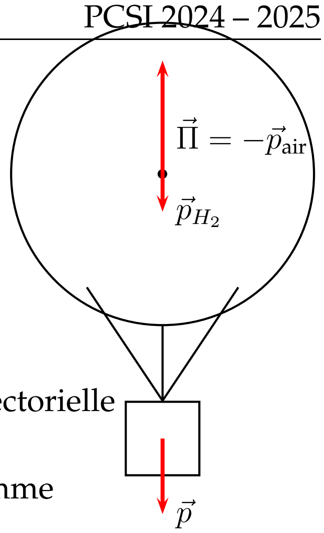
Un ballon sonde, de masse totale m quand il ne contient pas de gaz, sert à emmener des appareils de mesure à haute altitude. Son enveloppe contient n moles de dihydrogène de masse molaire $M = 2$ g.mol^{-1}. L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait de masse molaire $M_a = 29$ g.mol^{-1} et de température T_0 constante. On pose $n_0 = \frac{m}{M_a - M}$ et $H = \frac{RT_0}{M_a g}$ où $R = 8{,}31$ J.mol^{-1}.K^{-1} est la constante des gaz parfaits.

1. Quelle est la force résultante $\vec{F} = F.\vec{e}_z$ qui s'exerce sur ce ballon ?
2. Montrer que n_0 est la valeur minimale de n assurant le décollage. En déduire le volume minimum V_0 du ballon au départ (au sol, $p = p_0 = 1$ bar et $T = T_0 = 20$°C) pour $m = 50$ kg.
3. Exprimer F en fonction de m, g, n et n_0.
4. Rappeler ou retrouver l'expression de $p(z)$. Le volume V du ballon a une valeur maximale V_1 à ne pas dépasser, montrer que cela implique une altitude maximale z_1 à ne pas dépasser. Exprimer z_1 en fonction de n, H, V_0, V_1 et n_0.
5. En fait, à partir de z_1, une soupape s'ouvre, limitant le volume à V_1. Montrer que cela permet d'atteindre une nouvelle altitude z_2 à déterminer.

1. On travaille dans le référentiel lié au sol et considéré comme galiléen.

   Le système étudié est le ballon sonde de volume V qui contient une masse m_{H_2} de dihydrogène et l'instrumentation dont la masse est m lorsque le ballon est vide.

   Ce système est soumis aux forces extérieures suivantes (fig ci-contre) :



- son poids $\vec{p} = m.\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
- le poids de l'hydrogène qu'il transporte $\vec{p}_{H_2} = m_{H_2}.\vec{g} = -m_{H_2}g\vec{e}_z$
- les forces de pression exercées par l'air environnant de masse volumique ρ. La résultante est la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ égale à l'opposé du poids des fluides remplacés, $\vec{\Pi} = -\vec{p}_{\text{air}} = m_{\text{air}}g\vec{e}_z$ verticale ascendante.

La résultante des forces exercées sur le ballon est donc la somme vectorielle $\vec{F} = \vec{p} + \vec{p}_{H_2} + \vec{\Pi} = -mg\vec{e}_z - m_{H_2}g\vec{e}_z + m_{\text{air}}g\vec{e}_z$
avec $m_{H_2} = nM$ et $m_{\text{air}} = n_{\text{air}}.M_a$. Quelque soit le gaz considéré comme parfait, dans le volume V, à T_0 et p_0, $n_{H_2} = \frac{p_0 V}{RT_0} = n_{\text{air}} = n$.
En d'autres termes, comme le volume molaire est le même pour le dihydrogène et l'air, la quantité de matière de dihydrogène dans le ballon est égale à celle de l'air qu'il remplace d'où

$$\vec{F} = -mg\vec{e}_z - nMg\vec{e}_z + nM_a g\vec{e}_z = [n(M_a - M) - m]g.\vec{e}_z$$

2. La ballon décollera si $\vec{F}$ est verticale ascendante, c'est à dire si $F > 0$ avec $\vec{F} = F.\vec{e}_z$

$$F > 0 \Rightarrow [n(M_a - M) - m]g > 0 \Rightarrow n > \frac{m}{M_a - M} = n_0$$

On alors, par application de l'équation d'état des gaz parfaits,

$$V = V_0 = \frac{n_0 R T_0}{p_0} = \frac{mRT_0}{p_0(M_a - M)} \simeq 45 \ \text{m}^3$$

3. En reprenant $F = [n(M_a - M) - m]g$ et $n_0 = \frac{m}{M_a - M} \Rightarrow M_a - M = \frac{m}{n_0}$, on établit

$$F = \left(\frac{nm}{n_0} - m\right)g = \left(\frac{n}{n_0} - 1\right)mg$$

ce qui correspond à une sorte de poids apparent.

4. La masse volumique de l'air est $\rho(z) = \frac{m}{V} = \frac{nM_a}{V} = \frac{M_a p(z)}{RT_0}$ et la relation de la statique des fluides $dp(z) = -\rho g dz$ ici permet de retrouver

$$dp(z) = -\frac{M_a p g}{RT_0}dz \Rightarrow \frac{dp(z)}{dz} + \frac{p(z)}{H} = 0 \Rightarrow p(z) = p_0 e^{-\frac{z}{H}}$$

avec $H = \frac{RT_0}{Mg}$ et $p_0 = p(0)$ la pression au sol.
Ainsi, au fur et à mesure que le ballon va s'élever dans les airs, la pression extérieure va diminuer alors que la température restera constante d'où une augmentation du volume jusqu'à la valeur critique V_1 à l'altitude z_1 où il règne une pression $p(z_1)$ telles que

$$p(z_1) = \frac{nRT_0}{V_1} \Rightarrow p_0 e^{-\frac{z_1}{H}} = \frac{nRT_0}{V_1} \Rightarrow -\frac{z_1}{H} = \ln\frac{nRT_0}{p_0 V_1} \Rightarrow z_1 = H \ln\frac{p_0 V_1}{nRT_0}$$

et comme $p_0 V_0 = n_0 R T_0$, l'expression précédente prend la forme $z_1 = H \ln\frac{n_0 V_1}{n V_0}$

5. Pour $z \geqslant z_1$, une soupape s'ouvre, le ballon perd du dihydrogène : $n \downarrow$ selon l'équation $n(z) = \frac{p(z)V_1}{RT_0} = \frac{p_0 V_1}{RT_0}\exp(-\frac{z}{H})$ et le ballon cessera de monter dès que $F = 0$, c'est à dire pour $z = z_2$ telle que

$$n(z_2) = n_0 \Rightarrow \frac{p_0 V_1}{RT_0}\exp(-\frac{z_2}{H}) = n_0 \Rightarrow -\frac{z_2}{H} = \ln\frac{n_0 R T_0}{p_0 V_1} \Rightarrow z_2 = H \ln\frac{V_1}{V_0} > z_1$$

Exercice 8 : Utilisation du théorème d'Archimède

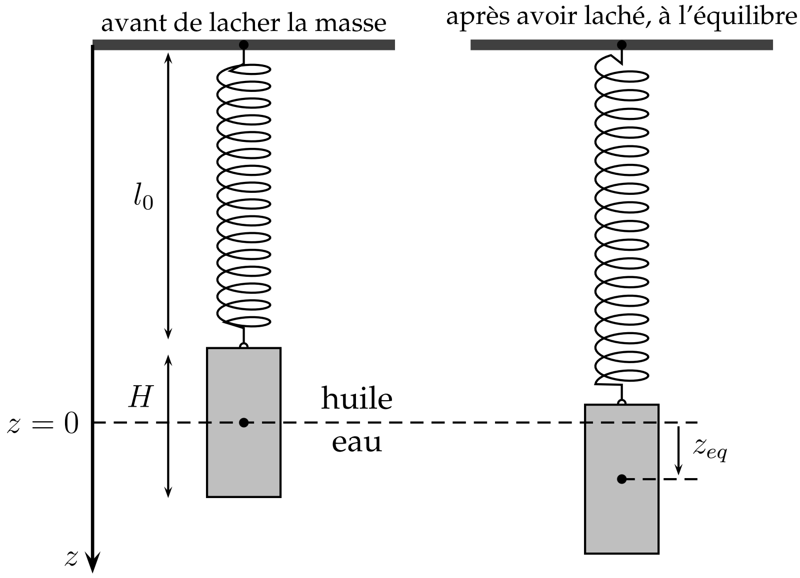
On considère une masse cylindrique suspendue via un ressort au plafond. Cette masse plonge dans un mélange non miscible d'huile et d'eau. Le ressort est fixé de telle sorte que, lorsqu'il est à sa longueur à vide, le centre de masse du cylindre suspendu est pile à l'interface huile/eau. z repère la position du centre de masse et on fixe l'origine des z à cette interface huile/eau.

On lâche la masse et après quelques oscillations, celle-ci atteint une position d'équilibre. Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de z à l'équilibre.

On utilisera les notations suivantes :

- ρ_S la masse volumique du cylindre, ρ_H celle de l'huile et ρ_E celle de l'eau ($\rho_E > \rho_H$) ;
- k la constante de raideur du ressort et l_0 sa longueur à vide ;
- s la section du cylindre et H sa hauteur, $m = \rho_S \times sH$ sa masse ;
- On posera $\rho_k = \frac{k}{sg}$.

On supposera le récipient dans lequel sont contenus l'eau et l'huile suffisamment large pour que l'interface ne monte pas et ne descende pas lorsque le cylindre bouge.



1. Montrer par une analyse dimensionnelle que la formule de ρ_k est bien homogène à une masse volumique.
2. Exprimer les forces subies par le cylindre en fonction de z. Pour plus de simplicité, on supposera que $|z| < \frac{H}{2}$.
3. Déterminer z_{eq} la valeur de z à l'équilibre en fonction des seuls paramètres $H, \rho_S, \rho_H, \rho_E, \rho_k$.

Bilan des forces appliquées à la masse : poids, poussée d'Archimède, ressort

— poids : $mg\vec{e}_z$;

— Archimède : $-\rho_H \times (H/2 - z)sg\vec{e}_z - \rho_E \times (H/2 + z)sg\vec{e}_z$;

— Ressort : $-k(l - l_0)\vec{e}_z = -kz\vec{e}_z$.

À l'équilibre, d'après la première loi de Newton : $mg - kz - \rho_H \left(\frac{H}{2} - z\right) sg - \rho_E \left(\frac{H}{2} + z\right) sg = 0$

$mg - \rho_H \frac{H}{2} sg - \rho_E \frac{H}{2} sg = z \times (k + \rho_H sg + \rho_E sg)$

$$z_{eq} = \frac{mg - \rho_H \frac{H}{2} sg - \rho_E \frac{H}{2} sg}{k + \rho_H sg + \rho_E sg} = \frac{1}{2} H \, \frac{2\rho_S - \rho_H - \rho_E}{\frac{k}{sg} + \rho_H + \rho_E}$$