

**TRAVAUX DIRIGÉS DE T<sub>3</sub>**
**Exercice 1 : Compressions d'un GP**


Un gaz parfait est enfermé dans un cylindre de volume  $V_1 = 5 \text{ L}$  à l'intérieur duquel peut coulisser (sans frottement) un piston de masse négligeable.

À l'extérieur du piston, la température est  $T_{\text{ext}} = 293 \text{ K}$ , la pression est  $P_{\text{ext}} = 1 \text{ atm}$ .

La paroi du cylindre étant parfaitement diatherme (diathermane), à l'équilibre la température du gaz est toujours  $T_{\text{ext}} = 293 \text{ K}$ . Au départ, la pression du gaz est  $p = P_1 = P_{\text{ext}}$ .

1. En appuyant sur le piston, on augmente très lentement la pression jusqu'à  $P_2 = 10 \text{ atm}$ .  
Calculer  $T_2$ ,  $V_2$ ,  $\Delta U$  et  $Q$ .
2. On passe maintenant instantanément de  $P_1$  à  $P_2$  puis on attend l'équilibre qui interviendra forcément après quelques oscillations du piston si on considère la viscosité du gaz.  
Calculer  $T'_2$ ,  $V'_2$ ,  $\Delta'U$  et  $Q'$ .

On rappelle :  $1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

Dans les deux cas, on fait passer le système fermé { Gaz parfait } de l'état initial  $P_1 = P_{\text{ext}}$ ,  $V_1$ ,  $T_1 = T_{\text{ext}}$  à l'état final  $P_2 = 10P_{\text{ext}}$ ,  $V_2$ ,  $T_2 = T_{\text{ext}}$ .

1. Si on suppose la transformation suffisamment lente et les parois diathermes, le système évolue de façon quasistatique, c'est à dire en passant par une succession d'états d'équilibre infiniment proche. On a en particulier  $T = T_{\text{ext}}$  à tout instant : la transformation est isotherme.

On en déduit  $T_2 = T_1 = T_{\text{ext}} = 293 \text{ K}$  (soit  $20^\circ\text{C}$ ).

D'après l'équation d'état,  $pV = nRT \Rightarrow pV = Cte \Rightarrow V_2 = \frac{p_1}{p_2} V_1 = \frac{V_1}{10} = 0,5 \text{ L}$ .

Le gaz état parfait, son énergie interne ne dépend que de sa température (première loi de Joule) et  $\Delta U = C_V(T_2 - T_1) = 0$ . Par application du premier principe (usuel), on a  $\Delta U = W + Q \Rightarrow Q = -W$  avec  $\delta W = -p_e \cdot dV = -p \cdot dV$  car la transformation est quasistatique. Attention, ici  $p_e$  la pression extérieure appliquée au système varie de  $p_{\text{ext}} = 1 \text{ atm}$  à  $10P_{\text{ext}} = 10 \text{ atm}$ .

On calcule alors

$$W = - \int p dV = -nR \int \frac{T}{V} \cdot dV = -nRT_{\text{ext}} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT_{\text{ext}} \ln \frac{V_2}{V_1} = P_{\text{ext}} V_1 \ln 10 > 0$$

Finalement,  $Q = -W \simeq -1,17 \text{ kJ} < 0$

2. Si on passe instantanément de  $P_1$  à  $P_2$ , la transformation n'est plus quasistatique. Par contre, on a toujours  $T_{\text{ext}} = Cte$  donc la transformation est monotherme.

De même, on peut considérer que dès le début de la compression,  $p_e = 10P_{\text{ext}} = P_2$  et ce jusqu'à l'état final donc la transformation est également monobare.

À la fin de la transformation, l'équilibre thermique est à nouveau atteint, on a donc à nouveau  $T'_2 = T_{\text{ext}} = 293 \text{ K}$  et  $V'_2 = \frac{p_1}{p_2} V_1 = 0,5 \text{ L}$  (mêmes paramètres d'état que dans le 1.).

Comme  $U$  est une fonction d'état, sa variation ne dépend que de l'état initial et final du système et on retrouve  $\Delta U = C_V(T'_2 - T_1) = 0$ .

Par contre  $W$  et  $Q$  sont des grandeurs d'échange et ici

$$W' = - \int p_e \cdot dV = -p_{\text{ext}} \int_{V_1}^{V_2} dV = -p_{\text{ext}}(V_2 - V_1) \Rightarrow Q = -p_{\text{ext}}(V_1 - V_2) = -\frac{9}{10} P_{\text{ext}} V_1 \simeq -4,56 \text{ kJ}.$$

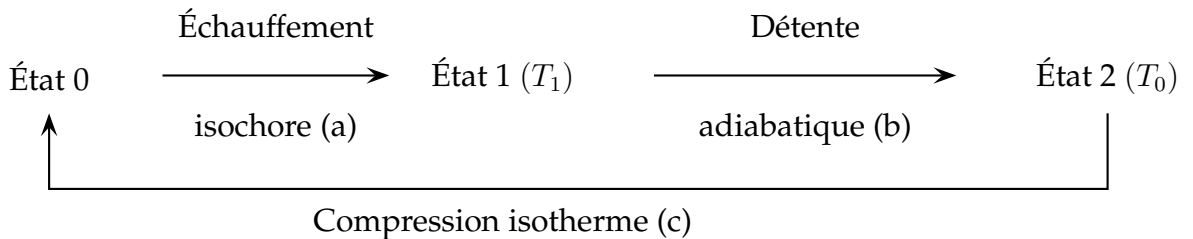
différents des résultats obtenus en 1.

**Exercice 2 : Cycle d'un GPM**

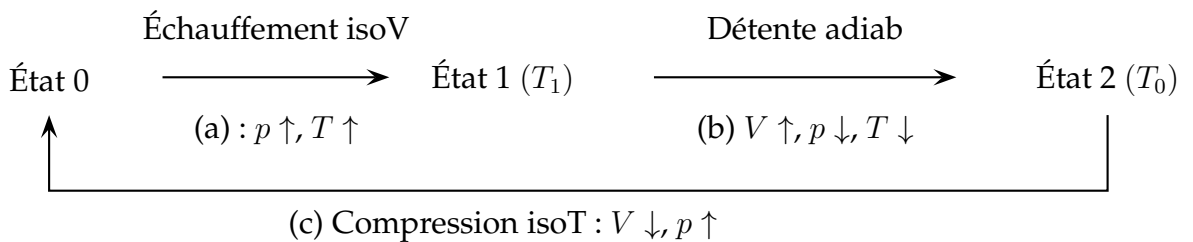


Un réservoir contient un volume  $V_0$  d'un gaz parfait monoatomique à une température  $T_0$  et une pression  $p_0$ .

On réalise la suite des transformations quasi statiques suivante :

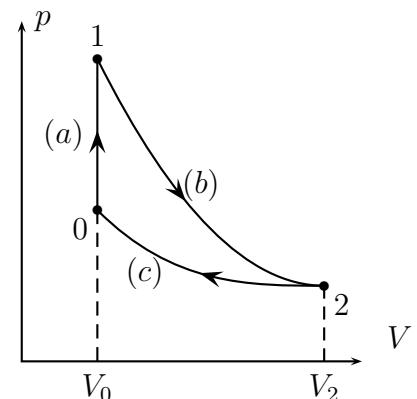


1. Représenter le cycle réalisé dans le diagramme de Watt  $p(V)$ .
2. Préciser pour chaque transformation (a), (b), (c) le travail échangé, le transfert thermique et la variation d'énergie interne du gaz parfait en fonction des seules données  $p_0, V_0, T_0$  et  $T_1$ .



1. On travaille sur le système thermodynamique : { gaz parfait monoatomique (GPM)}.  
On peut résumer la suite de transformations subies par le GPM sous la forme suivante :

- Transformation (a) ,  $0 \rightarrow 1$  :  $V = Cte \Rightarrow \frac{T}{p} = Cte$  et  $T$  augmente donc  $p$  croît : verticale ascendante.
- Transformation (b) ,  $1 \rightarrow 2$  : détente adiabatique réversible d'un GP d'où  $pV^\gamma = Cte$ ,  $p$  diminue donc fortement et  $V$  augmente et  $T$  diminue.
- Transformation (c) ,  $2 \rightarrow 1$  : compression isotherme d'un GP d'où  $pV = Cte$ ,  $p$  augmente quand  $V$  diminue, allure hyperbolique.



2. Étude énergétique :

- Transformation (a) isochore  $V = Cte \Rightarrow \delta W = -p_e dV = 0$  d'où  $W_a = 0$  et  $\Delta U_a = W_a + Q_a = Q_a = C_V(T_1 - T_0)$  avec  $C_V = \frac{3}{2}nR$  et en utilisant l'équation d'état en 0,  $p_0V_0 = nRT_0 \Rightarrow nR = \frac{p_0V_0}{T_0}$  d'où finalement

$$Q_a = \Delta U_A = \frac{3p_0V_0(T_1 - T_0)}{2T_0} = \frac{3}{2}p_0V_0 \left( \frac{T_1}{T_0} - 1 \right)$$

- Transformation (b) adiabatique d'où  $Q_b = 0$  et

$$W_b = \Delta U_b = C_V(T_0 - T_1) = -\Delta U_a = -\frac{3}{2}p_0V_0 \left( \frac{T_1}{T_0} - 1 \right)$$

- Transformation (c) isotherme d'un GP d'où  $U = Cte \Rightarrow \Delta U_c = 0$  et  $Q_c = -W_c$  avec

$$\delta W = -p_e.dV = -p.dV = -nRT_0 \frac{dV}{V} = -p_0 V_0 \frac{dV}{V} \Rightarrow W_c = -p_0 V_0 \ln \frac{V_0}{V_2}$$

Pour exprimer ce résultat en fonction des températures  $T_0$  et  $T_1$ , on utilise une des relations de Laplace (valables lors de (b)) :  $pV^\gamma = Cte$  et  $pV = Cte \Rightarrow TV^{\gamma-1} = Cte$  d'où ici entre 1. et 2. ( $T_2 = T_0, V_1 = V_0$ ),

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow T_1 V_0^{\gamma-1} = T_0 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow \ln \left( \frac{V_0}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \ln \frac{T_0}{T_1} \Rightarrow \ln \frac{V_0}{V_2} = \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_0}{T_1}$$

avec  $\gamma = \frac{5}{3}$  (gaz parfait monoatomique).

$$\Rightarrow Q_c = -W_c = p_0 V_0 \ln \frac{V_0}{V_2} = \frac{p_0 V_0}{\gamma-1} \ln \frac{T_0}{T_1} = \frac{3p_0 V_0}{2} \ln \frac{T_0}{T_1} < 0$$

**Exercice 3 : Bilan d'énergie du Cycle de LENOIR**

L'état initial d'une mole de gaz parfait est ( $p_0 = 2.10^5$  Pa,  $V_0 = 14$  L). On lui fait subir successivement et de manière réversible :

- une détente isobare qui double son volume,
  - une compression isotherme qui le ramène à son volume initial,
  - un refroidissement isochore qui le ramène à son état initial.
1. À quelle température  $T_1$ , la compression s'effectue-t-elle? En déduire  $p_2$ , la valeur de la pression maximale atteinte.
  2. Représenter le cycle décrit par ce gaz dans le diagramme de Watt ( $p, V$ ).
  3. Calculer le travail et le transfert thermique échangé par le système au cours du cycle.

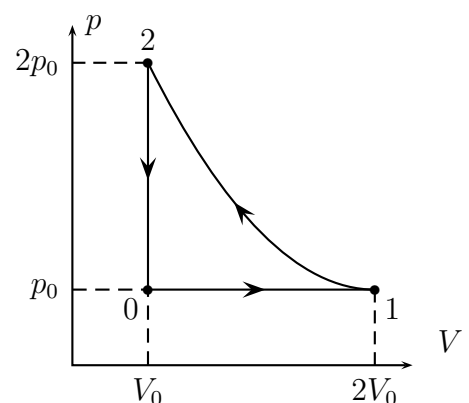
On donne  $R = 8,31$  J.mol<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>.

On travaille sur le système { une mole de gaz parfait } (équation d'état  $pV = RT$ ) subissant des transformations réversibles ( $\delta W = -p_e.dV = -p.dV$ ).

On commence par rassembler dans un tableau les données issues de l'énoncé :

État	0	→	1	→	2	→	0
Pression	$p_0$	isobare	$p_0$	isotherme	$p_2$	isochore	$p_0$
Volume	$V_0$	$\frac{T}{V} = Cte$	$2V_0$	$pV = Cte$	$V_0$	$\frac{T}{p} = Cte$	$V_0$
Température	$T_0$		$T_1$		$T_1$		$T_0$

1. Il vient alors directement (transformation 0 → 1)  $\frac{T_1}{2V_0} = \frac{T_0}{V_0} \Rightarrow T_1 = 2T_0 = \frac{2p_0 V_0}{R} \simeq 673$  K et (transformation 2 → 0)  $\frac{T_1}{p_2} = \frac{T_0}{p_0} \Rightarrow p_2 = \frac{T_1}{T_0} p_0 = 2p_0 = 4.10^5$  bar.
2. Comme les transformations sont quasistatique,  $p$  est définie à chaque instant et on peut tracer la suite de transformations dans le diagramme de Watt ( $p, V$ ).
3. On peut décomposer  $W_{\text{cycle}} = W_{0 \rightarrow 1} + W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 0}$  puis en déduire par application du premier principe  $Q_{\text{cycle}} = \Delta U_{\text{cycle}} - W_{\text{cycle}} = 0 - W_{\text{cycle}} = -W_{\text{cycle}}$  car  $U$  est une fonction d'état.  
On calcule successivement :



- $W_{0 \rightarrow 1} = W_{\text{isobare}}$  avec  $\delta W = -p_0 \cdot dV$   
 $\Rightarrow W_{0 \rightarrow 1} = -p_0(2V_0 - V_0) = -p_0V_0 < 0$  (détente).
- $W_{1 \rightarrow 2} = W_{\text{isotherme}}$  avec  $\delta W = -p \cdot dV = -RT_1 \frac{dV}{V}$

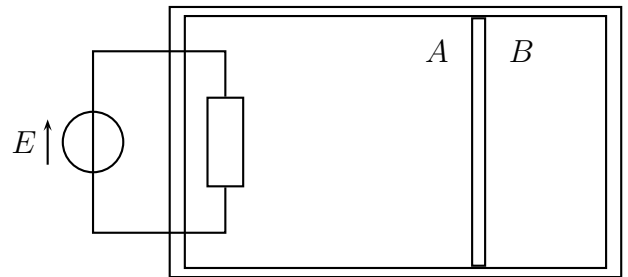
$$\Rightarrow W_{1 \rightarrow 2} = -2RT_0 \ln \frac{V_2}{V_1} = -2RT_0 \ln \frac{V_0}{2V_0} = 2RT_0 \ln 2 > 0 \text{ (compression)}$$

- $W_{2 \rightarrow 0} = W_{\text{isochore}} = 0$  car  $\delta W = -p \cdot dV$  avec ici  $dV = 0$ .

On en déduit  $W_{\text{cycle}} = -Q_{\text{cycle}} = -p_0V_0 + 2RT_0 \ln 2 = p_0V_0(2 \ln 2 - 1) \simeq 1064 \text{ J} > 0$  : cycle récepteur (sens trigonométrique).

### Exercice 4 : Transformations couplées

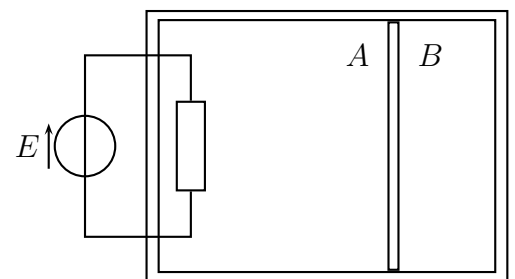
On considère un cylindre rigide aux parois adiabatiques séparé en deux compartiments A et B par un piston adiabatique mobile sans frottement. Ces deux compartiments contiennent le même gaz parfait dont on connaît l'exposant adiabatique  $\gamma$  supposé constant. Un conducteur ohmique de résistance  $R$  et de capacité thermique négligeable est placé dans A.



L'état initial correspond à  $V_{A0} = V_{B0} = V_0, p_{A0} = p_{B0} = p_0, T_{A0} = T_{B0} = T_0$ . On fait passer un courant  $I$  dans  $R$  sous une tension  $E$  pendant un temps  $\tau$ . Le gaz A passe alors lentement de  $V_{A0}$  à  $V_A = 2V_B$ .

1. Caractériser les transformations qui affectent les gaz A, B, {A + B} puis les systèmes {R + A} et {A + B + R}.
2. Quels sont les paramètres d'état ( $T_A, p_A, V_A, T_B, p_B$  et  $V_B$ ) des gaz dans l'état final.
3. Quels sont les échanges d'énergie (travail et transfert thermique) entre A et B?
4. Quels sont les échanges d'énergie entre le résistor et A?

1. A subit un chauffage irréversible, B subit une compression adiabatique réversible, {A + B} subit une transformation isochore irréversible, {R + A} subit une transformation adiabatique irréversible et {A + B + R} subit une transformation adiabatique isochore irréversible.



2. Comme l'enceinte contenant l'ensemble du dispositif est indéformable,  $V_A + V_B = Cte = 2V_0$  et à l'état final  $V_A = 2V_B \Rightarrow 2V_B + V_B = 2V_0 \Rightarrow V_B = \frac{2}{3}V_0$ .

B est un gaz parfait qui subit une transformation adiabatique réversible, on peut utiliser les relations de Laplace  $pV^\gamma = Cte$  entre l'état initial et l'état final d'où la première équation :

$$p_{B0}V_{B0}^\gamma = p_B V_B^\gamma \Rightarrow p_B \cdot V_B^\gamma = p_0 V_0^\gamma \Rightarrow p_B = p_0 \left( \frac{3}{2} \right)^\gamma > p_0$$

L'équation d'état permet ensuite de déterminer

$$nR = \frac{p_B V_B}{T_B} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \Rightarrow T_B = T_0 \frac{p_B V_B}{p_0 V_0} = T_0 \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2} \right)^\gamma = T_0 \left( \frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} > T_0$$

À l'équilibre final,  $p_A = p_B = p_0 \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma$  (équilibre de la paroi mobile) et  $V_A = 2V_0 - V_B = \frac{4}{3}V_0$  d'où

$$nR = \frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \Rightarrow T_A = T_0 \frac{p_A V_A}{p_0 V_0} = T_0 p_0 \frac{4}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma = 2T_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma-1} = 2T_B$$

3. B ne reçoit aucun transfert thermique de A mais le travail

$$W_B = \Delta U_B = C_V(T_B - T_0) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_0) = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1} \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

4. Le gaz A reçoit un transfert thermique  $Q_A$  de la part du résistor tel que  $\Delta U_A = Q_A + W_A$  où  $W_A$  est le travail des forces de pression exercées sur A :  $\delta W_A = -p_A \cdot dV_A = -p_B \cdot dV_A = +p_B \cdot dV_B$  car  $V_A + V_B = Cte \Rightarrow dV_A = -dV_B$  d'où  $W_A = -W_B$  et on en déduit

$$Q_A = \Delta U_A - W_A = C_V(T_A - T_0) + W_B = C_V(T_A - T_0) + C_V(T_B - T_0) = \frac{nR}{\gamma-1}(T_A + T_B - 2T_0)$$

$$\Rightarrow Q_A = \frac{nR}{\gamma - 1} T_0 \left[ 3 \left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma-1} - 2 \right]$$

**Exercice 5 : Chauffage d'un local**

Un local est chauffé à l'aide d'un radiateur électrique d'une puissance  $\mathcal{P}_{rad} > 0$ .

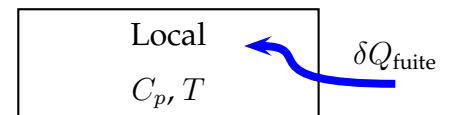
La pression atmosphérique est constante et la température extérieure est  $T_{ext}$  K (12°C).

Le local a une capacité thermique  $C_p$  indépendante de la température.

Il existe des fuites thermiques. La puissance dissipée dans ces fuites est proportionnelle à l'écart entre la température  $T$  de la pièce et la température extérieure :  $\mathcal{P}_{fuite} = \frac{\delta Q_{fuite}}{dt} = \frac{T - T_{ext}}{R_{th}}$  où  $R_{th}$  est la résistance thermique des parois.

1. Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction  $T(t)$  quand le chauffage du local n'est pas actif. Donner la solution littérale de cette équation pour une température initiale  $T_1 > T_{ext}$ . Quelle est, sans chauffage, la valeur limite de la température de la pièce ?
2. Montrer que la température de la pièce tend vers une limite  $T_{lim}$  quand le chauffage est en fonctionnement permanent.
3. Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction  $T(t)$  quand le chauffage du local est actif. Donner la solution littérale de cette équation pour une température initiale  $T_0 > T_{ext}$ .
4. Représenter graphiquement l'allure des variations de température au cours d'un cycle de chauffage si le radiateur se déclenche dès que  $T \leq T_0$  avec  $T(t)$  décroissante et s'arrête dès que  $T \geq T_1$  avec  $T(t)$  croissante.

1. Représentons le système { local } de capacité thermique  $C_p$  constante et à la température  $T$ . Pendant une durée  $dt$ , la présence des fuites thermiques entraîne un transfert thermique  $\delta Q_{fuite}$  négatif si  $T > T_{ext}$  et positif si  $T < T_{ext}$  (convention thermodynamique).



On en déduit avec les notations de l'énoncé

$$\delta Q_{fuite} = -\mathcal{P}_{fuite} \cdot dt = \frac{T_{ext} - T}{R_{th}} \cdot dt$$

Comme l'opération se déroule à pression constante, on peut écrire

$$dH = C_p dT = \delta Q = \delta Q_{fuite} = \frac{T_{ext} - T}{R_{th}} \cdot dt \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{th} C_p} = \frac{T_{ext}}{R_{th} C_p} \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_{ext}}{\tau}$$

En posant  $\tau = R_{th}C_p$  pour se ramener à la forme canonique.

La solution de cette équation est de la forme  $sol = sol_H + sol_P \Rightarrow T = A \cdot \exp(-\frac{t}{\tau}) + T_{ext}$  et à l'instant initial,  $T = T_1 > T_{ext}$  (condition initiale) d'où  $T_1 = A + T_{ext} \Rightarrow T = (T_1 - T_{ext}) \exp(-\frac{t}{\tau}) + T_{ext}$ .

Au bout de quelques  $\tau$ , le régime transitoire sera terminé et  $T$  correspondra à la solution particulière de l'équation différentielle :  $T = T_{ext}$ .

2. Quand le chauffage du local est actif, les radiateurs apportent un transfert thermique

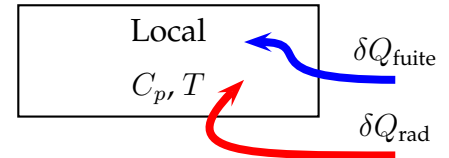
$$\delta Q_{rad} = P_{rad} dt > 0 \text{ pendant la durée } dt.$$

On a donc maintenant

$$dH = C_p dT = \delta Q = \delta Q_{fuite} + \delta Q_{rad} = (P_{rad} - P_{fuite}) \cdot dt$$

d'où

$$C_p \frac{dT}{dt} = (P_{rad} - P_{fuite})$$



et en régime permanent,  $T = T_{lim}$  constante

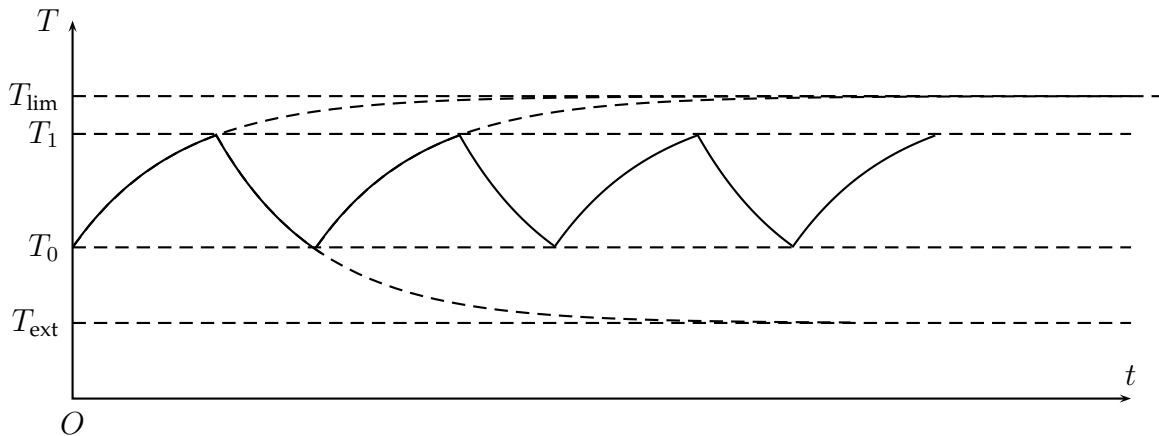
$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow P_{rad} = P_{fuite} = \frac{T_{lim} - T_{ext}}{R_{th}} \Rightarrow T_{lim} = T_{ext} + R_{th} P_{rad}$$

3. Hors régime permanent,

$$C_p \frac{dT}{dt} = (P_{rad} - P_{fuite}) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{P_{rad}}{C_p} - \frac{T - T_{ext}}{R_{th} C_p} \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{P_{rad}}{C_p} + \frac{T_{ext}}{R_{th} C_p} = \frac{T_{lim}}{\tau}$$

La solution de cette équation est de la forme  $T = T_{lim} + B \cdot \exp(-\frac{t}{\tau})$  et en utilisant la condition initiale  $T = T_0$  à  $t = 0$ , on en déduit comme dans 1.,  $T = (T_0 - T_{lim}) \exp(-\frac{t}{\tau}) + T_{lim}$ .

4. On va assister à l'équivalent d'une suite de charges et décharges de condensateur (analogie électrique) avec une constante de temps  $\tau$ .



L'allure de la courbe obtenue est proche de celle du multivibrateur astable.

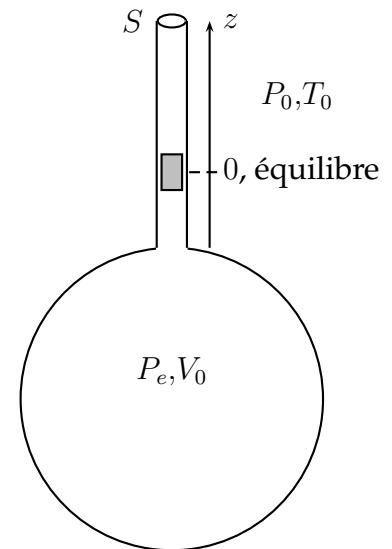
**Exercice 6 :** Mesure expérimentale de  $\gamma$ .



On considère un récipient fermé par un piston  $M$  de masse  $m$ , mobile sans frottement dans le col cylindrique vertical de section  $S$ .

Le récipient contient  $n$  moles d'un gaz parfait dont on cherche à déterminer l'exposant adiabatique  $\gamma$  constant.

À l'extérieur, l'air est à la pression  $P_0 = Cte$  et à l'équilibre, le volume intérieur du récipient est  $V_0$ .

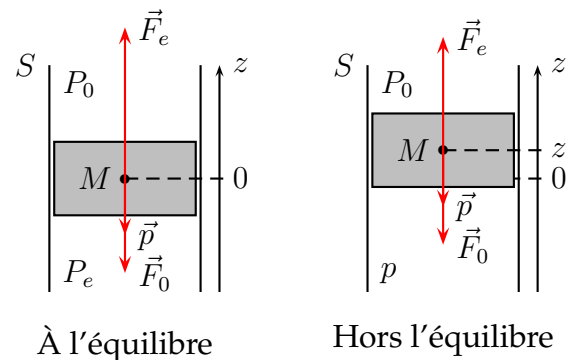


1. Déterminer  $P_e$ , la valeur de la pression à l'intérieur du récipient quand le piston est à l'équilibre. On appliquera la première loi de Newton à  $M$  lors de l'équilibre.
2. Le piston est déplacé de sa position d'équilibre, on notera  $P = P_e + dP$  la pression dans le récipient à un instant quelconque avec  $dP \ll P_e$  et toutes les transformations seront considérées comme adiabatiques et réversibles.
  - (a) Exprimer  $dP$  en fonction de  $dV$  puis de  $z$ , la position du piston par rapport à sa position d'équilibre.  $V \simeq V_0$ .
  - (b) En utilisant le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton), en déduire l'équation du mouvement du piston et la mettre sous la forme  $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$
  - (c) En déduire une méthode pratique de mesure de  $\gamma$ .

1. À l'équilibre, la somme vectorielle des forces appliquées à  $M$  est nulle : première loi de Newton. En plus de son poids,  $\vec{p} = -mg\vec{e}_z$ , il est soumis aux forces de pression  $\vec{F}_0 = -P_0S\cdot\vec{e}_z$  de la part de l'atmosphère et  $\vec{F}_e = +P_eS\cdot\vec{e}_z$  de la part du gaz contenu dans le réservoir.

Par projection de la première loi de Newton selon l'axe  $Oz$ , on obtient  $-mg - P_0S + P_eS = 0$

$$\Rightarrow P_e = P_0 + \frac{mg}{S}$$



2. Hors équilibre,

- (a) Le gaz parfait contenu dans le réservoir subit des transformations adiabatiques, quasi statiques et mécaniquement réversibles. On peut donc utiliser les relations de Laplace :

$$pV^\gamma = Cte \Rightarrow p = Cte \cdot V^{-\gamma} \Rightarrow \frac{dp}{dV} = -\gamma Cte \cdot V^{-\gamma-1} = -\gamma p V^\gamma \cdot V^{-\gamma-1} = -\gamma \frac{p}{V} \Rightarrow dp = -\gamma p \frac{dV}{V}$$

Or, lorsque le piston  $M$  se déplace de  $z$ , le volume de gaz dans récipient varie de  $dV = S \cdot z$

$$\Rightarrow dp = -\gamma p \frac{S z}{V} \simeq -\frac{\gamma p S}{V_0} z$$

- (b) Hors équilibre, la force de pression appliquée par le gaz contenu dans le récipient est maintenant de la forme  $\vec{F} = +pS\cdot\vec{e}_z$  avec  $p = P_e + dp = P_0 + \frac{mg}{S} + dp$  et par projection du principe fondamental de la dynamique selon l'axe  $Oz$ , on a cette fois :

$$m\ddot{z} = -mg - P_0S + pS \Rightarrow m\ddot{z} = -mg - P_0S + (P_e + dp)S = -mg - P_0S + mg + P_0S + Sdp = S \cdot dp$$

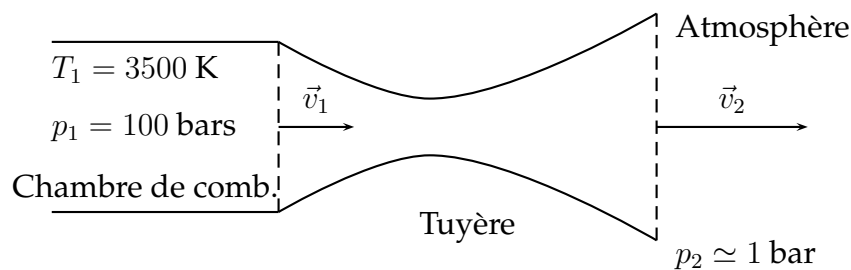
$$\Rightarrow \ddot{z} - \frac{Sdp}{m} = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\gamma p S^2}{mV_0} z = 0$$

Et en prenant  $p \simeq P_e$  constante on se ramène à une équation du type  $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$  : oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{\gamma P_e S^2}{mV_0}}$ .

(c) On peut utiliser la méthode suivante pour déterminer le coefficient  $\gamma$  :

- On mesure les caractéristiques du système ( $V_0, S, m$ ) et la pression atmosphérique  $P_0$ .
- On en déduit  $p_e$  la pression à l'équilibre.
- On lâche  $M$  sans vitesse initial au niveau du col du récipient.
- $M$  oscille dans le col, on mesure la durée correspondante à 4 ou 5 oscillations, on en déduit la période  $T_0$  puis  $\gamma$ .

**Exercice 7 : Détente dans une tuyère**



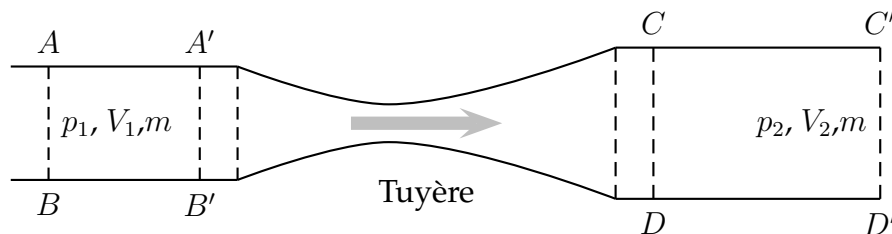
Une tuyère est une tuyauterie de section rigide variable qui conduit des gaz comprimés et chauds à se détendre.

Ces gaz sont issus de la chambre de combustion d'une fusée par exemple.

Si on suppose que le propergol utilisé est composé de  $O_2$  et  $H_2$ , les gaz brûlés sont de la vapeur d'eau (considérée comme gaz parfait) de masse molaire  $M$  et d'exposant adiabatique  $\gamma = 1,30$ .

La détente étant très rapide, on peut la considérer comme adiabatique.

1. Déterminer la relation liant les enthalpies massiques du gaz avant et après la détente  $h_1$  et  $h_2$  aux vitesses  $v_1$  et  $v_2$ .
2. On considère  $v_1 \ll v_2$  et la transformation réversible. On note  $c_p$  la capacité thermique massique à pression constante du gaz. En déduire l'expression de  $v_2$  en fonction de  $\gamma, R, M, T_1, p_1$  et  $p_2$  et faire l'application numérique.



On a ici affaire à une détente adiabatique ( $Q = 0$ ) d'un gaz parfait en écoulement rapide.

Cette situation est proche de celle de la détente de Joule - Thomson au cours de laquelle  $\Delta H = 0$ .

La différence étant que cette fois, on ne peut pas négliger la variation d'énergie mécanique  $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_c$  (la conduite est horizontale).

1. En raisonnant sur une tranche de gaz en écoulement (système fermé)  $ABCD$  à  $t$  et  $A'B'C'D'$  à  $t + dt$ , le travail de "transvasement" reçu est  $W_{trans} = W_{amont} + W_{aval}$  avec
  - en amont,  $p = p_1 = Cte$  dans la région  $ABA'B'$  où le volume varie de  $\Delta V = -V_1$  soit  $W_{amont} = -p_1(-V_1) = p_1 V_1 > 0$  (travail effectivement reçu).



- en aval,  $p = p_2 = Cte$  dans la région  $CDC'D'$  où le volume varie de  $\Delta V = V_2$  soit  $W_{\text{aval}} = -p_2(V_2) = -p_2V_2 < 0$  (travail effectivement fourni).

Le travail total reçu (travail de transvasement) est donc  $W = W_{\text{trans}} = p_1V_1 - p_2V_2$  (le travail "technique" est nul car pas de partie mobile dans la tuyère).

La variation d'énergie interne du système s'écrit quant à elle :  $\Delta U = U(t + \Delta t) - U(t) = U_{A'B'C'D'} - U_{ABCD} = U_2 + U_3(t + \Delta t) - (U_1 + U_3(t))$  en notant  $U_3$  l'énergie interne de la portion  $BCA'B'$ . Mais comme on se place en régime stationnaire,  $U_3$  est indépendant du temps et finalement,  $\Delta U = U_2 - U_1$ .

De même, la variation d'énergie cinétique est

$$\Delta E_c = E_c(t + \Delta t) - E_c(t) = E_{c2} + E_{c3} - (E_{c1} + E_{c3}) = E_{c2} - E_{c1} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

Par application du premier principe de la thermodynamique sur le système fermé en écoulement,

$$\Delta E = W + Q \Rightarrow \Delta U + \Delta E_c + 0 = W_{\text{trans}} + 0 + 0 \Rightarrow U_2 - U_1 + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = p_1V_1 - p_2V_2$$

$$\Rightarrow U_2 + p_2V_2 - (U_1 + p_1V_1) = -\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow H_2 - H_1 = -\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)$$

en divisant par  $m$  la masse de gaz qui traverse la tuyère pendant la durée  $dt$ .

- Si  $v_1 \ll v_2$ , la relation précédente peut s'écrire  $h_2 - h_1 \simeq -\frac{1}{2}v_2^2$  et si le fluide est considéré comme un gaz parfait,  $H_2 - H_1 = \Delta H = C_p(T_2 - T_1) = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$  et par unité de masse,

$$h_2 - h_1 = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)}(T_2 - T_1)$$

Par ailleurs, si la transformation est adiabatique et réversible, on a également  $pV^\gamma = Cte$  (relation de Laplace) et  $pV = nRT$  d'où  $p^{1-\gamma}.T^\gamma = Cte$  et ici

$$p_2^{1-\gamma}.T_2^\gamma = p_1^{1-\gamma}.T_1^\gamma \Rightarrow T_2 = T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

On en déduit

$$v_2^2 = -\frac{2R\gamma T_1}{M(\gamma - 1)} \left[ \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right] \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2R\gamma T_1}{M(\gamma - 1)} \left[ 1 - \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]} \simeq 3,0 \text{ km.s}^{-1}$$

Remarque : n'oubliez d'exprimer  $M$  en  $\text{kg.mol}^{-1}$  lors de l'application numérique.