

TRAVAUX DIRIGÉS DE T₃

Exercice 1 : Compressions d'un GP



Un gaz parfait est enfermé dans un cylindre de volume $V_1 = 5 \text{ L}$ à l'intérieur duquel peut coulisser (sans frottement) un piston de masse négligeable.

À l'extérieur du piston, la température est $T_{\text{ext}} = 293 \text{ K}$, la pression est $P_{\text{ext}} = 1 \text{ atm}$.

La paroi du cylindre étant parfaitement diatherme (diathermane), à l'équilibre la température du gaz est toujours $T_{\text{ext}} = 293 \text{ K}$. Au départ, la pression du gaz est $p = P_1 = P_{\text{ext}}$.

1. En appuyant sur le piston, on augmente très lentement la pression jusqu'à $P_2 = 10 \text{ atm}$.
Calculer $T_2, V_2, \Delta U$ et Q .
2. On passe maintenant instantanément de P_1 à P_2 puis on attend l'équilibre qui interviendra forcément après quelques oscillations du piston si on considère la viscosité du gaz.
Calculer $T'_2, V'_2, \Delta'U$ et Q' .

On rappelle : $1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Dans les deux cas, on fait passer le système fermé { Gaz parfait } de l'état initial $P_1 = P_{\text{ext}}, V_1, T_1 = T_{\text{ext}}$ à l'état final $P_2 = 10P_{\text{ext}}, V_2, T_2 = T_{\text{ext}}$.

1. Si on suppose la transformation suffisamment lente et les parois diathermes, le système évolue de façon quasistatique, c'est à dire en passant par une succession d'états d'équilibre infiniment proche. On a en particulier $T = T_{\text{ext}}$ à tout instant : la transformation est isotherme.

On en déduit $T_2 = T_1 = T_{\text{ext}} = 293 \text{ K}$ (soit 20°C).

D'après l'équation d'état, $pV = nRT \Rightarrow pV = Cte \Rightarrow V_2 = \frac{p_1}{p_2}V_1 = \frac{V_1}{10} = 0,5 \text{ L}$.

Le gaz état parfait, son énergie interne ne dépend que de sa température (première loi de Joule) et $\Delta U = C_V(T_2 - T_1) = 0$. Par application du premier principe (usuel), on a $\Delta U = W + Q \Rightarrow Q = -W$ avec $\delta W = -p_e \cdot dV = -p \cdot dV$ car la transformation est quasistatique. Attention, ici p_e la pression extérieure appliquée au système varie de $p_{\text{ext}} = 1 \text{ atm}$ à $10P_{\text{ext}} = 10 \text{ atm}$.

On calcule alors

$$W = - \int p dV = -nR \int \frac{T}{V} \cdot dV = -nRT_{\text{ext}} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT_{\text{ext}} \ln \frac{V_2}{V_1} = P_{\text{ext}} V_1 \ln 10 > 0$$

Finalement, $Q = -W \simeq -1,17 \text{ kJ} < 0$

2. Si on passe instantanément de P_1 à P_2 , la transformation n'est plus quasistatique. Par contre, on a toujours $T_{\text{ext}} = Cte$ donc la transformation est monotherme.

De même, on peut considérer que dès le début de la compression, $p_e = 10P_{\text{ext}} = P_2$ et ce jusqu'à l'état final donc la transformation est également monobare.

À la fin de la transformation, l'équilibre thermique est à nouveau atteint, on a donc à nouveau $T'_2 = T_{\text{ext}} = 293 \text{ K}$ et $V'_2 = \frac{p_1}{p_2}V_1 = 0,5 \text{ L}$ (mêmes paramètres d'état que dans le 1.).

Comme U est une fonction d'état, sa variation ne dépend que de l'état initial et final du système et on retrouve $\Delta U = C_V(T'_2 - T_1) = 0$.

Par contre W et Q sont des grandeurs d'échange et ici

$$W' = - \int p_e \cdot dV = -p_{\text{ext}} \int_{V_1}^{V_2} dV = -p_{\text{ext}}(V_2 - V_1) \Rightarrow Q = -p_{\text{ext}}(V_1 - V_2) = -\frac{9}{10}P_{\text{ext}}V_1 \simeq -4,56 \text{ kJ}.$$

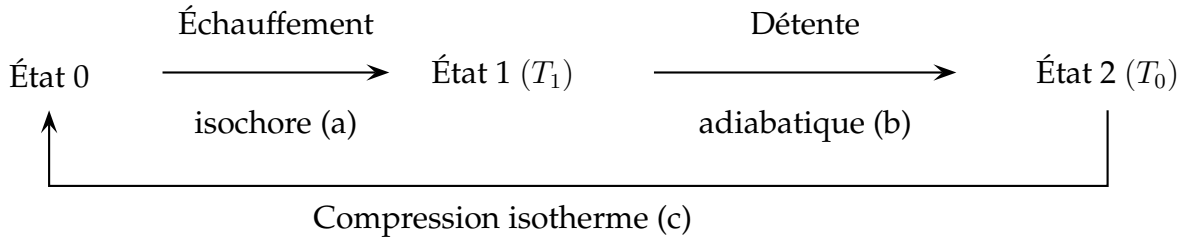
différents des résultats obtenus en 1.

Exercice 2 : Cycle d'un GPM

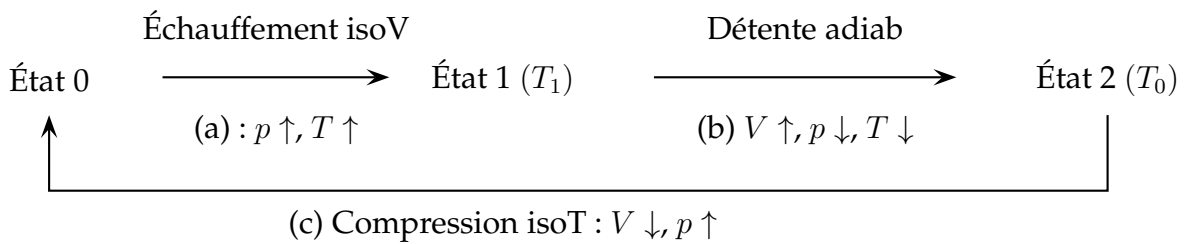


Un réservoir contient un volume V_0 d'un gaz parfait monoatomique à une température T_0 et une pression p_0 .

On réalise la suite des transformations quasi statiques suivante :

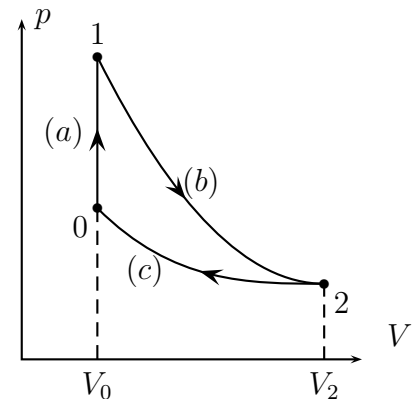


1. Représenter le cycle réalisé dans le diagramme de Watt $p(V)$.
2. Préciser pour chaque transformation (a), (b), (c) le travail échangé, le transfert thermique et la variation d'énergie interne du gaz parfait en fonction des seules données p_0, V_0, T_0 et T_1 .



1. On travaille sur le système thermodynamique : { gaz parfait monoatomique (GPM)}.
On peut résumer la suite de transformations subies par le GPM sous la forme suivante :

- Transformation (a) , $0 \rightarrow 1$: $V = Cte \Rightarrow \frac{T}{p} = Cte$ et T augmente donc p croît : verticale ascendante.
- Transformation (b) , $1 \rightarrow 2$: détente adiabatique réversible d'un GP d'où $pV^\gamma = Cte$, p diminue donc fortement et V augmente et T diminue.
- Transformation (c) , $2 \rightarrow 1$: compression isotherme d'un GP d'où $pV = Cte$, p augmente quand V diminue, allure hyperbolique.



2. Étude énergétique :

- Transformation (a) isochore $V = Cte \Rightarrow \delta W = -p_e dV = 0$ d'où $W_a = 0$ et $\Delta U_a = W_a + Q_a = Q_a = C_V(T_1 - T_0)$ avec $C_V = \frac{3}{2}nR$ et en utilisant l'équation d'état en 0, $p_0V_0 = nRT_0 \Rightarrow nR = \frac{p_0V_0}{T_0}$ d'où finalement

$$Q_a = \Delta U_A = \frac{3p_0V_0(T_1 - T_0)}{2T_0} = \frac{3}{2}p_0V_0\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right)$$

- Transformation (b) adiabatique d'où $Q_b = 0$ et

$$W_b = \Delta U_b = C_V(T_0 - T_1) = -\Delta U_a = -\frac{3}{2}p_0V_0\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right)$$

- Transformation (c) isotherme d'un GP d'où $U = Cte \Rightarrow \Delta U_c = 0$ et $Q_c = -W_c$ avec

$$\delta W = -p_e.dV = -p.dV = -nRT_0 \frac{dV}{V} = -p_0 V_0 \frac{dV}{V} \Rightarrow W_c = -p_0 V_0 \ln \frac{V_0}{V_2}$$

Pour exprimer ce résultat en fonction des températures T_0 et T_1 , on utilise une des relations de Laplace (valables lors de (b)) : $pV^\gamma = Cte$ et $pV = Cte \Rightarrow TV^{\gamma-1} = Cte$ d'où ici entre 1. et 2. ($T_2 = T_0, V_1 = V_0$),

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow T_1 V_0^{\gamma-1} = T_0 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow \ln \left(\frac{V_0}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \ln \frac{T_0}{T_1} \Rightarrow \ln \frac{V_0}{V_2} = \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_0}{T_1}$$

avec $\gamma = \frac{5}{3}$ (gaz parfait monoatomique).

$$\Rightarrow Q_c = -W_c = p_0 V_0 \ln \frac{V_0}{V_2} = \frac{p_0 V_0}{\gamma-1} \ln \frac{T_0}{T_1} = \frac{3p_0 V_0}{2} \ln \frac{T_0}{T_1} < 0$$

Exercice 3 : Bilan d'énergie du Cycle de LENOIR

L'état initial d'une mole de gaz parfait est ($p_0 = 2.10^5$ Pa, $V_0 = 14$ L). On lui fait subir successivement et de manière réversible :

- une détente isobare qui double son volume,
 - une compression isotherme qui le ramène à son volume initial,
 - un refroidissement isochore qui le ramène à son état initial.
- À quelle température T_1 , la compression s'effectue-t-elle? En déduire p_2 , la valeur de la pression maximale atteinte.
 - Représenter le cycle décrit par ce gaz dans le diagramme de Watt (p, V).
 - Calculer le travail et le transfert thermique échangé par le système au cours du cycle.

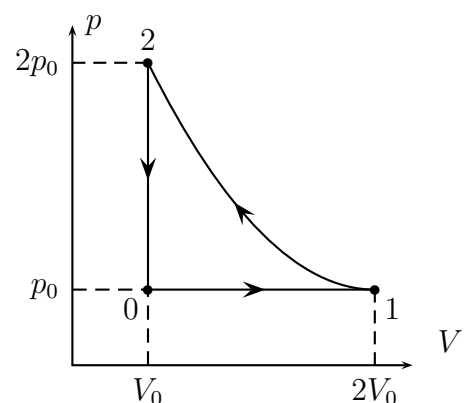
On donne $R = 8,31$ J.mol⁻¹.K⁻¹.

On travaille sur le système { une mole de gaz parfait } (équation d'état $pV = RT$) subissant des transformations réversibles ($\delta W = -p_e.dV = -p.dV$).

On commence par rassembler dans un tableau les données issues de l'énoncé :

État	0	→	1	→	2	→	0
Pression	p_0	isobare	p_0	isotherme	p_2	isochore	p_0
Volume	V_0	$\frac{T}{V} = Cte$	$2V_0$	$pV = Cte$	V_0	$\frac{T}{p} = Cte$	V_0
Température	T_0		T_1		T_1		T_0

- Il vient alors directement (transformation 0 → 1) $\frac{T_1}{2V_0} = \frac{T_0}{V_0} \Rightarrow T_1 = 2T_0 = \frac{2p_0 V_0}{R} \simeq 673$ K et (transformation 2 → 0) $\frac{T_1}{p_2} = \frac{T_0}{p_0} \Rightarrow p_2 = \frac{T_1}{T_0} p_0 = 2p_0 = 4.10^5$ bar.
- Comme les transformations sont quasistatique, p est définie à chaque instant et on peut tracer la suite de transformations dans le diagramme de Watt (p, V).
- On peut décomposer $W_{\text{cycle}} = W_{0 \rightarrow 1} + W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 0}$ puis en déduire par application du premier principe $Q_{\text{cycle}} = \Delta U_{\text{cycle}} - W_{\text{cycle}} = 0 - W_{\text{cycle}} = -W_{\text{cycle}}$ car U est une fonction d'état.
On calcule successivement :

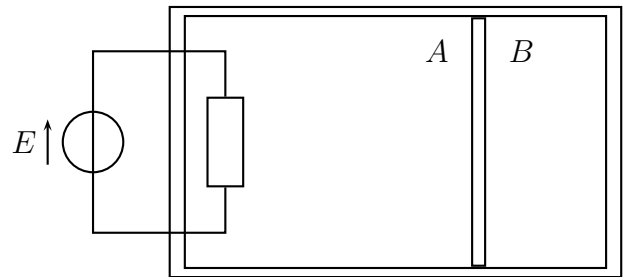


- $W_{0 \rightarrow 1} = W_{\text{isobare}}$ avec $\delta W = -p_0 \cdot dV$
 $\Rightarrow W_{0 \rightarrow 1} = -p_0(2V_0 - V_0) = -p_0V_0 < 0$ (détente).
- $W_{1 \rightarrow 2} = W_{\text{isotherme}}$ avec $\delta W = -p \cdot dV = -RT_1 \frac{dV}{V}$
 $\Rightarrow W_{1 \rightarrow 2} = -2RT_0 \ln \frac{V_2}{V_1} = -2RT_0 \ln \frac{V_0}{2V_0} = 2RT_0 \ln 2 > 0$ (compression)
- $W_{2 \rightarrow 0} = W_{\text{isochore}} = 0$ car $\delta W = -p \cdot dV$ avec ici $dV = 0$.

On en déduit $W_{\text{cycle}} = -Q_{\text{cycle}} = -p_0V_0 + 2RT_0 \ln 2 = p_0V_0(2 \ln 2 - 1) \simeq 1064 \text{ J} > 0$: cycle récepteur (sens trigonométrique).

Exercice 4 : Transformations couplées

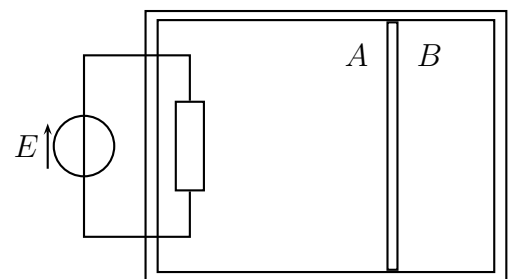
On considère un cylindre rigide aux parois adiabatiques séparé en deux compartiments A et B par un piston adiabatique mobile sans frottement. Ces deux compartiments contiennent le même gaz parfait dont on connaît l'exposant adiabatique γ supposé constant. Un conducteur ohmique de résistance R et de capacité thermique négligeable est placé dans A.



L'état initial correspond à $V_{A0} = V_{B0} = V_0, p_{A0} = p_{B0} = p_0, T_{A0} = T_{B0} = T_0$. On fait passer un courant I dans R sous une tension E pendant un temps τ . Le gaz A passe alors lentement de V_{A0} à $V_A = 2V_B$.

1. Caractériser les transformations qui affectent les gaz A, B, {A + B} puis les systèmes {R + A} et {A + B + R}.
2. Quels sont les paramètres d'état (T_A, p_A, V_A, T_B, p_B et V_B) des gaz dans l'état final.
3. Quels sont les échanges d'énergie (travail et transfert thermique) entre A et B?
4. Quels sont les échanges d'énergie entre le résistor et A?

1. A subit un chauffage irréversible, B subit une compression adiabatique réversible, {A + B} subit une transformation isochore irréversible, {R + A} subit une transformation adiabatique irréversible et {A + B + R} subit une transformation adiabatique isochore irréversible.



2. Comme l'enceinte contenant l'ensemble du dispositif est indéformable, $V_A + V_B = Cte = 2V_0$ et à l'état final $V_A = 2V_B \Rightarrow 2V_B + V_B = 2V_0 \Rightarrow V_B = \frac{2}{3}V_0$.

B est un gaz parfait qui subit une transformation adiabatique réversible, on peut utiliser les relations de Laplace $pV^\gamma = Cte$ entre l'état initial et l'état final d'où la première équation :

$$p_{B0}V_{B0}^\gamma = p_BV_B^\gamma \Rightarrow p_B \cdot V_B^\gamma = p_0V_0^\gamma \Rightarrow p_B = p_0 \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma > p_0$$

L'équation d'état permet ensuite de déterminer

$$nR = \frac{p_BV_B}{T_B} = \frac{p_0V_0}{T_0} \Rightarrow T_B = T_0 \frac{p_BV_B}{p_0V_0} = T_0 \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma = T_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma-1} > T_0$$

À l'équilibre final, $p_A = p_B = p_0 \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma$ (équilibre de la paroi mobile) et $V_A = 2V_0 - V_B = \frac{4}{3}V_0$ d'où

$$nR = \frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \Rightarrow T_A = T_0 \frac{p_A V_A}{p_0 V_0} = T_0 p_0 \frac{4}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma = 2T_0 \left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma-1} = 2T_B$$

3. B ne reçoit aucun transfert thermique de A mais le travail

$$W_B = \Delta U_B = C_V(T_B - T_0) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_0) = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

4. Le gaz A reçoit un transfert thermique Q_A de la part du résistor tel que $\Delta U_A = Q_A + W_A$ où W_A est le travail des forces de pression exercées sur A : $\delta W_A = -p_A \cdot dV_A = -p_B \cdot dV_A = +p_B \cdot dV_B$ car $V_A + V_B = Cte \Rightarrow dV_A = -dV_B$ d'où $W_A = -W_B$ et on en déduit

$$Q_A = \Delta U_A - W_A = C_V(T_A - T_0) + W_B = C_V(T_A - T_0) + C_V(T_B - T_0) = \frac{nR}{\gamma-1}(T_A + T_B - 2T_0)$$

$$\Rightarrow Q_A = \frac{nR}{\gamma - 1} T_0 \left[3 \left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma-1} - 2 \right]$$

Exercice 5 : Chauffage d'un local

Un local est chauffé à l'aide d'un radiateur électrique d'une puissance $\mathcal{P}_{rad} > 0$.

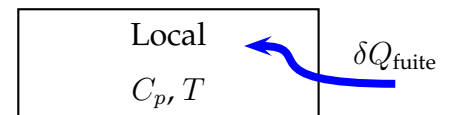
La pression atmosphérique est constante et la température extérieure est T_{ext} K (12°C).

Le local a une capacité thermique C_p indépendante de la température.

Il existe des fuites thermiques. La puissance dissipée dans ces fuites est proportionnelle à l'écart entre la température T de la pièce et la température extérieure : $\mathcal{P}_{fuite} = \frac{\delta Q_{fuite}}{dt} = \frac{T - T_{ext}}{R_{th}}$ où R_{th} est la résistance thermique des parois.

1. Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $T(t)$ quand le chauffage du local n'est pas actif. Donner la solution littérale de cette équation pour une température initiale $T_1 > T_{ext}$. Quelle est, sans chauffage, la valeur limite de la température de la pièce ?
2. Montrer que la température de la pièce tend vers une limite T_{lim} quand le chauffage est en fonctionnement permanent.
3. Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $T(t)$ quand le chauffage du local est actif. Donner la solution littérale de cette équation pour une température initiale $T_0 > T_{ext}$.
4. Représenter graphiquement l'allure des variations de température au cours d'un cycle de chauffage si le radiateur se déclenche dès que $T \leq T_0$ avec $T(t)$ décroissante et s'arrête dès que $T \geq T_1$ avec $T(t)$ croissante.

1. Représentons le système { local } de capacité thermique C_p constante et à la température T . Pendant une durée dt , la présence des fuites thermiques entraîne un transfert thermique δQ_{fuite} négatif si $T > T_{ext}$ et positif si $T < T_{ext}$ (convention thermodynamique).



On en déduit avec les notations de l'énoncé

$$\delta Q_{fuite} = -\mathcal{P}_{fuite} \cdot dt = \frac{T_{ext} - T}{R_{th}} \cdot dt$$

Comme l'opération se déroule à pression constante, on peut écrire

$$dH = C_p dT = \delta Q = \delta Q_{fuite} = \frac{T_{ext} - T}{R_{th}} \cdot dt \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{th} C_p} = \frac{T_{ext}}{R_{th} C_p} \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_{ext}}{\tau}$$

En posant $\tau = R_{th}C_p$ pour se ramener à la forme canonique.

La solution de cette équation est de la forme $sol = sol_H + sol_P \Rightarrow T = A \cdot \exp(-\frac{t}{\tau}) + T_{ext}$ et à l'instant initial, $T = T_1 > T_{ext}$ (condition initiale) d'où $T_1 = A + T_{ext} \Rightarrow T = (T_1 - T_{ext}) \exp(-\frac{t}{\tau}) + T_{ext}$.

Au bout de quelques τ , le régime transitoire sera terminé et T correspondra à la solution particulière de l'équation différentielle : $T = T_{ext}$.

2. Quand le chauffage du local est actif, les radiateurs apportent un transfert thermique

$$\delta Q_{rad} = P_{rad} dt > 0 \text{ pendant la durée } dt.$$

On a donc maintenant

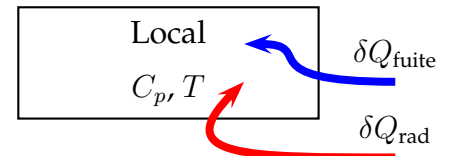
$$dH = C_p dT = \delta Q = \delta Q_{fuite} + \delta Q_{rad} = (P_{rad} - P_{fuite}) \cdot dt$$

d'où

$$C_p \frac{dT}{dt} = (P_{rad} - P_{fuite})$$

et en régime permanent, $T = T_{lim}$ constante

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow P_{rad} = P_{fuite} = \frac{T_{lim} - T_{ext}}{R_{th}} \Rightarrow T_{lim} = T_{ext} + R_{th} P_{rad}$$

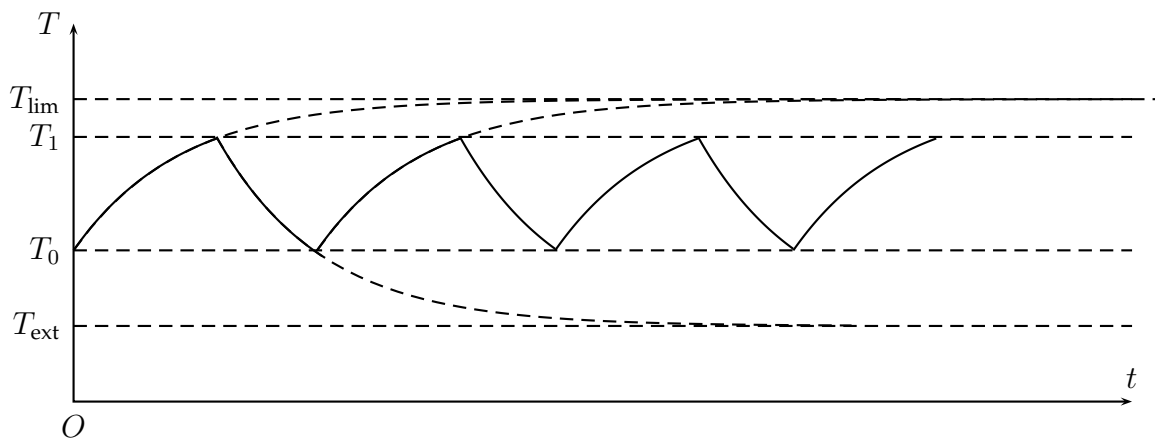


3. Hors régime permanent,

$$C_p \frac{dT}{dt} = (P_{rad} - P_{fuite}) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{P_{rad}}{C_p} - \frac{T - T_{ext}}{R_{th} C_p} \Rightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{P_{rad}}{C_p} + \frac{T_{ext}}{R_{th} C_p} = \frac{T_{lim}}{\tau}$$

La solution de cette équation est de la forme $T = T_{lim} + B \cdot \exp(-\frac{t}{\tau})$ et en utilisant la condition initiale $T = T_0$ à $t = 0$, on en déduit comme dans 1., $T = (T_0 - T_{lim}) \exp(-\frac{t}{\tau}) + T_{lim}$.

4. On va assister à l'équivalent d'une suite de charges et décharges de condensateur (analogie électrique) avec une constante de temps τ .



L'allure de la courbe obtenue est proche de celle du multivibrateur astable.

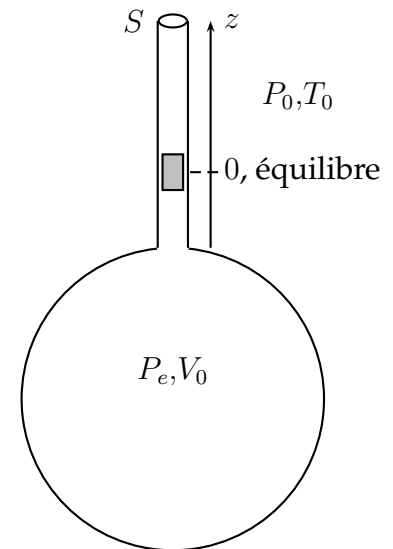
Exercice 6 : Mesure expérimentale de γ .



On considère un récipient fermé par un piston M de masse m , mobile sans frottement dans le col cylindrique vertical de section S .

Le récipient contient n moles d'un gaz parfait dont on cherche à déterminer l'exposant adiabatique γ constant.

À l'extérieur, l'air est à la pression $P_0 = Cte$ et à l'équilibre, le volume intérieur du récipient est V_0 .

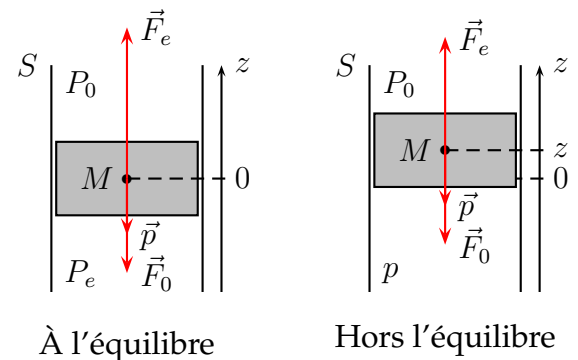


1. Déterminer P_e , la valeur de la pression à l'intérieur du récipient quand le piston est à l'équilibre. On appliquera la première loi de Newton à M lors de l'équilibre.
2. Le piston est déplacé de sa position d'équilibre, on notera $P = P_e + dP$ la pression dans le récipient à un instant quelconque avec $dP \ll P_e$ et toutes les transformations seront considérées comme adiabatiques et réversibles.
 - (a) Exprimer dP en fonction de dV puis de z , la position du piston par rapport à sa position d'équilibre. $V \simeq V_0$.
 - (b) En utilisant le principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton), en déduire l'équation du mouvement du piston et la mettre sous la forme $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$
 - (c) En déduire une méthode pratique de mesure de γ .

1. À l'équilibre, la somme vectorielle des forces appliquées à M est nulle : première loi de Newton. En plus de son poids, $\vec{p} = -mg\vec{e}_z$, il est soumis aux forces de pression $\vec{F}_0 = -P_0S\vec{e}_z$ de la part de l'atmosphère et $\vec{F}_e = +P_eS\vec{e}_z$ de la part du gaz contenu dans le réservoir.

Par projection de la première loi de Newton selon l'axe Oz , on obtient $-mg - P_0S + P_eS = 0$

$$\Rightarrow P_e = P_0 + \frac{mg}{S}$$



2. Hors équilibre,

- (a) Le gaz parfait contenu dans le réservoir subit des transformations adiabatiques, quasi statiques et mécaniquement réversibles. On peut donc utiliser les relations de Laplace :

$$pV^\gamma = Cte \Rightarrow p = Cte.V^{-\gamma} \Rightarrow \frac{dp}{dV} = -\gamma Cte.V^{-\gamma-1} = -\gamma pV^\gamma.V^{-\gamma-1} = -\gamma \frac{p}{V} \Rightarrow dp = -\gamma p \frac{dV}{V}$$

Or, lorsque le piston M se déplace de z , le volume de gaz dans récipient varie de $dV = S.z$

$$\Rightarrow dp = -\gamma p \frac{S.z}{V} \simeq -\frac{\gamma p S}{V_0} z$$

- (b) Hors équilibre, la force de pression appliquée par le gaz contenu dans le récipient est maintenant de la forme $\vec{F} = +pS\vec{e}_z$ avec $p = P_e + dp = P_0 + \frac{mg}{S} + dp$ et par projection du principe fondamental de la dynamique selon l'axe Oz , on a cette fois :

$$m\ddot{z} = -mg - P_0S + pS \Rightarrow m\ddot{z} = -mg - P_0S + (P_e + dp)S = -mg - P_0S + mg + P_0S + Sdp = S.dp$$

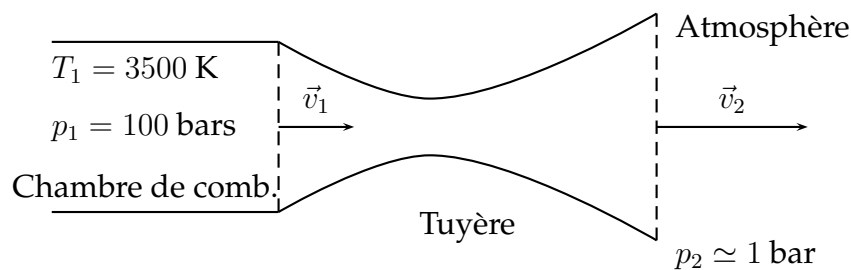
$$\Rightarrow \ddot{z} - \frac{Sdp}{m} = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\gamma p S^2}{mV_0} z = 0$$

Et en prenant $p \simeq P_e$ constante on se ramène à une équation du type $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$: oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{\gamma P_e S^2}{mV_0}}$.

(c) On peut utiliser la méthode suivante pour déterminer le coefficient γ :

- On mesure les caractéristiques du système (V_0, S, m) et la pression atmosphérique P_0 .
- On en déduit p_e la pression à l'équilibre.
- On lâche M sans vitesse initial au niveau du col du récipient.
- M oscille dans le col, on mesure la durée correspondante à 4 ou 5 oscillations, on en déduit la période T_0 puis γ .

Exercice 7 : Détente dans une tuyère



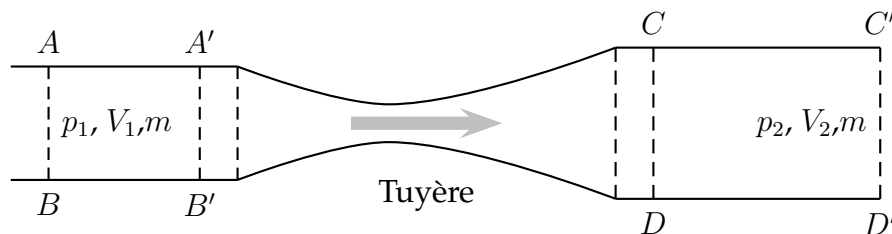
Une tuyère est une tuyauterie de section rigide variable qui conduit des gaz comprimés et chauds à se détendre.

Ces gaz sont issus de la chambre de combustion d'une fusée par exemple.

Si on suppose que le propergol utilisé est composé de O_2 et H_2 , les gaz brûlés sont de la vapeur d'eau (considérée comme gaz parfait) de masse molaire M et d'exposant adiabatique $\gamma = 1,30$.

La détente étant très rapide, on peut la considérer comme adiabatique.

1. Déterminer la relation liant les enthalpies massiques du gaz avant et après la détente h_1 et h_2 aux vitesses v_1 et v_2 .
2. On considère $v_1 \ll v_2$ et la transformation réversible. On note c_p la capacité thermique massique à pression constante du gaz. En déduire l'expression de v_2 en fonction de γ, R, M, T_1, p_1 et p_2 et faire l'application numérique.



On a ici affaire à une détente adiabatique ($Q = 0$) d'un gaz parfait en écoulement rapide.

Cette situation est proche de celle de la détente de Joule – Thomson au cours de laquelle $\Delta H = 0$.

La différence étant que cette fois, on ne peut pas négliger la variation d'énergie mécanique

$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_c$ (la conduite est horizontale).

1. En raisonnant sur une tranche de gaz en écoulement (système fermé) $ABCD$ à t et $A'B'C'D'$ à $t + dt$, le travail de "transvasement" reçu est $W_{trans} = W_{amont} + W_{aval}$ avec
 - en amont, $p = p_1 = Cte$ dans la région $ABA'B'$ où le volume varie de $\Delta V = -V_1$ soit $W_{amont} = -p_1(-V_1) = p_1 V_1 > 0$ (travail effectivement reçu).

- en aval, $p = p_2 = Cte$ dans la région $CDC'D'$ où le volume varie de $\Delta V = V_2$ soit $W_{\text{aval}} = -p_2(V_2) = -p_2V_2 < 0$ (travail effectivement fourni).

Le travail total reçu (travail de transvasement) est donc $W = W_{\text{trans}} = p_1V_1 - p_2V_2$ (le travail "technique" est nul car pas de partie mobile dans la tuyère).

La variation d'énergie interne du système s'écrit quant à elle : $\Delta U = U(t + \Delta t) - U(t) = U_{A'B'C'D'} - U_{ABCD} = U_2 + U_3(t + \Delta t) - (U_1 + U_3(t))$ en notant U_3 l'énergie interne de la portion $BCA'B'$. Mais comme on se place en régime stationnaire, U_3 est indépendant du temps et finalement, $\Delta U = U_2 - U_1$.

De même, la variation d'énergie cinétique est

$$\Delta E_c = E_c(t + \Delta t) - E_c(t) = E_{c2} + E_{c3} - (E_{c1} + E_{c3}) = E_{c2} - E_{c1} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

Par application du premier principe de la thermodynamique sur le système fermé en écoulement,

$$\Delta E = W + Q \Rightarrow \Delta U + \Delta E_c + 0 = W_{\text{trans}} + 0 + 0 \Rightarrow U_2 - U_1 + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = p_1V_1 - p_2V_2$$

$$\Rightarrow U_2 + p_2V_2 - (U_1 + p_1V_1) = -\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow H_2 - H_1 = -\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)$$

en divisant par m la masse de gaz qui traverse la tuyère pendant la durée dt .

2. Si $v_1 \ll v_2$, la relation précédente peut s'écrire $h_2 - h_1 \simeq -\frac{1}{2}v_2^2$ et si le fluide est considéré comme un gaz parfait, $H_2 - H_1 = \Delta H = C_p(T_2 - T_1) = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$ et par unité de masse,

$$h_2 - h_1 = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)}(T_2 - T_1)$$

Par ailleurs, si la transformation est adiabatique et réversible, on a également $pV^\gamma = Cte$ (relation de Laplace) et $pV = nRT$ d'où $p^{1-\gamma}.T^\gamma = Cte$ et ici

$$p_2^{1-\gamma}.T_2^\gamma = p_1^{1-\gamma}.T_1^\gamma \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

On en déduit

$$v_2^2 = -\frac{2R\gamma T_1}{M(\gamma - 1)} \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right] \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2R\gamma T_1}{M(\gamma - 1)} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]} \simeq 3,0 \text{ km.s}^{-1}$$

Remarque : n'oubliez d'exprimer M en kg.mol^{-1} lors de l'application numérique.