I_{10} Calcul numérique de l'intégrale d'une fonction sur un segment.

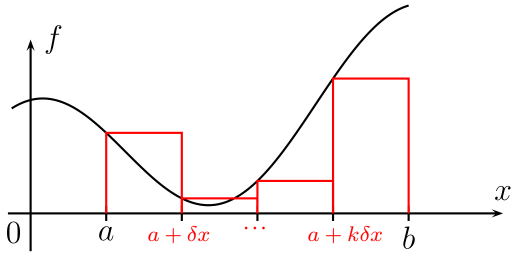
PCSI 2020 – 2021

Introduction : Ce que l'on appelle « intégration » recouvre deux choses : l'intégrale d'une fonction sur un segment et la résolution d'une équation différentielle. Dans les deux cas, cela peut-être compliqué dès que les fonctions mises en jeu ne sont pas élémentaires. La résolution numérique donne un résultat approché et nécessite de refaire le calcul à chaque fois que les paramètres changent. À l'inverse une résolution dite « analytique » donne un résultat exact en fonction des paramètres (c'est ce qu'on vous demande en DS en général !), mais n'est pas toujours possible.

Ici, on va résoudre des problèmes que l'on sait traiter analytiquement pour pouvoir comparer les résultats, mais en général on se sert de l'analyse numérique pour les cas où on ne sait pas résoudre analytiquement.

Position du problème : Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction intégrable sur un segment $[a,b]$. On suppose que l'on sait calculer $f(x)$ en tout point de l'intervalle et on veut calculer $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Comment faire ?

I Approximation par la méthode des rectangles



La manière la plus simple pour approximer une intégrale numériquement est d'utiliser la méthode des rectangles à gauche (ou à droite). La méthode est illustrée sur la figure ci-contre. Chaque rectangle est choisi de façon à ce que sa hauteur corresponde à la valeur de la fonction « à gauche » (ou « à droite »). On approxime la valeur de l'intégrale par l'aire des rectangles.

Si on découpe l'intervalle en n parties, alors :

- La largeur d'un sous-intervalle est $\delta x = \frac{b-a}{n}$
- Le k^{e} rectangle a pour largeur δx et pour hauteur $f(a + k\delta x)$.
- k varie de 0 à $n - 1$

Si on appelle I_n l'approximation avec n rectangles de l'intégrale, alors

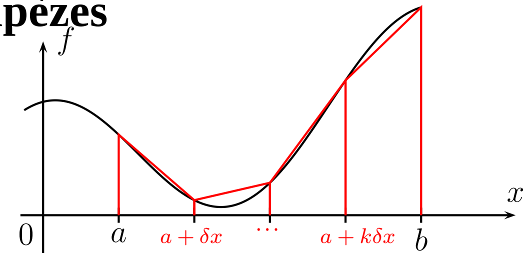
$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \delta x \times f(a + k \times \delta x) = \delta x \times \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \times \delta x)$$

Numériquement, on va donc calculer la somme, puis multiplier le tout par δx. On remplace ainsi n multiplication par une seule pour gagner du temps. L'algorithme est le suivant :

Données : f, a, b, n : une fonction, les bornes de l'intervalle d'intégration et le nombre de pas
Résultat : integrale : Une approximation de l'intégrale de f avec n rectangles

$\delta x \leftarrow (b - a)/n$;
$somme \leftarrow 0$;
pour $k \leftarrow 0$ **à** $n - 1$ **faire**
  $somme \leftarrow somme + f(a + k \times \delta x)$
fin
$integrale \leftarrow \delta x \times somme$

II Approximation par la méthode des trapèzes



L'idée de la méthode des trapèzes est exactement la même que celle des rectangles, mais en prenant un trapèze à la place du rectangle de façon à minimiser l'erreur sur chaque intervalle.
Si on découpe l'intervalle en n parties, alors :

- La largeur d'un sous-intervalle est toujours $\delta x = \frac{b-a}{n}$
- Le k^{e} trapèze a pour hauteur δx, pour une des bases $f_k = f(a+k\delta x)$ et pour l'autre base $f_{k+1} = f(a+(k+1)\delta x)$
- k varie de 0 à $n-1$

Si on appelle J_n l'approximation avec n trapèzes de l'intégrale, alors

$$J_n = \sum_{k=0}^{n-1} \delta x \times \frac{f(a+k\times\delta x)+f(a+(k+1)\times\delta x)}{2} = \delta x \times \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f_k+f_{k+1}}{2}$$

On remarque que chaque f_k est sommé deux fois (une fois en tant que f_k, une fois en tant que f_{k+1}), sauf les bords. C'est-à-dire

$$J_n = \delta x \times \left(\frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f_k + \frac{f_n}{2}\right)$$

En effet :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f_k+f_{k+1}}{2} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f_k}{2} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f_{k+1}}{2} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f_k}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{f_k}{2} \tag{1}$$

$$= \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f_k}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f_k}{2} + \frac{f_n}{2} = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f_k + \frac{f_n}{2} \tag{2}$$

L'algorithme sera donc le suivant :

Données : f, a, b, n : une fonction, les bornes de l'intervalle d'intégration et le nombre de pas
Résultat : integrale : Une approximation de l'intégrale de f avec n trapèzes

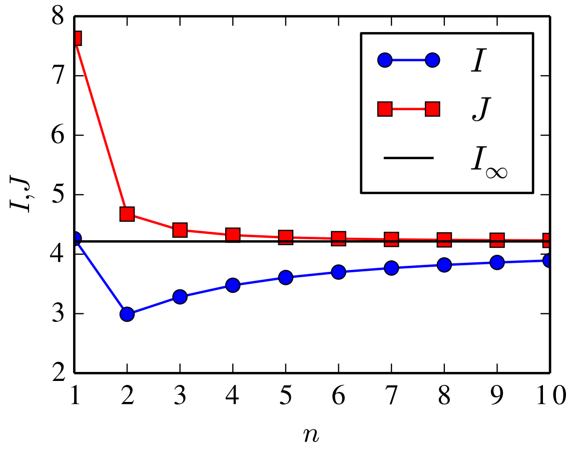
```
δx ← (b − a)/n ;
somme ← (f(a) + f(b))/2 ;
pour k ← 1 à n − 1 faire
    somme ← somme + f(a + k × δx)
fin
integrale ← δx × somme
```

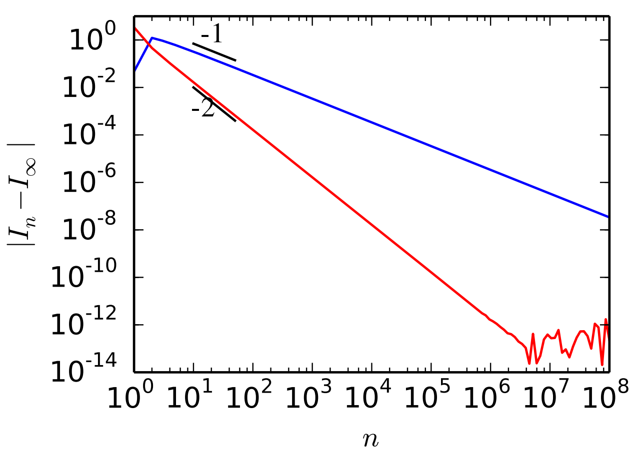
III Comparaison des deux méthodes

Graphiquement, on s'attend à ce que la méthode des trapèzes soit plus précise . Par exemple pour la fonction $f : x \mapsto \cos(1{,}25x) + 0{,}25x + 0{,}5$, on compare l'intégrale de 1 à 5 donnée par les deux méthodes avec la valeur théorique (notée I_∞ ici).

La courbe bleu représente le résultat du calcul en utilisant la méthode des rectangles et la rouge celle des trapèzes.

Si l'on appelle $\varepsilon_n = |I_n - I_\infty|$ l'erreur commise entre l'intégrale calculée avec n termes et la valeur obtenue par une résolution analytique, on remarque sur le graphique de droite (en échelle logarithmique) que l'on a à peu près





- $\log(\varepsilon_n) = -1 \times \log n + K$ pour la méthode des rectangles, c'est-à-dire $\varepsilon_n = A \times n^{-1}$;
- et $\log(\varepsilon_n) = -2 \times \log n + K'$ pour la méthode des trapèzes, c'est-à-dire $\varepsilon_n = A' \times n^{-2}$

Ainsi, lorsque l'on augmente le nombre de pas, la précision de la méthode des trapèzes augmente beaucoup plus vite que celle des rectangles. Par exemple, pour avoir une précision à 10^{-4} près, la méthode des trapèzes nécessite environ $n = 100$ et la méthode des rectangles $n = 10000$!

Remarque : à partir de $n = 3.10^6$ environ, la précision de la méthode des trapèzes ne s'améliore plus, pourquoi ? On atteint la limite de la précision numérique, ensuite les erreurs d'arrondis nous limitent.

IV Utilisation d'une bibliothèque

Pour calculer des intégrales, on peut utiliser la fonction `quad` de scipy.integrate.
La fonction prend en argument : une fonction, la borne de départ et la borne d'arrivée
et renvoie un tuple constitué de la valeur approchée et d'une estimation de l'erreur commise

```
x2 = lambda x: x**2 # et après avoir fait from scipy import integrate
r = integrate.quad(x2, 0, 4) # renvoie (21.333333333333332,
    2.3684757858670003e-13)
```

V Exercice

En exercice de physique vous verrez que dans le calcul de la période du pendule simple aux grandes amplitudes apparait une intégrale que nous ne savons pas calculer analytiquement :

$$\int_{-\theta_{max}}^{+\theta_{max}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{max}}}$$

Essayer de calculer cette intégrale pour $\theta_{max} = \frac{3\pi}{2}$

1. par la méthode des rectangles ;
2. par la méthode des trapèzes.
3. Que pensez vous des résultats précédents ? pourquoi ?
4. Essayer de deviner ce qu'est la méthode du rectangle au point « milieu » et expliquer pourquoi elle est plus adaptée ici.
5. La programmer.

Table des matières