I_{06} Recherche dichotomique du zéro d'une fonction.

PCSI

Lycée Poincaré - Nancy

Position du problème

Position du problème

On cherche le zéro d'une fonction sur un intervalle $]a,b[$,

Position du problème

On cherche le zéro d'une fonction sur un intervalle $]a,b[$, c'est-à-dire on cherche x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

Position du problème

On cherche le zéro d'une fonction sur un intervalle $]a,b[$, c'est-à-dire on cherche x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
On va faire des hypothèses :

- on sait calculer f en tout point ;

Position du problème

On cherche le zéro d'une fonction sur un intervalle $]a,b[$, c'est-à-dire on cherche x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
On va faire des hypothèses :

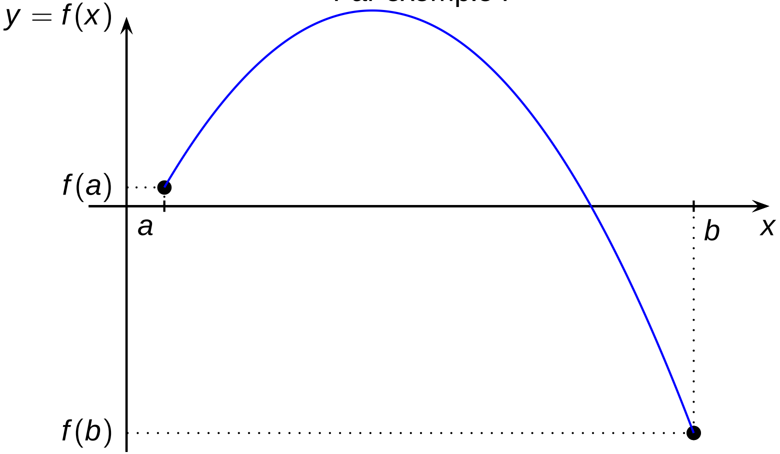
- on sait calculer f en tout point ;
- la fonction f est continue ;

Position du problème

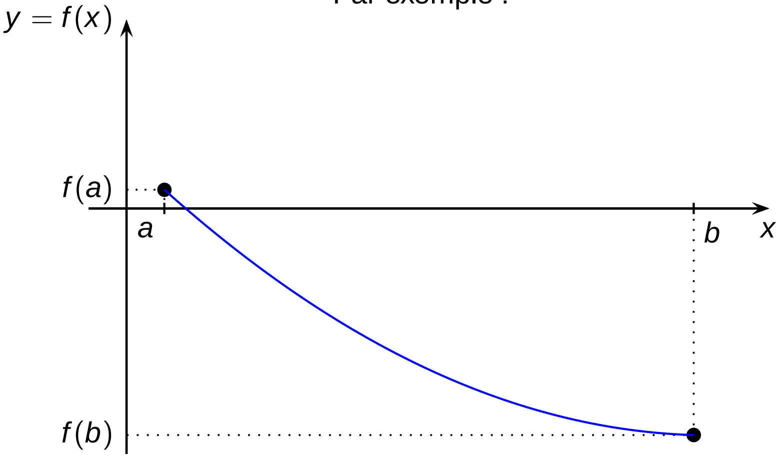
On cherche le zéro d'une fonction sur un intervalle $]a,b[$, c'est-à-dire on cherche x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
On va faire des hypothèses :

- on sait calculer f en tout point ;
- la fonction f est continue ;
- $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents,

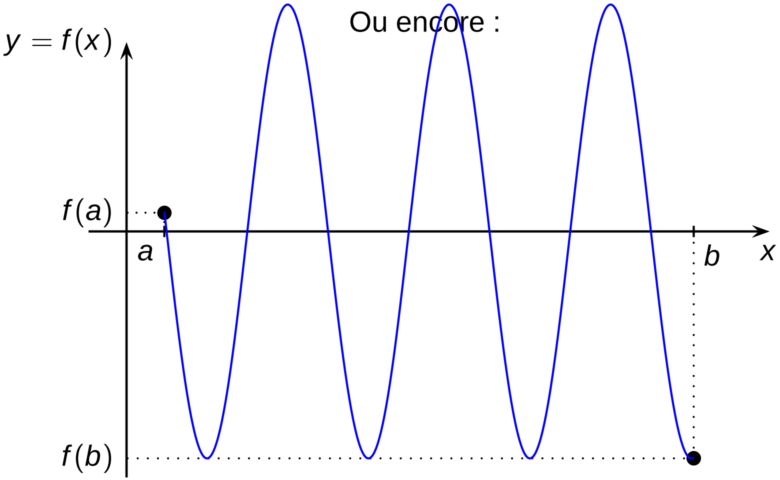
Par exemple :



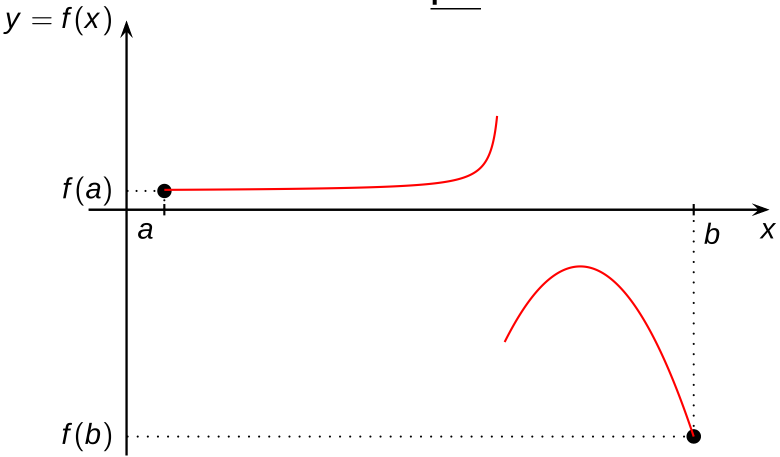
Par exemple :



Ou encore :



Mais **pas** :



Position du problème

On cherche le zéro d'une fonction sur un intervalle $]a,b[$, c'est-à-dire on cherche x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
On va faire des hypothèses :

- on sait calculer f en tout point ;
- la fonction f est continue ;
- $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents,

Position du problème

On cherche le zéro d'une fonction sur un intervalle $]a,b[$, c'est-à-dire on cherche x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
On va faire des hypothèses :

- on sait calculer f en tout point ;
- la fonction f est continue ;
- $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on est surs qu'il existe un zéro dans $]a,b[$.

Position du problème

On cherche le zéro d'une fonction sur un intervalle $]a,b[$, c'est-à-dire on cherche x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
On va faire des hypothèses :

- on sait calculer f en tout point ;
- la fonction f est continue ;
- $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on est surs qu'il existe un zéro dans $]a,b[$.

Notre objectif : trouver x_0, et dans l'idéal le plus vite possible.

Mauvaises méthodes :

- Je prends des x au hasard dans]a,b[, et je m'arrête dès que je trouve $f(x) = 0$ (long, pas sur de trouver la solution compte tenu de la représentation des nombres).

Mauvaises méthodes :

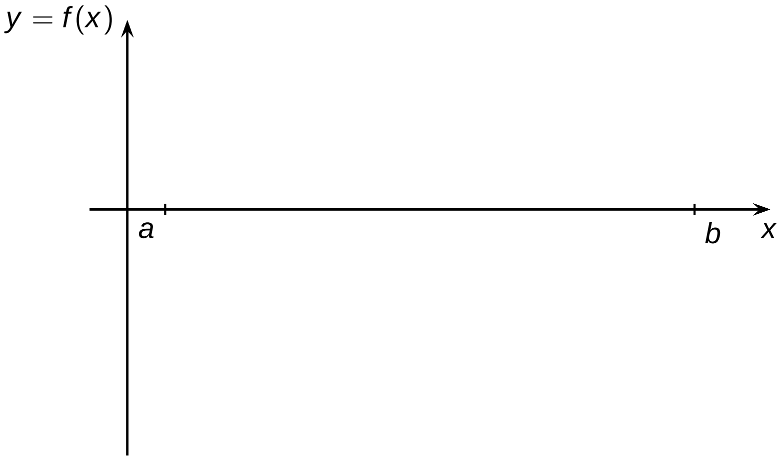
- Je prends des x au hasard dans]a,b[, et je m'arrête dès que je trouve $f(x) = 0$ (long, pas sur de trouver la solution compte tenu de la représentation des nombres).
- Je prends tous les x que mon ordinateur sait représenter entre a et b, j'en fait la liste et je cherche ensuite celui pour lequel $f(x)$ est minimum en valeur absolue.

Mauvaises méthodes :

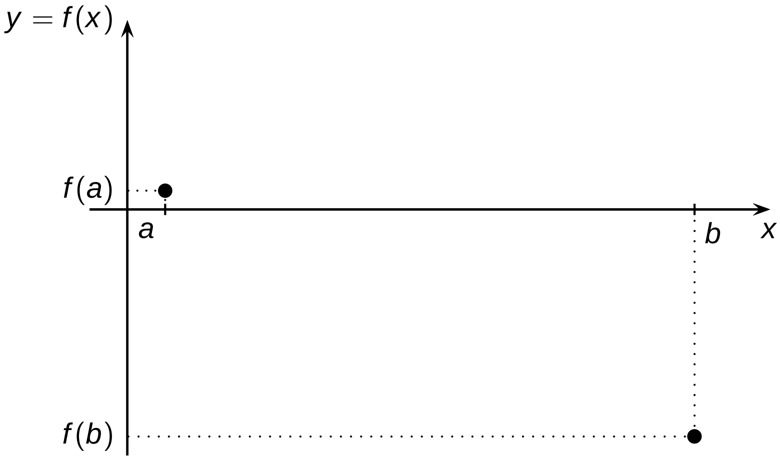
- Je prends des x au hasard dans]a,b[, et je m'arrête dès que je trouve $f(x) = 0$ (long, pas sur de trouver la solution compte tenu de la représentation des nombres).
- Je prends tous les x que mon ordinateur sait représenter entre a et b, j'en fait la liste et je cherche ensuite celui pour lequel $f(x)$ est minimum en valeur absolue. (looooooooooong)

Principe de la méthode

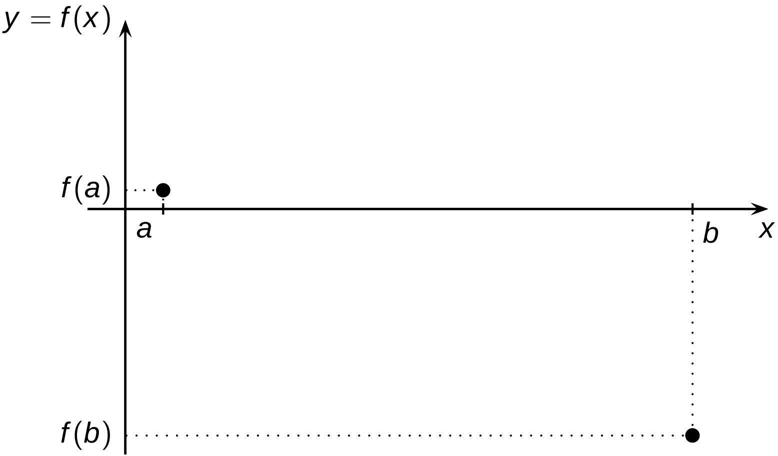
Principe de la méthode



Principe de la méthode

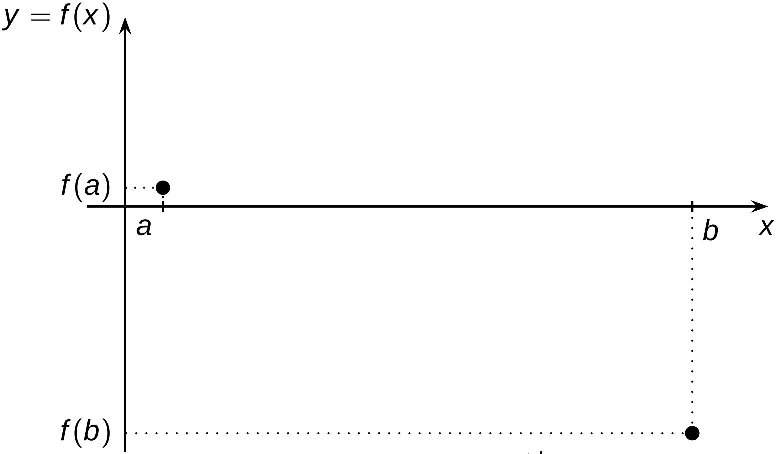


Principe de la méthode



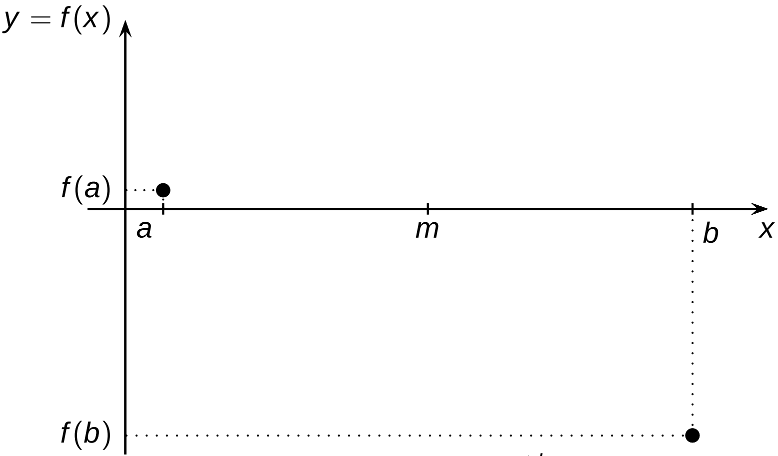
$f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés : on est surs qu'il existe un zéro dans $]a,b[$.

Principe de la méthode



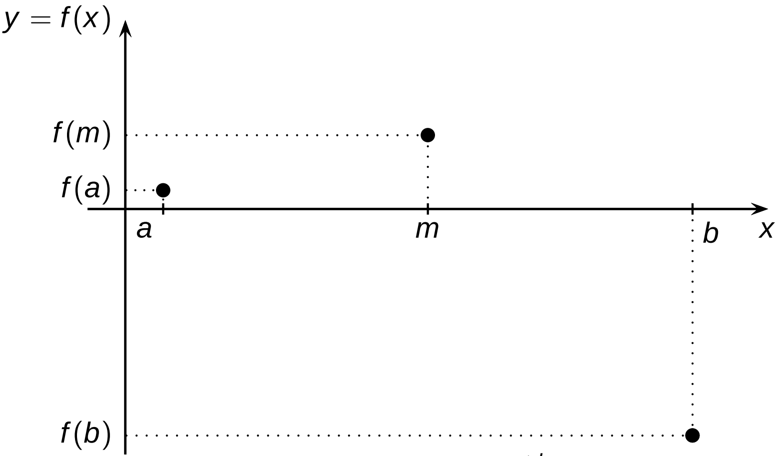
On regarde au milieu, au point $m = \frac{a+b}{2}$ pour voir le signe de $f(m)$.

Principe de la méthode



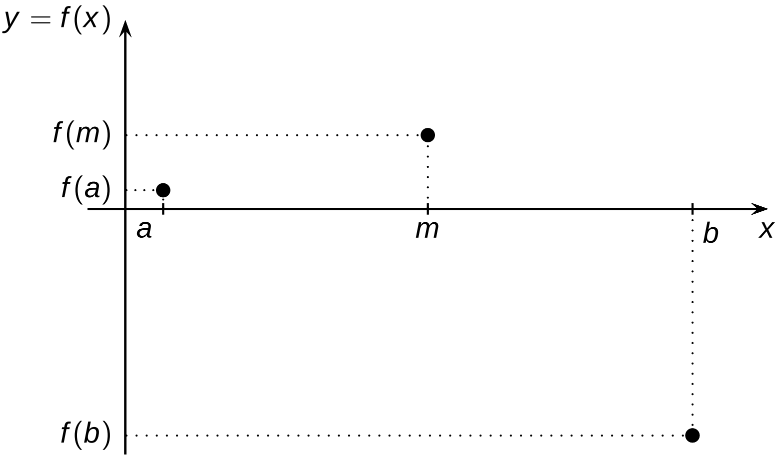
On regarde au milieu, au point $m = \frac{a+b}{2}$ pour voir le signe de $f(m)$.

Principe de la méthode



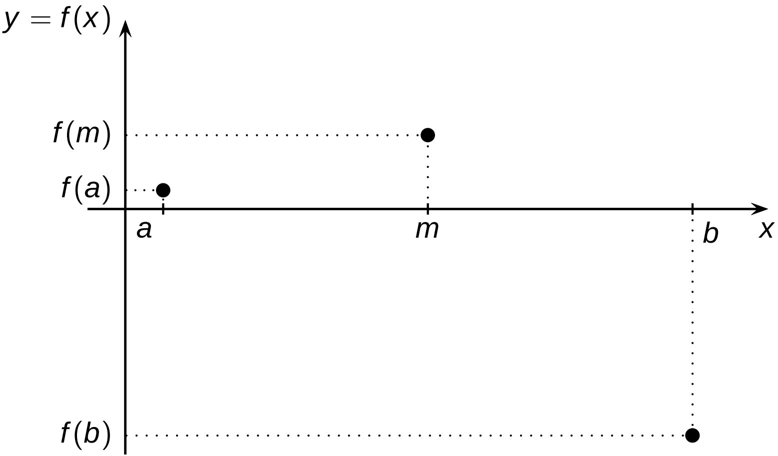
On regarde au milieu, au point $m = \frac{a+b}{2}$ pour voir le signe de $f(m)$.

Principe de la méthode



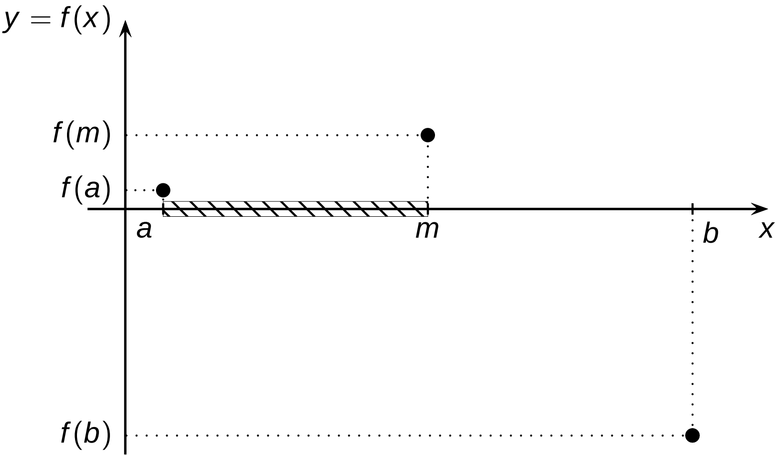
Ici, $f(m)$ et $f(a)$ sont de même signe, on n'est pas surs qu'il y ait un zéro entre a et m

Principe de la méthode



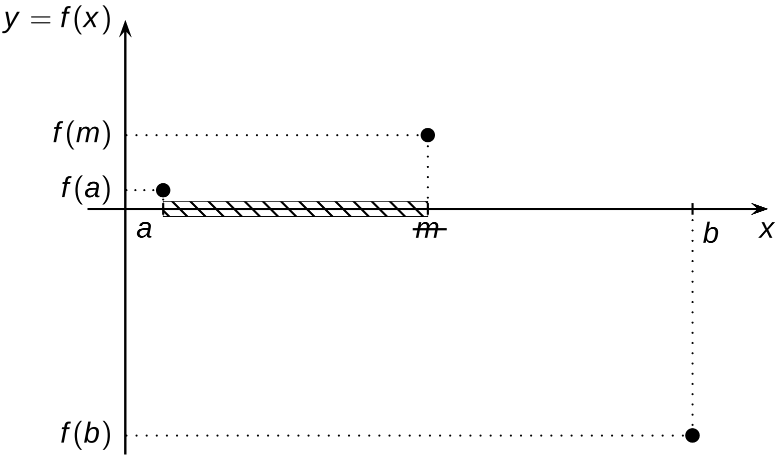
par contre, on est surs qu'il y a en a un entre m et b.

Principe de la méthode



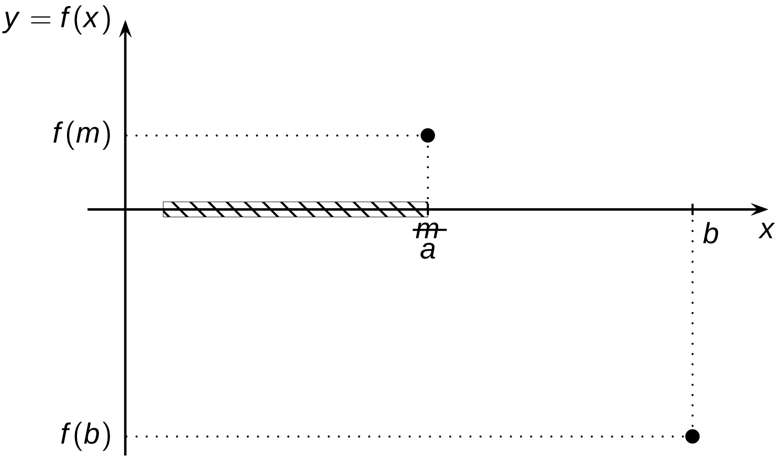
par contre, on est surs qu'il y a en a un entre m et b.

Principe de la méthode



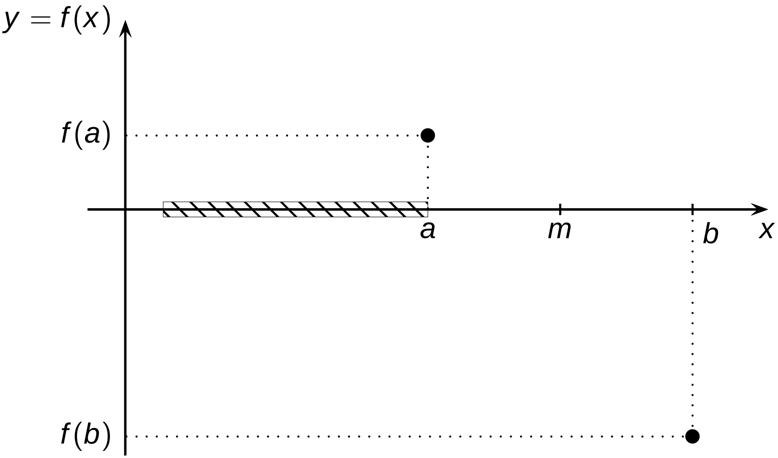
On s'est ramenés au problème du début : il suffit de recommencer

Principe de la méthode

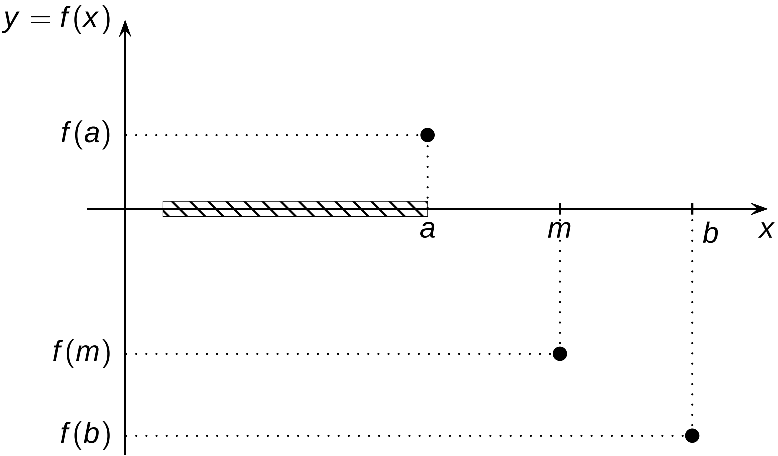


On doit donc refaire pareil en mettant a en m

Principe de la méthode

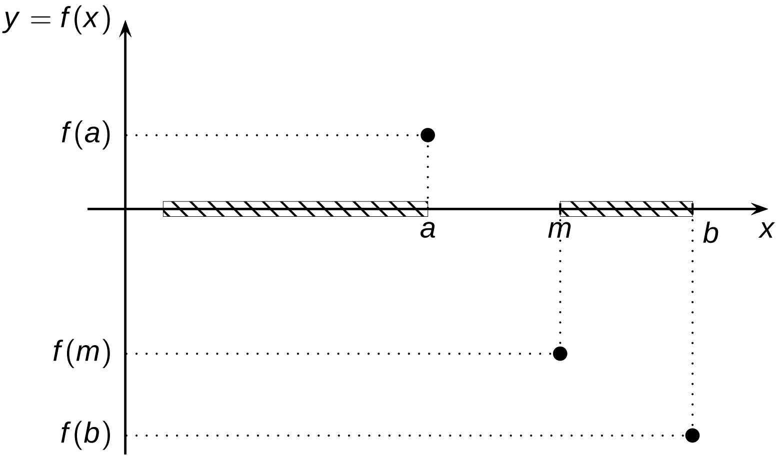


Principe de la méthode



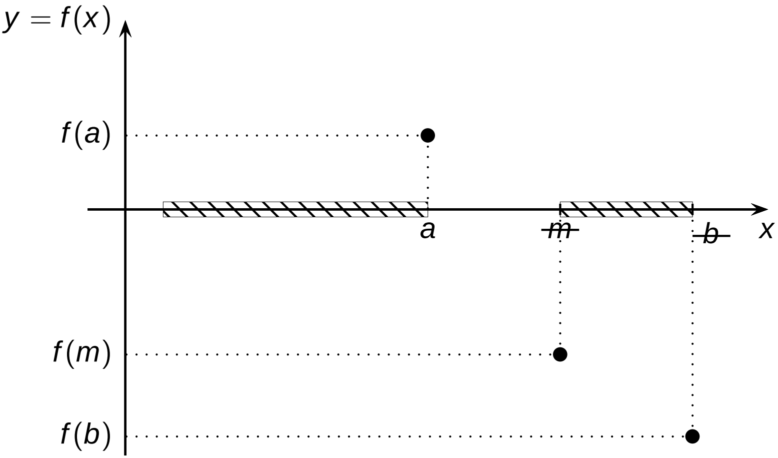
$f(m)$ est d'un autre signe que $f(a)$, il y a avec certitude un zéro entre les deux.

Principe de la méthode

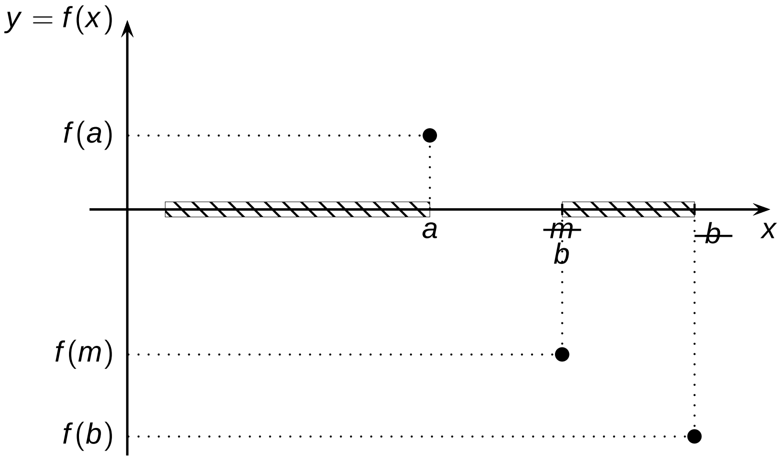


$f(m)$ est d'un autre signe que $f(a)$, il y a avec certitude un zéro entre les deux.

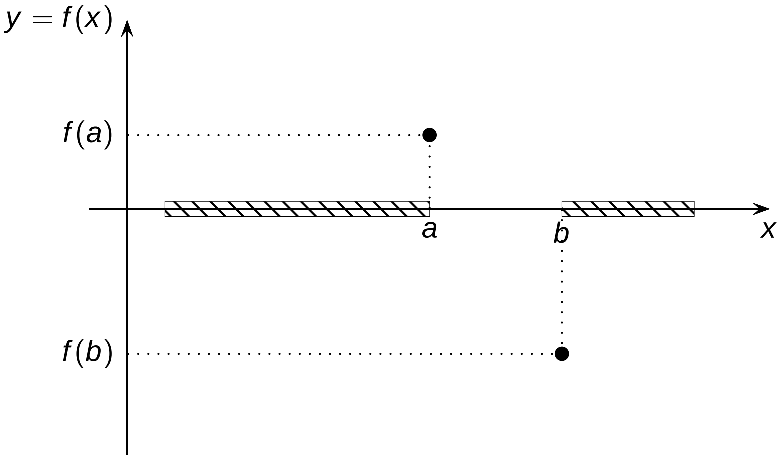
Principe de la méthode



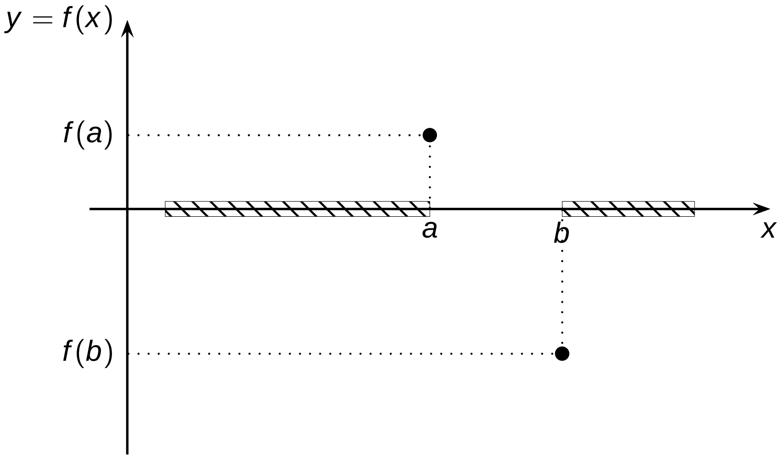
Principe de la méthode



Principe de la méthode

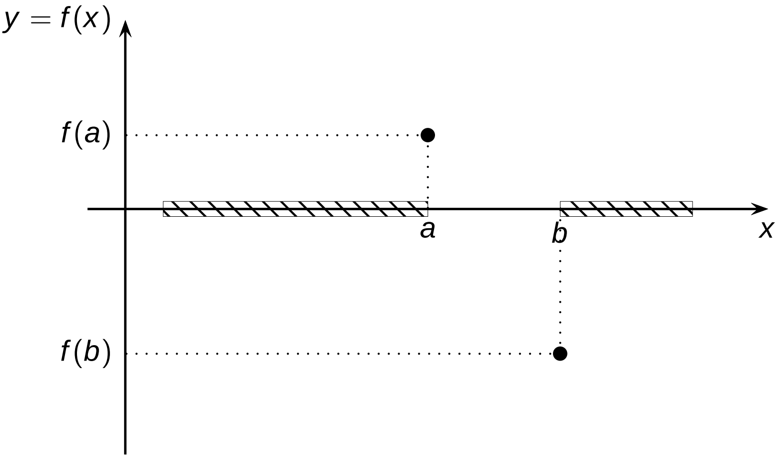


Principe de la méthode



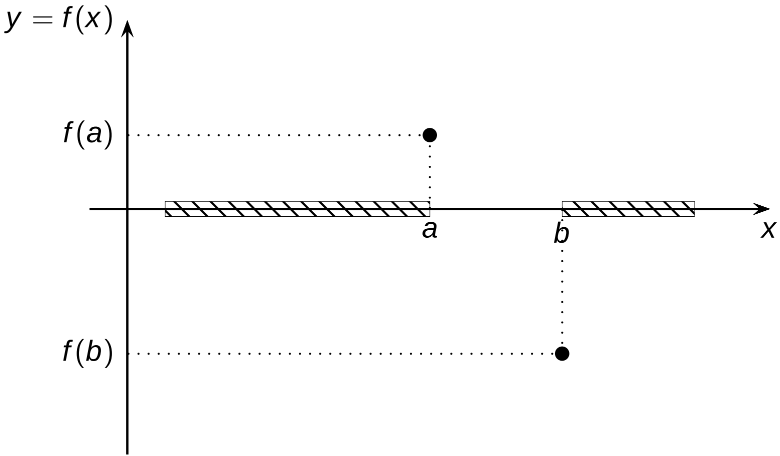
On s'est ramenés au problème du début encore une fois.

Principe de la méthode



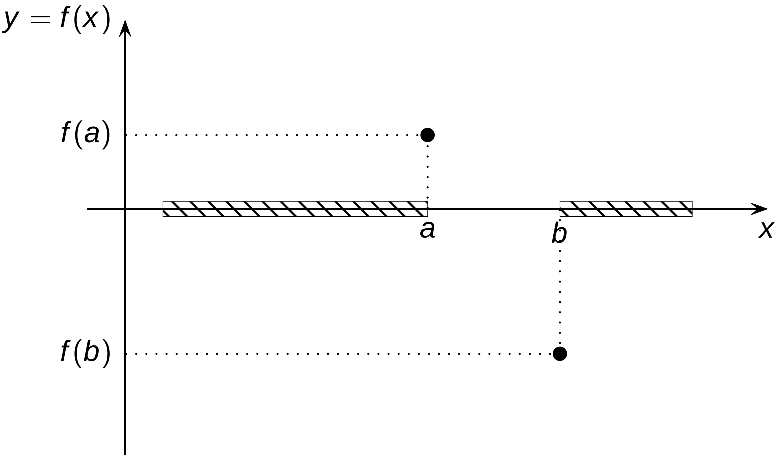
L'intervalle $]a,b[$ étant plus petit, on a amélioré la précision.

Principe de la méthode



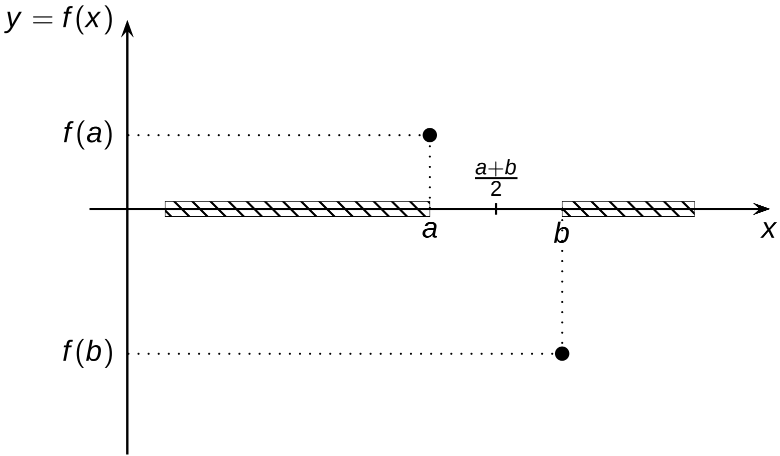
Le zéro est à nouveau dans $]a,b[$

Principe de la méthode



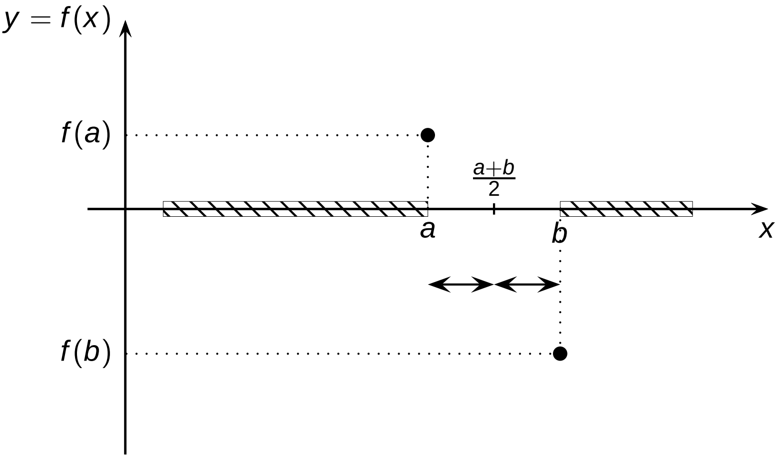
La valeur approchée que l'on peut donner est . . .

Principe de la méthode



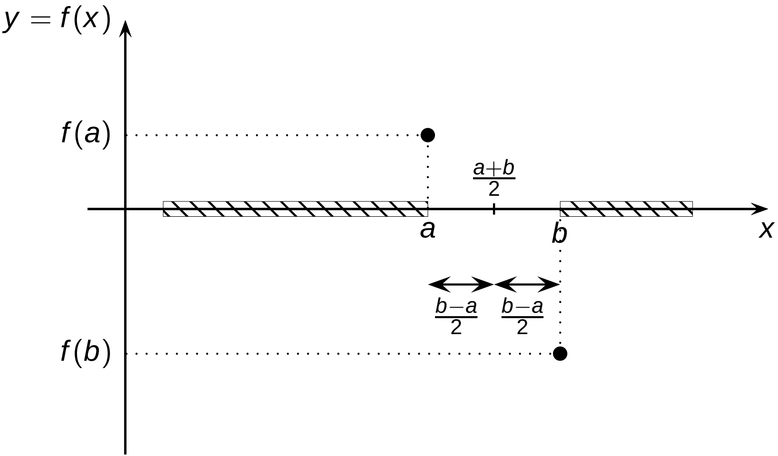
La valeur approchée que l'on peut donner est $x_0 \simeq \frac{a+b}{2}$

Principe de la méthode

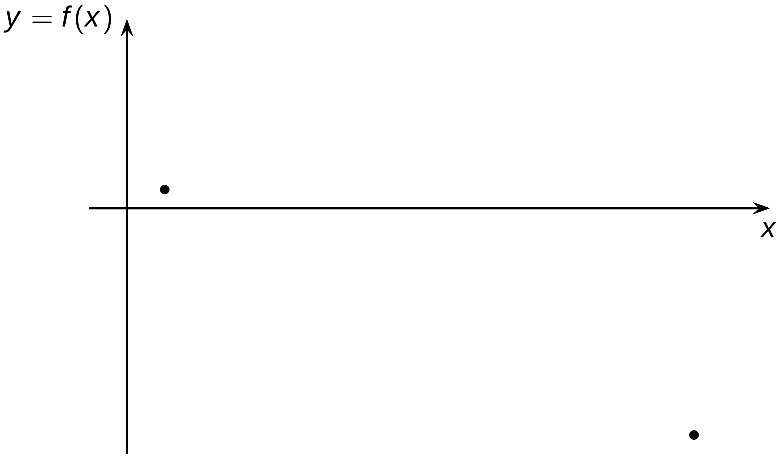


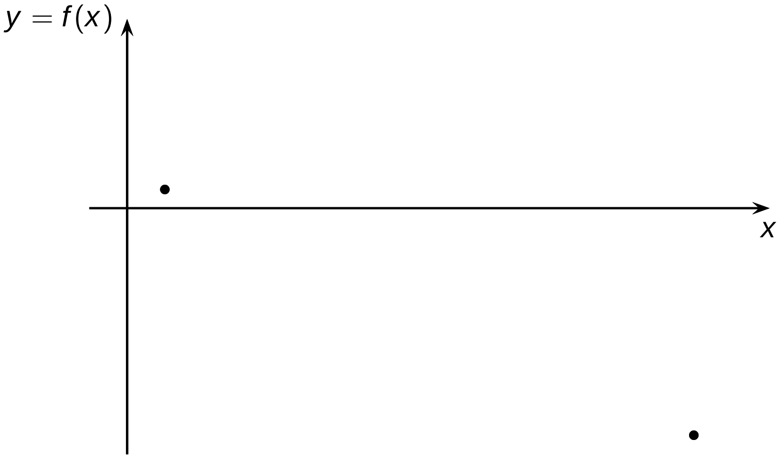
Et l'erreur maximale (la précision) est

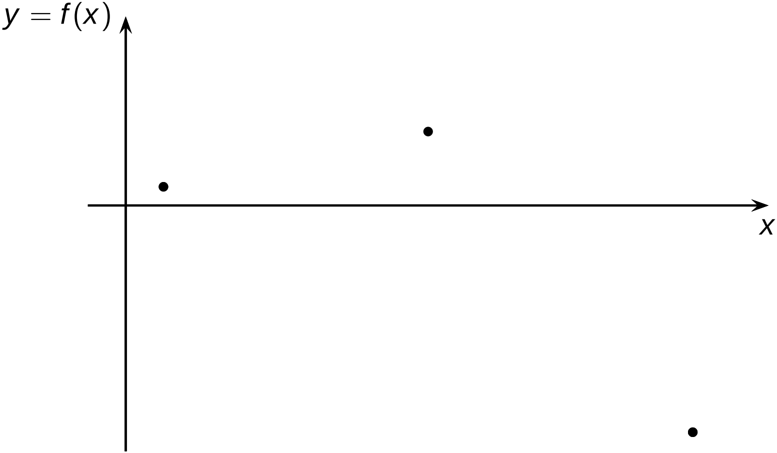
Principe de la méthode



Et l'erreur maximale (la précision) est $\frac{b-a}{2}$

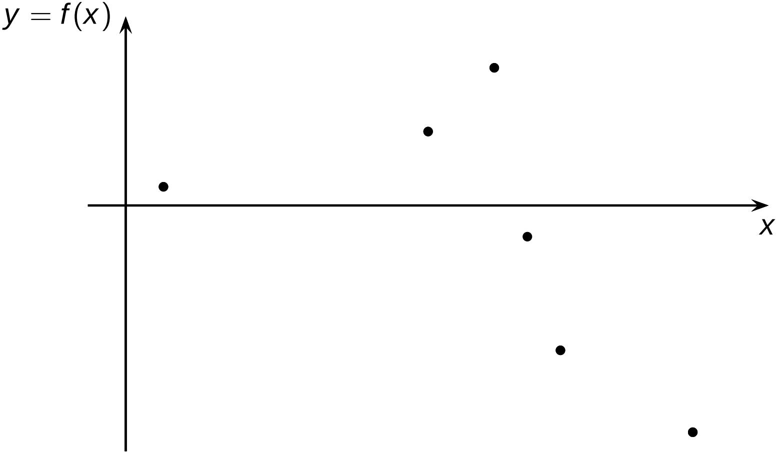

$y = f(x)$
x

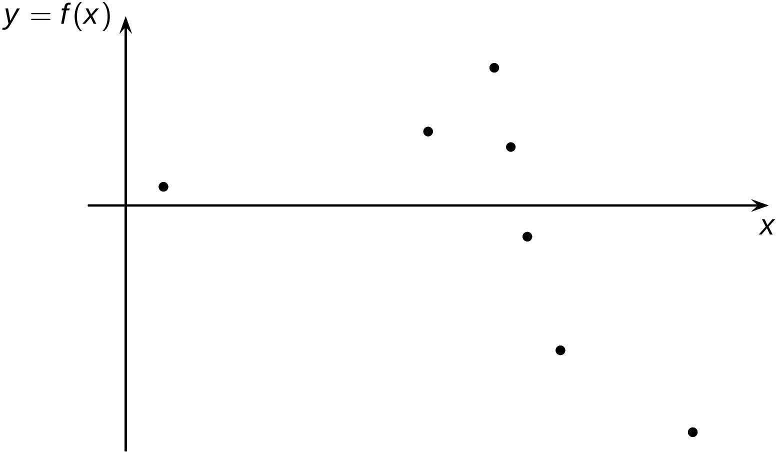

$y = f(x)$
x

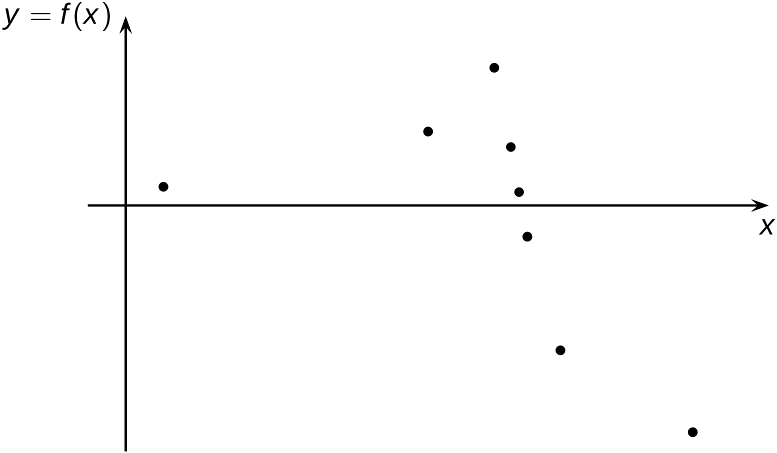

$y = f(x)$
x

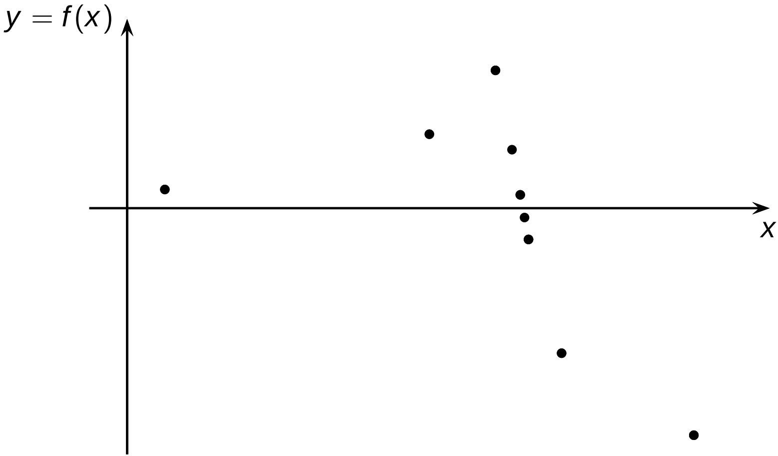

$y = f(x)$
x

$y = f(x)$
x

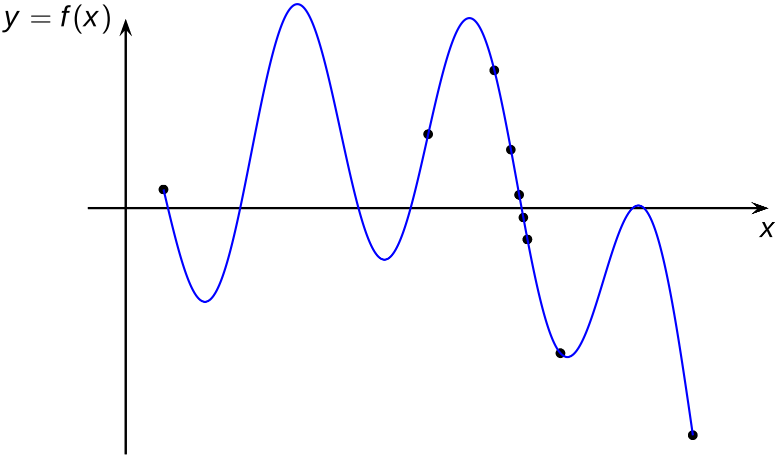

$y = f(x)$
x


$y = f(x)$
x


$y = f(x)$
x



$y = f(x)$
x



$y = f(x)$
x

Algorithme

Algorithme

Avant d’écrire un programme python,

Algorithme

Avant d’écrire un programme python, c’est une bonne idée d’écrire un algorithme avec des mots.

Algorithme

Avant d’écrire un programme python, c’est une bonne idée d’écrire un algorithme avec des mots.

...

Algorithme

Avant d'écrire un programme python, c'est une bonne idée d'écrire un algorithme avec des mots.

. . . À vous de jouer.

- entrée de l'algorithme : a, b, f, ϵ ;

- entrée de l’algorithme : a, b, f, ϵ ;
- on suppose que l’utilisateur est intelligent et que on a bien $f(b)$ et $f(a)$ de signes différents (en pratique il faudrait le vérifier) ;

- entrée de l'algorithme : a, b, f, ϵ ;
- on suppose que l'utilisateur est intelligent et que on a bien $f(b)$ et $f(a)$ de signes différents (en pratique il faudrait le vérifier) ;
- tant que l'on a pas atteint la précision souhaité faire :

- entrée de l'algorithme : a, b, f, ϵ ;
- on suppose que l'utilisateur est intelligent et que on a bien $f(b)$ et $f(a)$ de signes différents (en pratique il faudrait le vérifier) ;
- tant que l'on a pas atteint la précision souhaité faire :
  - m est le milieu de $[a,b]$, puis

- entrée de l'algorithme : a, b, f, ϵ ;
- on suppose que l'utilisateur est intelligent et que on a bien $f(b)$ et $f(a)$ de signes différents (en pratique il faudrait le vérifier) ;
- tant que l'on a pas atteint la précision souhaité faire :
  - m est le milieu de $[a,b]$, puis
    - si $f(m)$ est de même signe que $f(a)$, alors il y a un zéro est entre m et b, donc je prends $a \leftarrow m$ et je recommence ;

- entrée de l'algorithme : a, b, f, ϵ ;
- on suppose que l'utilisateur est intelligent et que on a bien $f(b)$ et $f(a)$ de signes différents (en pratique il faudrait le vérifier) ;
- tant que l'on a pas atteint la précision souhaité faire :
  - m est le milieu de $[a,b]$, puis
    - si $f(m)$ est de même signe que $f(a)$, alors il y a un zéro est entre m et b, donc je prends $a \leftarrow m$ et je recommence ;
    - sinon c'est qu'il y a un zéro est entre a et m et donc je prends $b \leftarrow m$ et je recommence ;

- entrée de l'algorithme : a, b, f, ϵ ;
- on suppose que l'utilisateur est intelligent et que on a bien $f(b)$ et $f(a)$ de signes différents (en pratique il faudrait le vérifier) ;
- tant que l'on a pas atteint la précision souhaité faire :
    - m est le milieu de $[a,b]$, puis
        - si $f(m)$ est de même signe que $f(a)$, alors il y a un zéro est entre m et b, donc je prends $a \leftarrow m$ et je recommence ;
        - sinon c'est qu'il y a un zéro est entre a et m et donc je prends $b \leftarrow m$ et je recommence ;
        - (il faut gérer le cas improbable mais possible où $f(m) = 0$) ;

- entrée de l'algorithme : a, b, f, ϵ ;
- on suppose que l'utilisateur est intelligent et que on a bien $f(b)$ et $f(a)$ de signes différents (en pratique il faudrait le vérifier) ;
- tant que l'on a pas atteint la précision souhaité faire :
    - m est le milieu de $[a,b]$, puis
        - si $f(m)$ est de même signe que $f(a)$, alors il y a un zéro est entre m et b, donc je prends $a \leftarrow m$ et je recommence ;
        - sinon c'est qu'il y a un zéro est entre a et m et donc je prends $b \leftarrow m$ et je recommence ;
        - (il faut gérer le cas improbable mais possible où $f(m) = 0$) ;
- J'ai atteint la précision souhaitée : je renvoie l'estimation de x_0 : $(\frac{a+b}{2})$.

Code python

Code python

. . .

Code python

. . . À vous de jouer.

```python
def dicho(f,a,b,epsilon = 1e-8):
    while b-a > 2 * epsilon:
        m = (a + b)/ 2
        if f(m)==0:# coup de chance, peu probable
            return m
        elif f(a)*f(m) < 0: # il y a un zéro entre a et m
            b = m #je recommence entre a et m : b <- m
        else:# il y a un zéro entre m et b
            a = m #je recommence entre m et b : a <- m
    #fin du while, précision souhaitée atteinte
    return (a+b)/2
```

sans les commentaires

```python
def dicho(f,a,b,epsilon = 1e-8):
    while b-a > 2 * epsilon:
        m = (a + b)/ 2
        if f(m)==0:
            return m
        elif f(a)*f(m) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return (a+b)/2
```