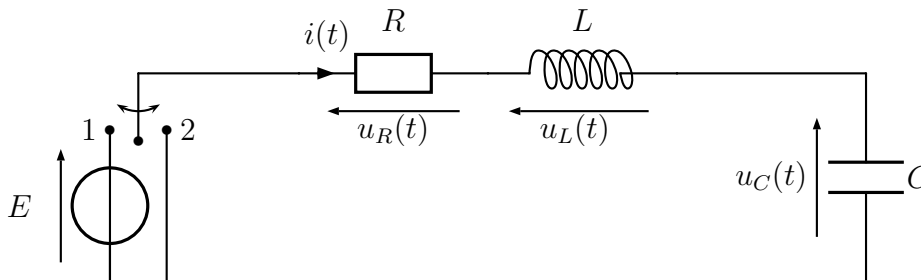


# EC<sub>4</sub> Circuits linéaires du second ordre en régime transitoire

PCSI 2023 – 2024

## I Réponse d'un circuit RLC série à un échelon de tension

### 1. Circuit



L'interrupteur est initialement en position 2 depuis longtemps, le condensateur est déchargé et l'intensité est nulle. À  $t = 0$ , il est basculé en position 1.

### 2. Équation différentielle en $u_C(t)$

On applique la loi des mailles :  $E - u_R - u_L - u_C = 0$  avec  $u_R = Ri$ ,  $u_L = L \frac{di}{dt}$  et  $i = C \frac{du_C}{dt}$  soit  $u_L = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$  d'où

$$RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = E \iff \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E}{LC}$$

Équation différentielle du deuxième ordre linéaire à coefficients constants (qui doivent être tous du même signe pour que le système soit stable) et avec second membre. Le circuit est donc d'ordre deux.

### 3. Retour sur la mécanique

Cette équation ressemble fortement à celle que nous avons vue en mécanique pour l'oscillateur harmonique. Si on reprend le bilan de force pour l'oscillateur harmonique et que l'on rajoute une force de frottement visqueux ( $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ ), alors l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\vec{a} = \Sigma \vec{F} \Rightarrow m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} - k(x - l_0) \Leftrightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = kl_0$$

### 4. Mise sous forme canonique

On retrouve donc une équation analogue en mécanique. On trouve le même type d'équation dans d'autres domaines de la physique et, pour faire des analogies entre ces différentes disciplines, on la met sous forme canonique :

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = \text{quelque chose}$$



avec ici, pour un *RLC* série :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt}(t) + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$\omega_0$  est la **pulsation propre** du circuit (en radian par seconde ;  $\text{rad.s}^{-1}$ ) et  $Q$  le **facteur de qualité, nombre sans dimension**.

ou encore  $\ddot{u}_C + \frac{2}{\tau} \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E$  avec  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$  le temps de relaxation du circuit.

Dans le cas mécanique, on avait :  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$        $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$

## 5. Résolution de l'équation différentielle : charge du condensateur

**Méthode de résolution** Pour la résolution d'une telle équation différentielle :

1. On trouve une solution particulière *sol<sub>P</sub>*
2. On résout l'équation homogène associée (c'est à dire avec le second membre = 0)  $\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C(t) = 0$
3. La solution générale est la somme de la solution particulière et de la solution de l'équation homogène :  $sol = sol_P + sol_H$
4. On trouve les constantes d'intégration à l'aide des relations de continuité.

**Remarques qualitatives** Même sans résoudre l'équation, plusieurs choses sont à savoir :

1. La solution est stable si **les coefficients sont de même signe**.
2. Le comportement qualitatif va dépendre de la valeur de  $Q$ 
  - (a)  $Q < \frac{1}{2}$  : Régime **apériodique**
  - (b)  $Q > \frac{1}{2}$  : Régime **pseudo-périodique**
  - (c)  $Q = \frac{1}{2}$  : Régime **critique**

**Régime apériodique** :  $Q < \frac{1}{2}$  C'est à dire pour  $\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{1}{2} \iff R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_C$  la résistance critique du circuit.

On pose (justification en cours de maths) :

$$z_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - \sqrt{\Delta}}{2} = -\omega_0 \left( \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right) < 0 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2} = -\omega_0 \left( \frac{1}{2Q} - \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right) < 0$$

On pose aussi :  $\tau_1 = -\frac{1}{z_1}$  et  $\tau_2 = -\frac{1}{z_2}$ , la solution *sol<sub>H</sub>* est de la forme

$$Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

On voit que  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont homogènes à des durées.

Pour avoir la solution complète, on a besoin d'une solution particulière. On la cherche sous la forme d'une **constante**. Si on pose  $sol_P = K$  alors

$$0 + 0 + \omega_0^2 K = \omega_0^2 E \Rightarrow K = E$$



D'où la solution complète :

$$u_C(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

Détermination des constantes : il y a deux constantes à déterminer car l'équation différentielle est du second ordre.

Continuité de la **tension** aux bornes du condensateur  $u_C(t)$  : à  $t = 0$ ,

$$u_C(t) = 0 = E + A + B$$

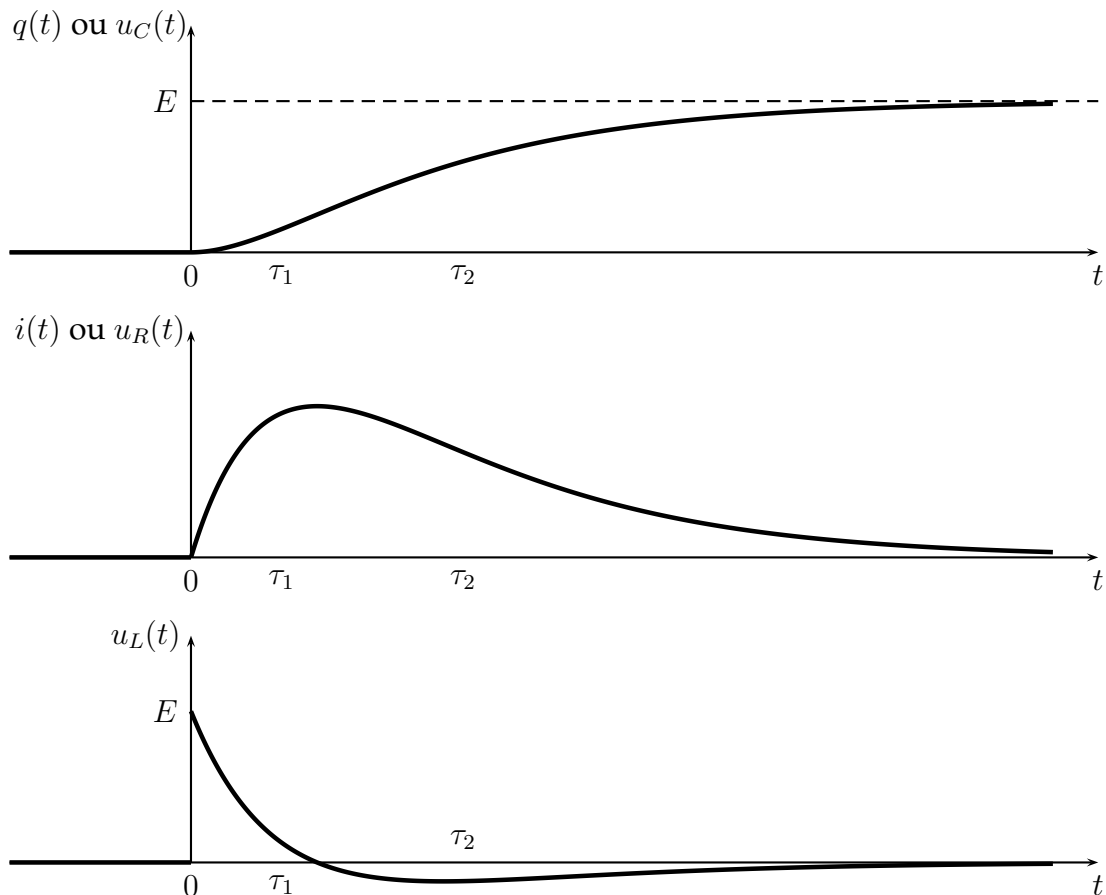
Continuité de l'intensité du courant dans la bobine :  $i = C \frac{du_C(t)}{dt} = -C \left( \frac{A}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{B}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$  et à  $t = 0^+$ ,

$$i = 0 = C \left( \frac{A}{\tau_1} + \frac{B}{\tau_2} \right) \Rightarrow A = -\frac{\tau_1 B}{\tau_2} \Rightarrow A = E \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \quad \text{et} \quad B = -E \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$$

et finalement :



$$u_C(t) = E \left[ 1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] ; \quad i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{u_R(t)}{R} \quad \text{et} \quad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



Continuité de  $u_C(t)$  (donc de  $q(t)$ ) et de  $i(t)$  (donc de  $u_R(t)$ ) et discontinuité de  $u_L(t)$ .

**Régime critique :**  $Q = \frac{1}{2}$  C'est le cas où la résistance  $R$  du circuit est égale à la résistance critique

$$R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

La solution de l'équation homogène est alors de la forme :

$$t \mapsto A(1 + Bt)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec  $A$  une constante de la dimension d'une **tension** et  $B$  une constante de la dimension de **l'inverse d'un temps**.



D'où la solution complète :

$$u_C(t) = E + A(1 + Bt)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On utilisera les conditions de continuité pour déterminer  $A$  et  $B$  :

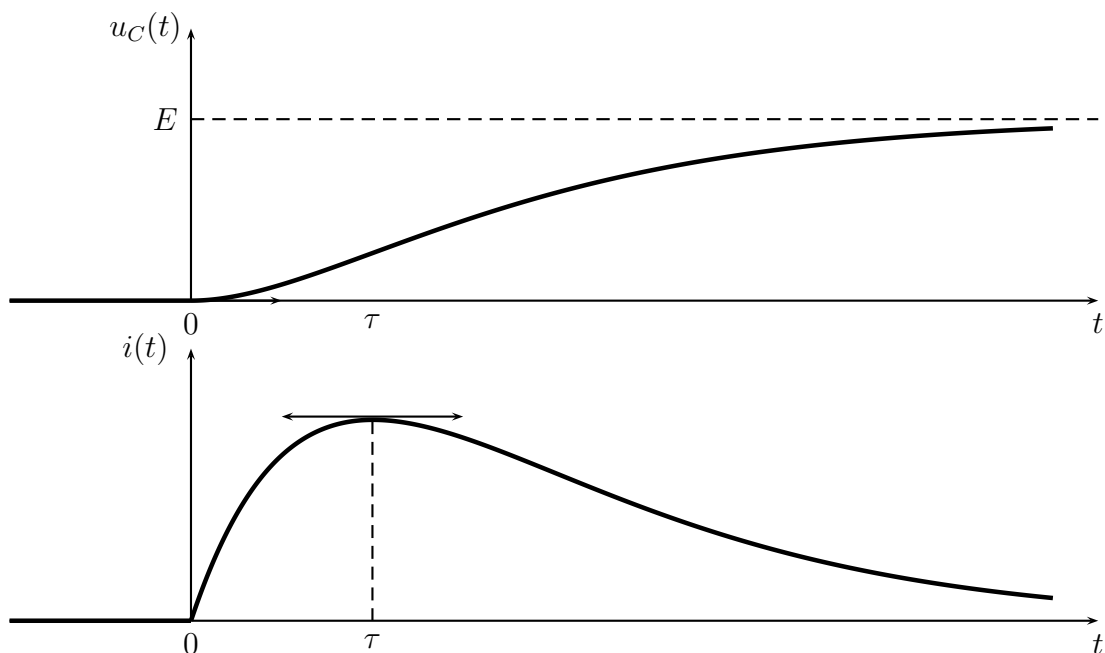
Continuité de la tension aux bornes du condensateur  $u_C(t)$  : à  $t = 0$ ,

$$u_C(t) = 0 = E + A \Rightarrow A = -E$$

Continuité de l'intensité du courant dans la bobine :  $i = C \frac{du_C(t)}{dt} = C(ABe^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{A}{\tau}(1 + Bt)e^{-\frac{t}{\tau}})$  et à  $t = 0$ ,



$$i = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{\tau} \quad \Rightarrow u_C(t) = E[1 - (1 + \frac{t}{\tau})e^{-\frac{t}{\tau}}] \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{E}{L}te^{-\frac{t}{\tau}}$$



Même forme mais retour **plus rapide** à un régime permanent.

**Régime pseudo-périodique** :  $Q > \frac{1}{2}$  C'est à dire pour  $R < R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  la résistance critique du circuit.

On pose  $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} > 0$  homogène à une pulsation, c'est la **pseudo-pulsation**.  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  est la **pseudo-période** du phénomène.

On pose aussi  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ , homogène à une durée, c'est le **temps de relaxation** qui caractérise la durée des phénomènes transitoires.

$sol_H$  peut s'écrire sous une forme réelle :

$$e^{-\frac{t}{\tau}}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$



La solution complète est :

$$u_C(t) = E + e^{-\frac{t}{\tau}}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

Détermination des constantes :

Continuité de la tension aux bornes du condensateur  $u_C(t)$  : à  $t = 0$ ,

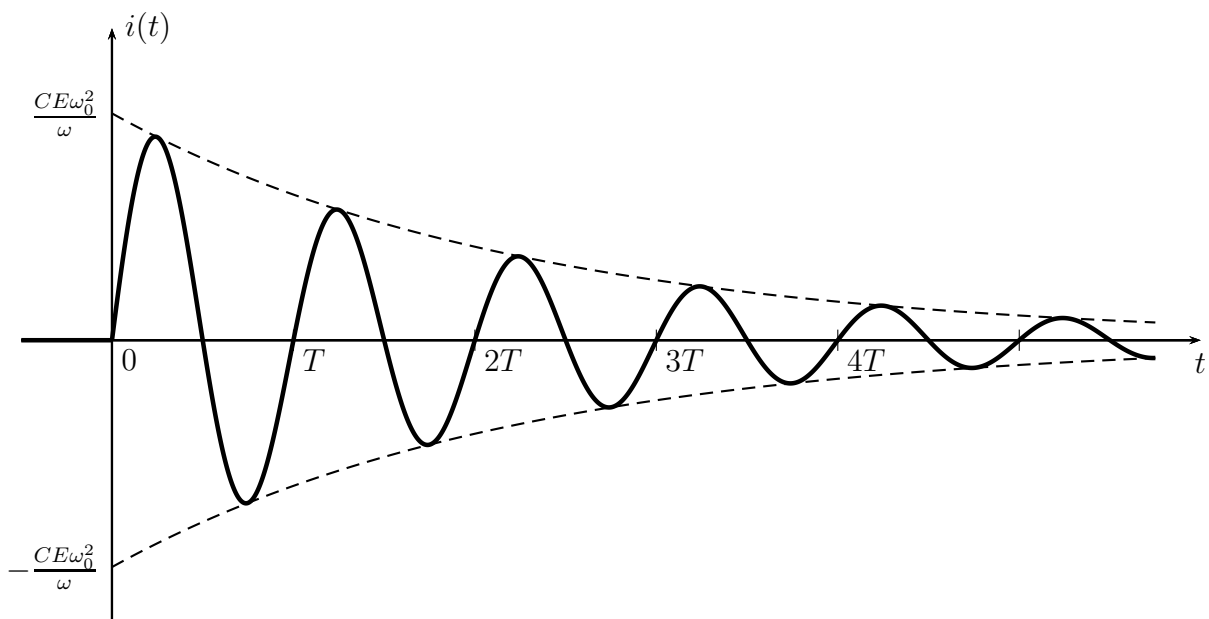
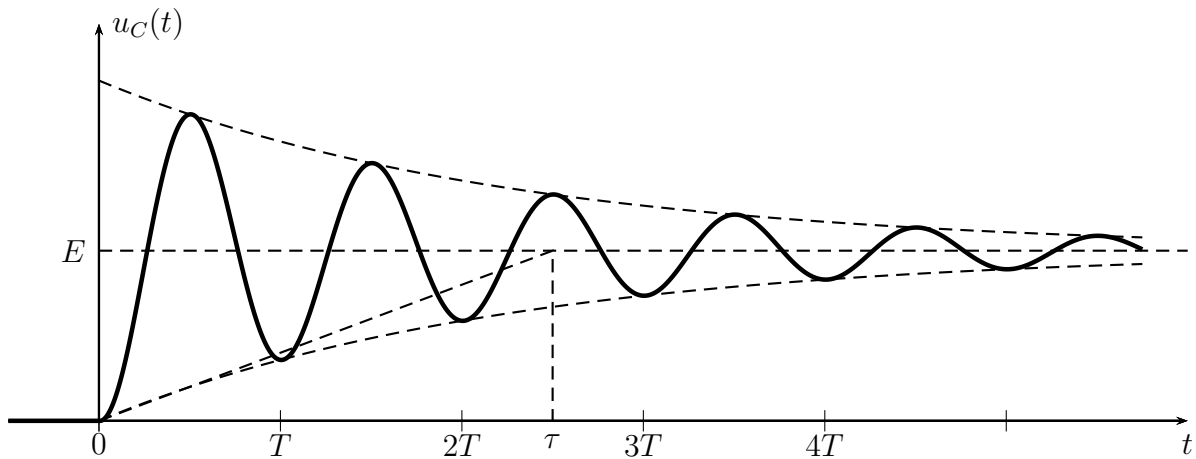
$$u_C(t) = 0 = E + A \Rightarrow A = -E$$

Continuité de l'intensité du courant dans la bobine :  $i = C \frac{du_C(t)}{dt} = C(e^{-\frac{t}{\tau}}[(\omega B - \frac{A}{\tau}) \cos \omega t + (-\omega A - \frac{B}{\tau}) \sin \omega t])$  et à  $t = 0$ ,

$$i = 0 = C(\omega B - \frac{A}{\tau}) \Rightarrow B = -\frac{E}{\tau\omega}$$

et finalement :

$$u_C(t) = E[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}(\cos \omega t + \frac{1}{\omega\tau} \sin \omega t)] \text{ et on montre que } i = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{CE\omega_0^2}{\omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega t$$



**Remarques :**

- Ces grandeurs oscillent à l'intérieur d'une enveloppe exponentielle  $\pm e^{-\frac{t}{\tau}} = \pm e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$  qu'il faut tracer au préalable.
- La pseudo pulsation  $\omega$  est inférieure à  $\omega_0$  et par conséquent, la pseudo-période est supérieure à la pulsation propre  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

- On considère généralement que pour  $Q$  assez grand,  $Q$  correspond environ au **nombre d'oscillations discernables**.

**Régime harmonique**  $Q \rightarrow \infty$  On a alors le cas idéal où  $R = 0$ , il n'y a pas d'amortissement, c'est le cas particulier  $Q \gg \frac{1}{2}$  pour lequel la partie réelle des racines est nulle.

L'équation différentielle sans second membre prend alors la forme :  $\ddot{u}_C + \omega_0^2 u_C(t) = 0$  soit

$$\ddot{u}_C = -\omega_0^2 u_C(t)$$

et les solutions sont de la forme :

$$u_C(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

soit la solution générale :

$$u_C(t) = E + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

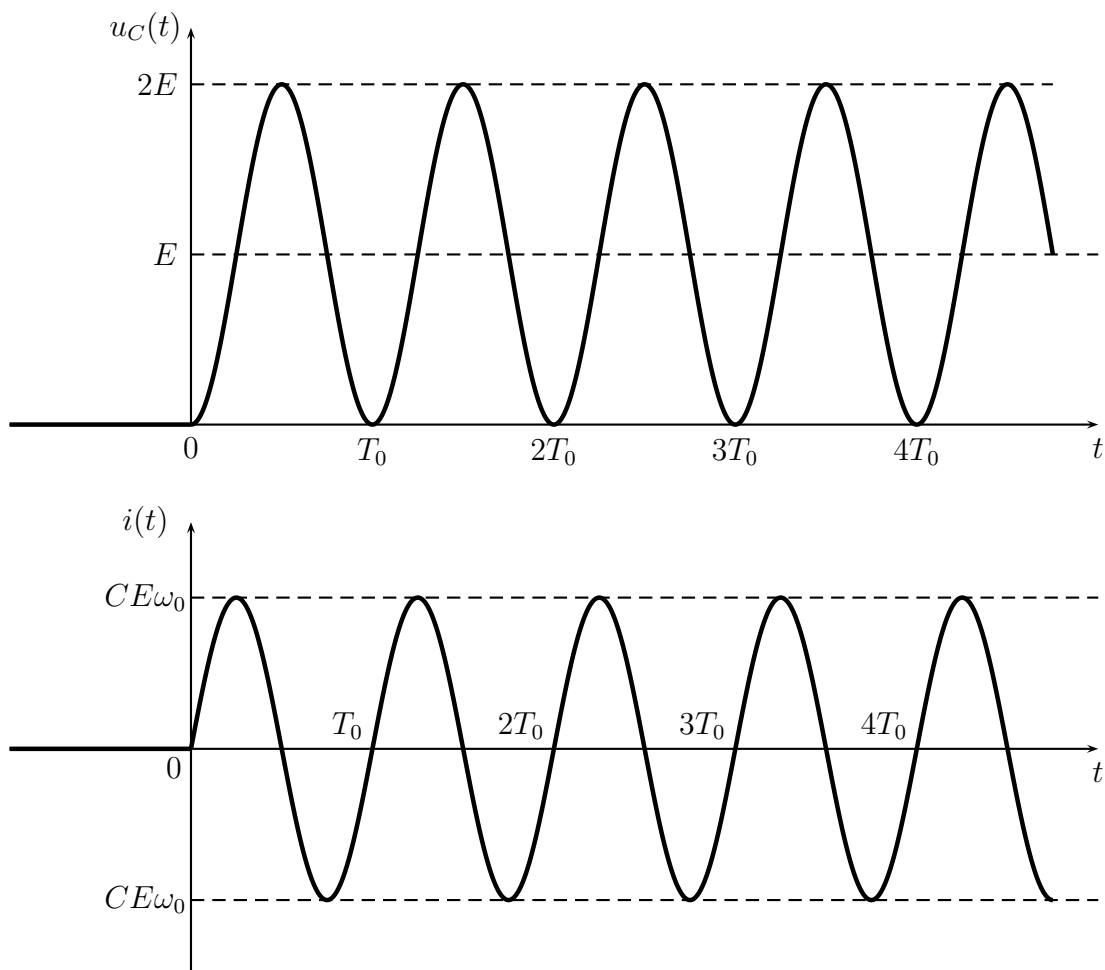
Détermination des constantes :

Continuité de la tension aux bornes du condensateur  $u_C(t)$  : à  $t = 0$ ,

$$u_C(t) = 0 = E + A$$

Continuité de l'intensité du courant dans la bobine :  $i = C \frac{du_C(t)}{dt} = C(-\omega_0 A \sin \omega_0 t + \omega_0 B \cos \omega_0 t)$  et à  $t = 0$ ,  $i = 0 = C(\omega_0 B)$  d'où

$$A = -E \quad B = 0 \quad \Rightarrow u_C(t) = E(1 - \cos \omega t) \text{ et } i = \omega_0 C E \sin \omega_0 t$$

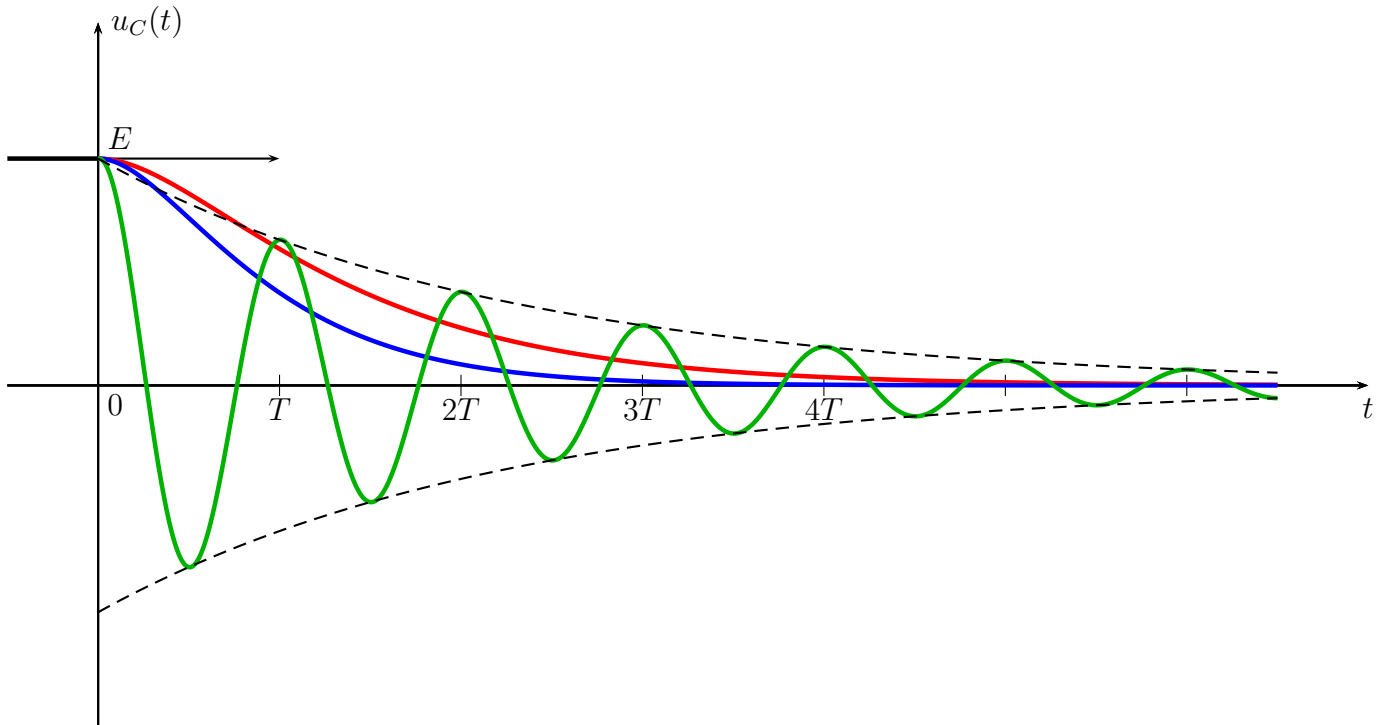


Remarques :

- On est dans le cas  $Q \gg 1 \iff \tau \rightarrow \infty$  et il n'y a pas de décroissance et  $T = T_0$ .
- Dans la réalité, le cas  $R$  est impossible à obtenir car le circuit contient forcément des éléments résistifs qui dissipent de l'énergie sous forme de chaleur. On peut néanmoins obtenir  $R = 0$  en ajoutant un circuit contenant un AO qui simule une résistance négative (voir TP).

## II Réponse libre du circuit RLC série

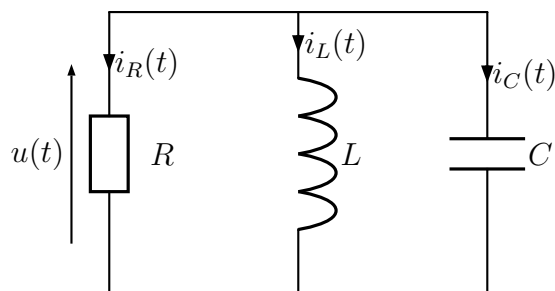
Si on se place maintenant dans le cas où l'interrupteur bascule dans l'autre sens (de 1 vers 2), avec le condensateur chargé à l'instant initial ( $u_C(0^-) = E$ ), on obtient les graphes suivants pour  $u_C(t)$ .



Le régime critique est celui pour lequel on atteint le plus rapidement le régime permanent<sup>1</sup>. Intéressant si on veut limiter la durée du régime transitoire (amortisseurs d'automobiles).

## III Cas d'un circuit RLC parallèle

### 1. Circuit et conditions initiales



avec par exemple  $u(0^-) = E$  : condensateur chargé sous une tension  $E$ .

1. Je sais que ce n'est pas ce que vous voyez en SI et cela dépend de la définition exacte que l'on prend pour « plus rapidement » et de la tolérance que l'on se donne pour dire si le régime permanent est atteint, mais qualitativement, les régimes pour lesquels le retour est le plus rapide, quelque soit la définition, correspondent à un facteur de qualité proche de  $\frac{1}{2}$ .

## 2. Équation différentielle en $u_C(t)$

D'après la loi des nœuds,

$$i_C + i_R + i_L = 0$$

avec  $i_C(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$ ,  $i_R(t) = \frac{u(t)}{R}$  et  $u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow$  on a intérêt à dériver la loi des nœuds.

$$\begin{aligned} \frac{di_C}{dt} + \frac{di_R}{dt} + \frac{di_L}{dt} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( C \frac{du}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{u}{R} \right) + \frac{u}{L} = 0 \\ &\Rightarrow C \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = 0 \end{aligned}$$

ou encore, sous forme canonique,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0 \iff \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_p} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

## 3. Comparaison avec le $RLC$ série

On retrouve la même équation canonique donc le même type de solutions selon la valeur des  $Q_p$  et des conditions initiales. On a la même fréquence propre  $\omega_0$  mais avec cette fois

$$\frac{\omega_0}{Q_p} = \frac{1}{RC} \Rightarrow Q_p = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow Q_{\text{parallèle}} = \frac{1}{Q_{\text{série}}}$$

c'est à dire l'inverse de  $Q_{\text{série}}$ . Le facteur de qualité augmente quand  $R$  augmente.

C'est cohérent car on retrouve bien un circuit  $LC$  série quand  $R$  tend vers l'infini, c'est à dire en remplaçant le résistor par un interrupteur ouvert.



## Table des matières

### I Réponse d'un circuit RLC série à un échelon de tension

1. Circuit
2. Équation différentielle en  $u_C(t)$
3. Retour sur la mécanique
4. Mise sous forme canonique
5. Résolution de l'équation différentielle : charge du condensateur

### II Réponse libre du circuit RLC série

### III Cas d'un circuit RLC parallèle

1. Circuit et conditions initiales
2. Équation différentielle en  $u_C(t)$
3. Comparaison avec le *RLC* série