EC_4 Circuits linéaires du second ordre en régime transitoire

PCSI 2024 – 2025

I Réponse d'un circuit RLC série à un échelon de tension

L'interrupteur est initialement en position 2 depuis longtemps, le condensateur est déchargé et l'intensité est nulle. À t=0, il est basculé en position 1.

2. Équation différentielle en $u_C(t)$

On applique la loi des mailles : $E-u_R-u_L-u_C=0$ avec $u_R=Ri$, $u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $i=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ soit $u_L=LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$ d'où

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C = E \iff \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E}{LC}$$

Équation différentielle du deuxième ordre linéaire à cœfficients constants (qui doivent être tous du même signe pour que le système soit stable) et avec second membre. Le circuit est donc d'ordre deux.

3. Retour sur la mécanique

Cette équation ressemble fortement à celle que nous avons vue en mécanique pour l'oscillateur harmonique. Si on reprend le bilan de force pour l'oscillateur harmonique et que l'on rajoute une force de frottement visqueux ($\vec{F} = -\lambda \vec{v}$), alors l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\vec{a} = \Sigma \vec{F} \Rightarrow m\ddot{x} = -\lambda \dot{x} - k(x - l_0) \Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \lambda \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = kl_0$$

4. Mise sous forme canonique

On retrouve donc une équation analogue en mécanique. On trouve le même type d'équation dans d'autres domaines de la physique et, pour faire des analogies entre ces différentes disciplines, on la met sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \alpha}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \alpha = \text{ quelque chose}$$



avec ici, pour un RLC série :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

 ω_0 est la pulsation propre du circuit (en radian par seconde; rad.s⁻¹) et Q le facteur de qualité, nombre sans dimension.

ou encore
$$\ddot{u}_C + \frac{2}{\tau}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E$$
 avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ le temps de relaxation du circuit.

5. Résolution de l'équation différentielle : charge du condensateur

Méthode de résolution Pour la résolution d'une telle équation différentielle :

- 1. On trouve une solution particulière sol_P
- 2. On résout l'équation homogène associée (c'est à dire avec le second membre =0) $\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C(t) = 0$
- 3. La solution générale est la somme de la solution particulière et de la solution de l'équation homogène : $sol = sol_P + sol_H$
- 4. On trouve les constantes d'intégration à l'aide des relations de continuité.

Remarques qualitatives Même sans résoudre l'équation, plusieurs choses sont à savoir :

- 1. La solution est stable si les coefficients sont de même signe .
- 2. Le comportement qualitatif va dépendre de la valeur de ${\cal Q}$
 - (a) $Q < \frac{1}{2}$: Régime apériodique
 - (b) $Q > \frac{1}{2}$: Régime pseudo-périodique
 - (c) $Q = \frac{1}{2}$: Régime critique

Régime apériodique : $Q < \frac{1}{2}$ C'est à dire pour $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{1}{2} \iff R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_C$ la résistance critique du circuit.

On pose (justification en cours de maths):

$$z_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - \sqrt{\Delta}}{2} = -\omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right) < 0 \quad \text{ et } \quad z_2 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2} = -\omega_0 \left(\frac{1}{2Q} - \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right) < 0$$

On pose aussi : $\tau_1 = -\frac{1}{z_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{z_2}$, la solution sol_H est de la forme

$$Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

On voit que τ_1 et τ_2 sont homogènes à des durées.

Pour avoir la solution complète, on a besoin d'une solution particulière. On la cherche sous la forme d'une constante . Si on pose $sol_P = K$ alors

$$0 + 0 + \omega_0^2 K = \omega_0^2 E \Rightarrow K = E$$

PCSI 2024 – 2025



D'où la solution complète :

$$u_C(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

Détermination des constantes : il y a deux constantes à déterminer car l'équation différentielle est du second ordre.

Continuité de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$: à t=0,

$$u_C(t) = 0 = E + A + B$$

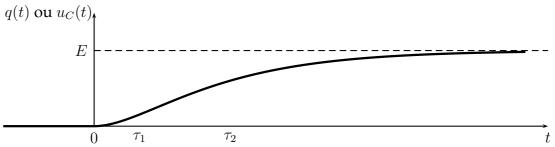
Continuité de l'intensité du courant dans la bobine : $i = C \frac{du_C(t)}{dt} = -C(\frac{A}{\tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{B}{\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}})$ et à $t = 0^+$,

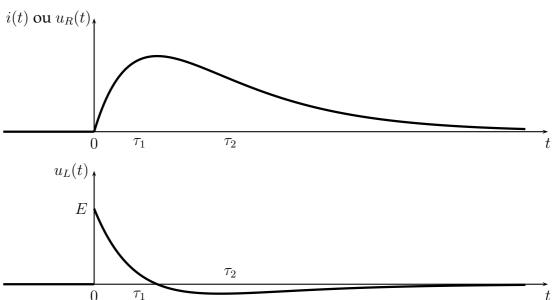
$$i = 0 = C(\frac{A}{\tau_1} + \frac{B}{\tau_2}) \Rightarrow A = -\frac{\tau_1 B}{\tau_2} \Rightarrow A = E \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}$$
 et $B = -E \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$

et finalement:



$$u_C(t) = E \left[1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] \qquad ; \qquad i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{u_R(t)}{R} \qquad \text{et} \qquad u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$





Continuité de $u_C(t)$ (donc de q(t)) et de i(t) (donc de $u_R(t)$) et discontinuité de $u_L(t)$.

Régime critique : $Q = \frac{1}{2}$ C'est le cas où la résistance R du circuit est égale à la résistance critique $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

La solution de l'équation homogène est alors de la forme :

$$t \mapsto A(1+Bt)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

PCSI 2024 - 2025

avec A une constante de la dimension d'une tension et B une constante de la dimension de l'inverse d'un temps.

 \Diamond

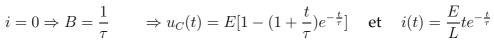
D'où la solution complète :

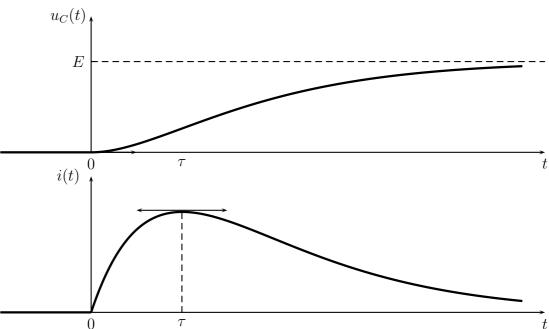
$$u_C(t) = E + A(1 + Bt)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On utilisera les conditions de continuité pour déterminer A et B: Continuité de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$: à t=0,

$$u_C(t) = 0 = E + A \Rightarrow A = -E$$

Continuité de l'intensité du courant dans la bobine : $i = C\frac{du_C(t)}{dt} = C(ABe^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{A}{\tau}(1+Bt)e^{-\frac{t}{\tau}})$ et à t=0,





Même forme mais retour plus rapide à un régime permanent.

Régime pseudo-périodique : $Q > \frac{1}{2}$ C'est à dire pour $R < R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ la résistance critique du circuit

On pose $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} > 0$ homogène à une pulsation, c'est la pseudo-pulsation. $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la pseudo-période du phénomène.

la pseudo-période du phénomène. On pose aussi $\tau=\frac{2Q}{\omega_0}$, homogène à une durée, c'est le temps de relaxation qui caractérise la durée des phénomènes transitoires.

 sol_H peut s'écrire sous une forme réelle :

$$e^{-\frac{t}{\tau}}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$



La solution complète est :

$$u_C(t) = E + e^{-\frac{t}{\tau}} (A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

Détermination des constantes :

Continuité de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$: à t=0,

$$u_C(t) = 0 = E + A \Rightarrow A = -E$$

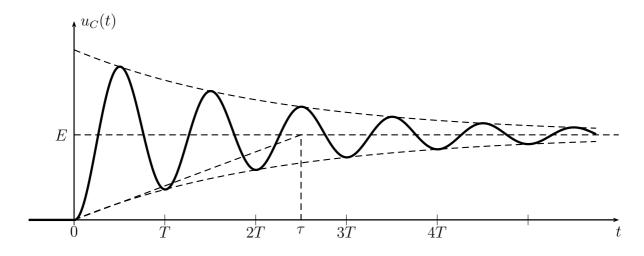
PCSI 2024 – 2025

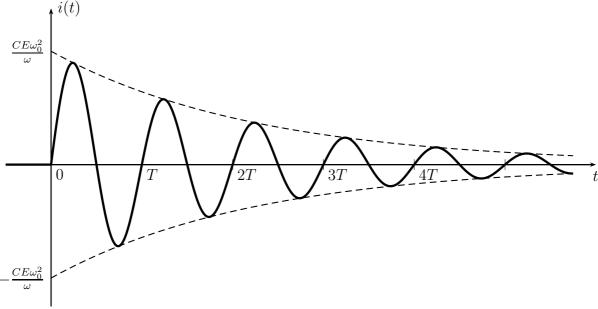
Continuité de l'intensité du courant dans la bobine : $i = C \frac{du_C(t)}{dt} = C(e^{-\frac{t}{\tau}}[(\omega B - \frac{A}{\tau})\cos\omega t + (-\omega A - \frac{B}{\tau})\sin\omega t)]$ et à t = 0,

$$i = 0 = C(\omega B - \frac{A}{\tau}) \Rightarrow B = -\frac{E}{\tau \omega}$$

et finalement:

$$u_C(t) = E[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}(\cos\omega t + \frac{1}{\omega\tau}\sin\omega t)] \text{ et on montre que } i = C\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{CE\omega_0^2}{\omega}e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\omega t$$





Remarques:

- Ces grandeurs oscillent à l'intérieur d'une enveloppe exponentielle $\pm e^{-\frac{t}{\tau}}=\pm e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$ qu'il faut tracer au préalable.
- La pseudo pulsation ω est inférieure à ω_0 et par conséquent, la pseudo-période est supérieure à la pulsation propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

• On considère généralement que pour *Q* assez grand, *Q* correspond environ au nombre d'oscillations discernables.

Régime harmonique $Q \to \infty$ On a alors le cas idéal où R = 0, il n'y a pas d'amortissement, c'est le cas particulier $Q \gg \frac{1}{2}$ pour lequel la partie réelle des racines est nulles.

L'équation différentielle sans second membre prend alors la forme : $\ddot{u}_C + \omega_0^2 u_C(t) = 0$ soit

$$\ddot{u}_C = -\omega_0^2 u_C(t)$$

et les solutions sont de la forme :

$$u_C(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

💙 soit la solution générale :

$$u_C(t) = E + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

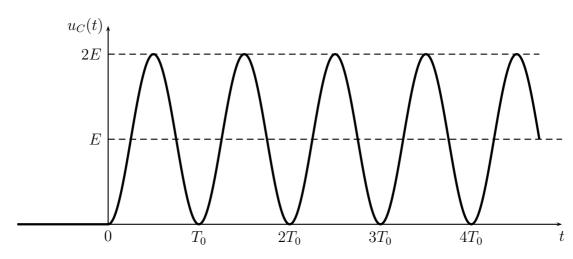
Détermination des constantes :

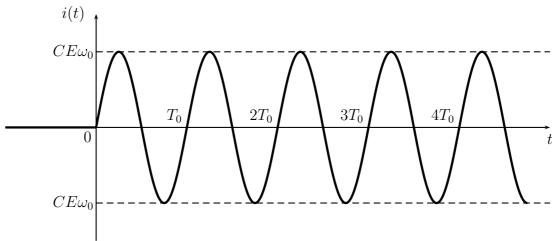
Continuité de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$: à t=0,

$$u_C(t) = 0 = E + A$$

Continuité de l'intensité du courant dans la bobine : $i=C\frac{du_C(t)}{dt}=C(-\omega_0A\sin\omega_0t+\omega_0B\cos\omega_0t)]$ et à t=0, $i=0=C(\omega_0B)$ d'où

$$A = -E$$
 $B = 0$ $\Rightarrow u_C(t) = E(1 - \cos \omega t) \text{ et } i = \omega_0 CE \sin \omega_0 t$





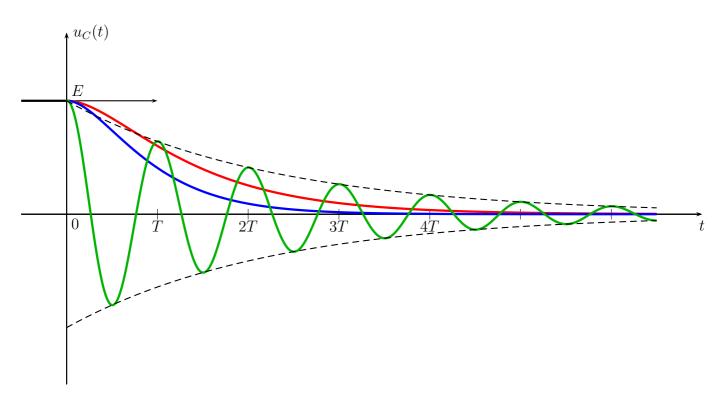
Remarques:

- On est dans le cas $Q \gg 1 \iff \tau \to \infty$ et il n'y a pas de décroissance et $T = T_0$.
- Dans la réalité, le cas R est impossible à obtenir car le circuit contient forcément des éléments résistifs qui dissipent de l'énergie sous forme de chaleur. On peut néanmoins obtenir R=0 en ajoutant un circuit contenant un AO qui simule une résistance négative (voir TP).

PCSI 2024 – 2025 Page 6/8

II Réponse libre du circuit RLC série

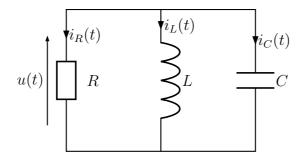
Si on se place maintenant dans le cas où l'interrupteur bascule dans l'autre sens (de 1 vers 2), avecle condensateur chargé à l'instant initial ($u_C(0^-) = E$), on obtient les graphes suivants pour $u_C(t)(t)$.



Le régime critique est celui pour lequel on atteint le plus rapidement le régime permanent¹. Intéressant si on veut limiter la durée du régime transitoire (amortisseurs d'automobiles).

III Cas d'un circuit RLC parallèle

1. Circuit et conditions initiales



avec par exemple $u(0^-) = E$: condensateur chargé sous une tension E.

PCSI 2024 – 2025 Page 7/8

^{1.} Je sais que ce n'est pas ce que vous voyez en SI et cela dépend de la définition exacte que l'on prend pour « plus rapidement » et de la tolérance que l'on se donne pour dire si le régime permanent est atteint, mais qualitativement, les régimes pour lesquels le retour est le plus rapide, quelque soit la définition, correspondent à un facteur de qualité proche de $\frac{1}{2}$.

2. Équation différentielle en $u_C(t)$

D'après la loi des nœuds,

$$i_C + i_R + i_L = 0$$

avec $i_C(t)=C.\frac{du(t)}{dt}$, $i_R(t)=\frac{u(t)}{R}$ et $u(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}\Rightarrow$ on a intérêt à dériver la loi des nœuds.

$$\frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{u}{R} \right) + \frac{u}{L} = 0$$
$$\Rightarrow C \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{L} = 0$$

ou encore, sous forme canonique,

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{LC} = 0 \iff \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q_n}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

3. Comparaison avec le RLC série

On retrouve la même équation canonique donc le même type de solutions selon la valeur des Q_p et des conditions initiales. On a la même fréquence propre ω_0 mais avec cette fois

$$\frac{\omega_0}{Q_p} = \frac{1}{RC} \Rightarrow Q_p = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow Q_{\text{parallèle}} = \frac{1}{Q_{\text{série}}}$$

c'est à dire l'inverse de $Q_{\mathrm{s\acute{e}rie}}$. Le facteur de qualité augmente quand R augmente.

C'est cohérent car on retrouve bien un circuit LC série quand R tend vers l'infini, c'est à dire en remplaçant le résistor par un interrupteur ouvert.

PCSI 2024 – 2025 Page 8/8

Table des matières

I Réponse d'un circuit RLC série à un échelon de tension

- 1. Circuit
- 2. Équation différentielle en $u_C(t)$
- 3. Retour sur la mécanique
- 4. Mise sous forme canonique
- 5. Résolution de l'équation différentielle : charge du condensateur

II Réponse libre du circuit RLC série

III Cas d'un circuit RLC parallèle

- 1. Circuit et conditions initiales
- 2. Équation différentielle en $u_C(t)$
- 3. Comparaison avec le RLC série

PCSI 2024 – 2025 Lycée Poincaré