EC_5 Dipôles linéaires en régime sinusoïdal forcé

PCSI 2024 – 2025

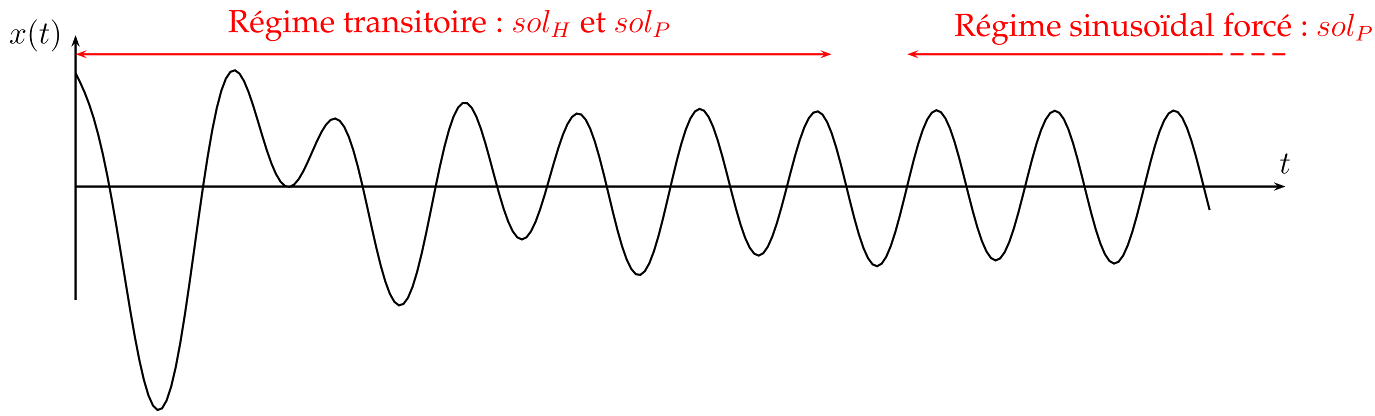
I Définitions et intérêt de l'étude

1. Régime sinusoïdal forcé

Si on alimente un circuit électrique linéaire du deuxième ordre (par exemple RLC série), avec une tension sinusoïdale, par application des loi de Kirchoff nous aurons une équation du type :

$$D_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + D_1 \frac{dx(t)}{dt} + D_0 x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

pour $x(t)$ une grandeur électrique du circuit (intensité dans une branche ou tension aux bornes d'un dipôle). La solution de cette équation différentielle est $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$.



- $x_H(t)$ est la solution de l'équation différentielle sans second membre. Elle correspond au régime transitoire et disparaît plus ou moins rapidement si le système étudié est stable c'est à dire si tous les cœfficients D_i sont de même signe.
- $x_P(t)$ est la solution particulière de l'équation différentielle avec second membre. Elle correspond au régime forcé (éviter le mot "permanent" car ici, $x_P(t)$ dépend du temps). De la même forme que le second membre, elle sera ici sinusoïdale et de même pulsation ω c'est à dire de la forme : $x_P(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

Dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'au régime forcé :

♡

$$x(t) = x_P(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Il s'agit donc de déterminer uniquement X_m et φ, on n'aura donc **plus besoin de résoudre complètement l'équation différentielle** en tenant compte des conditions initiales (comme si elle avaient été oubliées par le circuit).

II Représentation d'un signal sinusoïdal, utilisation des complexes

Les lois de l'électrocinétique dans des circuits linéaires nous amènent à sommer, dériver ou intégrer des grandeurs sinusoïdales.
Plutôt que d'utiliser les formules trigonométriques qui vont alourdir les calculs, nous pouvons utiliser la méthode des *complexes* qui contrairement à ce que suggère son nom, va nous *simplifier* les calculs.

1. Amplitude complexe

Principe : à la grandeur $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$, on associe la fonction complexe $\underline{x(t)}$ telle que $\underline{x(t)} = X_m(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$.

Définitions :

- **$\underline{X_m}$ est l'amplitude complexe**

$$\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi} = X_m(\cos\varphi + j\sin\varphi) \text{ **et** } j \text{ **tel que** } j^2 = -1.$$

- **On définit également la valeur efficace complexe**

$$\underline{X_{\text{eff}}} = \frac{\underline{X_m}}{\sqrt{2}} = X_{\text{eff}} e^{j\varphi} \Rightarrow \underline{x(t)} = \underline{X_{\text{eff}}}\sqrt{2}e^{j\omega t}$$

$x(t)$ est alors la partie réelle de $\underline{x(t)}$ qui n'a aucune réalité physique, c'est un intermédiaire de calcul.

En résumé :

$x(t) = \Re(\underline{x(t)})$ **avec** $\underline{x(t)} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$ **d'où** $\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi}$ **l'amplitude complexe.**

L'amplitude complexe $\underline{X_m}$ contient toutes les caractéristiques de $x(t)$:

- **son module**

$$|\underline{X_m}| = \sqrt{\Re(\underline{X_m})^2 + \Im(\underline{X_m})^2}$$

est égal à l'amplitude X_m de $x(t)$,

- **son argument**

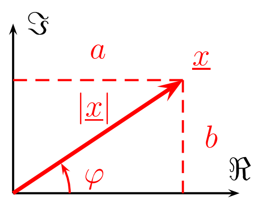
$$\arg(\underline{X_m})$$

est égal à φ, la phase à l'origine de $x(t)$.

2. Rappels mathématiques sur les complexes

Soient $\underline{x} = a + bj$ et $\underline{x'}$ deux nombres complexes, α et β des nombres réels.

- Représentation de $\underline{x}$ dans le plan complexe.



- Module de $\underline{x}$. D'après la figure ci-contre,

$$|\underline{x}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\Re(\underline{x})^2 + \Im(\underline{x})^2}$$

- Argument de $\underline{x}$: $\arg \underline{x} = \varphi$. De même, sur la figure on relève

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\Im(\underline{x})}{\Re(\underline{x})} \qquad \cos\varphi = \frac{a}{|\underline{x}|} = \frac{\Re(\underline{x})}{\sqrt{\Re(\underline{x})^2 + \Im(\underline{x})^2}} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{b}{|\underline{x}|} = \frac{\Im(\underline{x})}{\sqrt{\Re(\underline{x})^2 + \Im(\underline{x})^2}}$$

Il faudra utiliser deux formules pour déterminer complètement φ (modulo 2π) car l'utilisation de la première par exemple donne φ à π près.

  - ⋆ Si $a > 0 \Rightarrow \cos\varphi > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{b}{a}$.
  - ⋆ Si $a < 0 \Rightarrow \cos\varphi < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\pi + \arctan\frac{b}{a}$.

- Formules utiles :

$$|\underline{x}\underline{x}'| = |\underline{x}||\underline{x}'| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\underline{x}}{\underline{x}'}\right| = \frac{|\underline{x}|}{|\underline{x}'|} \qquad |\alpha\underline{x}| = |\alpha||\underline{x}| = \pm\alpha|\underline{x}| \text{ mais } |\alpha\underline{x} + \beta\underline{x}'| \neq |\alpha||\underline{x}| + |\beta||\underline{x}'|$$

$$\arg \underline{x}\underline{x}' = \arg\underline{x} + \arg\underline{x}' \quad \text{et} \quad \arg\frac{\underline{x}}{\underline{x}'} = \arg\underline{x} - \arg\underline{x}'$$

$$\arg\alpha\underline{x} = \arg\underline{x} \text{ si } \alpha > 0 \text{ et } \arg\alpha\underline{x} = \arg\underline{x} + \pi \text{ si } \alpha < 0 \qquad \arg(\underline{x} + \underline{x}') \neq \arg\underline{x} + \arg\underline{x}'$$

Exemple : déterminer le module $|\underline{H}|$ et l'argument φ de $\underline{H} = \frac{G_0}{1+jx}$ avec G_0 et x positives.

$$|\underline{H}| = \frac{|G_0|}{|1+jx|} = \frac{G_0}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(G_0) - \arg(1+jx) = 0 - \arctan(x)$$

3. Calculs sur des grandeurs sinusoïdales à l'aide de complexes

- Combinaison linéaire de grandeurs sinusoïdales : soient les grandeurs sinusoïdales synchrones $x_1(t) = X_{1m}\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $x_2(t) = X_{2m}\cos(\omega t + \varphi_2)$ dont on cherche à déterminer la combinaison linéaire $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ sous la forme $X_m\cos(\omega t + \varphi)$.

  Passage à la notation complexe $\underline{x_1(t)} = X_{1m}e^{j\varphi_1}e^{j\omega t}$ et $\underline{x_2(t)} = X_{2m}e^{j\varphi_2}e^{j\omega t}$, on en déduit

$$\underline{x(t)} = \alpha\underline{x_1(t)} + \beta\underline{x_2(t)} = \alpha X_{1m}e^{j\varphi_1}e^{j\omega t} + \beta X_{2m}e^{j\varphi_2}e^{j\omega t} = (\alpha X_{1m}e^{j\varphi_1} + \beta X_{2m}e^{j\varphi_2})e^{j\omega t}$$

  ce qui représente à nouveau une grandeur sinusoïdale de même pulsation ω et d'amplitude complexe

$$\underline{X_m} = \alpha X_{1m}e^{j\varphi_1} + \beta X_{2m}e^{j\varphi_2} = \alpha.\underline{X_{1m}} + \beta.\underline{X_{2m}}$$

  dont on saura calculer la phase φ et le module X_m puis $x(t) = \Re(\underline{x(t)}) = X_m\cos(\omega t + \varphi)$

  Attention : à tout instant, $\underline{X_m} = \alpha.\underline{X_{1m}} + \beta.\underline{X_{2m}}$ mais $X_m \neq \alpha.X_{1m} + \beta.X_{2m}$.

- Dérivation / intégration par rapport au temps : soit $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, une grandeur sinusoïdale représentée par la fonction complexe $\underline{x(t)} = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$

$$\frac{d\underline{x(t)}}{dt} = X_m e^{j\varphi} \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = j\omega \underline{x(t)}$$

Ainsi, une dérivation par rapport au temps revient à multiplier par $j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Une dérivation seconde par rapport au temps revient à multiplier par $(j\omega)^2 = -\omega^2$.
Inversement, intégrer revient à diviser par $j\omega$,, c'est à dire à multiplier par $\frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$

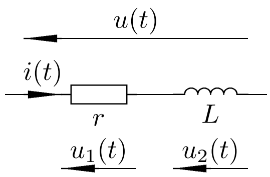
Comme les équations rencontrées (lois de Kirchoff et relations constitutives) sont linéaires, les grandeurs restent synchrones et on pourra les simplifier par $e^{j\omega t}$.

On travaillera donc avec des amplitudes complexes mais plus sur des équations différentielles ou des combinaisons linéaires de sin et de cos pas toujours évidentes à mettre sous la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

4. Exemple : bobine réelle en RSF

Déterminer la tension aux bornes d'une bobine réelle équivalente à l'association série d'un résistor de résistance $r = 10\,\Omega$ et d'une bobine idéale d'inductance $L = 0{,}1$ H quand elle est parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité d'amplitude $I_\mathrm{m} = 0{,}28$ A et de fréquence $f = 50$ Hz. On prendra la phase à l'origine de $i(t)$ comme origine des phases.

Il s'agit de déterminer $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ en prenant $i = I_m \cos \omega t$. Cela revient à calculer U_m et φ.



Sans utiliser la méthode des complexes : on écrirait
$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = RI_m \cos \omega t - LI_m \omega \sin \omega t$
... pas évident à mettre sous la forme voulue $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.

En utilisant la méthode des complexes : on pose $\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + 0)} = I_m e^{j\omega t}$ le complexe associé à $i(t)$ et on cherche $\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{U_m} e^{j\omega t}$ celui associé à $u(t)$.
Comme $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, alors $\underline{u(t)} = \underline{u_1(t)} + \underline{u_2(t)}$ avec

$$\underline{u_1(t)} = r\underline{i(t)} = rI_m e^{j\omega t} \text{ et } \underline{u_2(t)} = L\frac{d\underline{i(t)}}{dt} = jL\omega I_m e^{j\omega t}$$

On en déduit $\underline{u(t)} = I_m(r + jL\omega)e^{j\omega t} = \underline{U_m} e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{U_m} = \underline{U_{1m}} + \underline{U_{2m}} = I_m(r + jL\omega)$,

$$U_m = |\underline{U_m}| = I_m\sqrt{r^2 + (L\omega)^2} \qquad \varphi = \arg \underline{U_m} = \arctan \frac{L\omega}{r} \text{ car } r > 0$$

Et finalement, $u(t) = I_m\sqrt{r^2 + (L\omega)^2} \cos(\omega t + \arctan \frac{L\omega}{r})$.

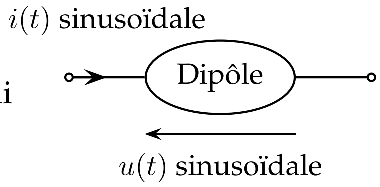
Application numérique : $\omega = 2\pi f \simeq 314$ rad.s^{-1} d'où $U_m \simeq 9{,}23$ V et $\varphi = 72{,}3° = 1{,}26$ rad soit

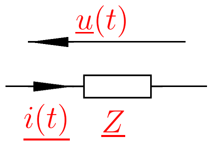
$$u(t) = 9{,}23 \cos(100\pi t + 1{,}26)$$

III Dipôles linéaires en RSF

1. Loi d'Ohm généralisée

Soit un dipôle traversé par $i(t)$ quand on lui applique $u(t)$ en convention récepteur.





Définition : Si $\underline{I}_m$ et $\underline{U}_m$ désignent les amplitudes complexes de $\underline{i}(t)$ et $\underline{u}(t)$, alors l'impédance complexe du dipôle est $\underline{Z}$ telle que :

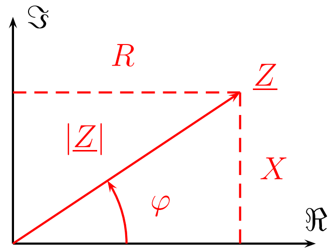
$$\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t) \Rightarrow \underline{Z} = \frac{U_m e^{j(\omega t+\varphi_u)}}{I_m e^{j(\omega t+\varphi_i)}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U_m}{I_m}e^{j\varphi}$$ **avec** $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ **la phase de** $u(t)$ **/** $i(t)$

On définit également l'admittance complexe : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

Loi d'Ohm généralisée :

$$\underline{U}_m = \underline{Z}.\underline{I}_m \iff \underline{U}_{\text{eff}} = \underline{Z}.\underline{I}_{\text{eff}} \Rightarrow \underline{I}_m = \underline{Y}.\underline{U}_m$$

Intérêt : la connaissance $\underline{Z}$ permet de déterminer entièrement :



- le rapport

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = |\underline{Z}| = \frac{1}{|\underline{Y}|}$$

  $|\underline{Z}|$ en Ohms Ω et $|\underline{Y}|$ en Siemens S.
- la phase de $u(t)$ par rapport à $i(t)$: $\varphi = \arg \underline{U}_m - \arg \underline{I}_m = \arg \underline{Z} = -\arg \underline{Y}$

Remarques :

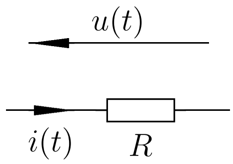
- On peut écrire $\underline{Z} = R + jX$ avec R la résistance et X la réactance du dipôle (R et X en Ω). Si le dipôle est passif, R est positif. Si X est positif (c'est à dire $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$), le dipôle est dit inductif, et si X négatif (c'est à dire $-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0$), il est dit capacitif.
- On peut écrire $\underline{Y} = G + jB$ avec G la conductance et B la susceptance du dipôle (G et B en Siemens S).

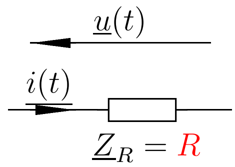
2. Impédance complexe de dipôles passifs

2.a. Impédance complexe d'un résistor

D'après la loi d'Ohm : $u(t) = Ri(t)$

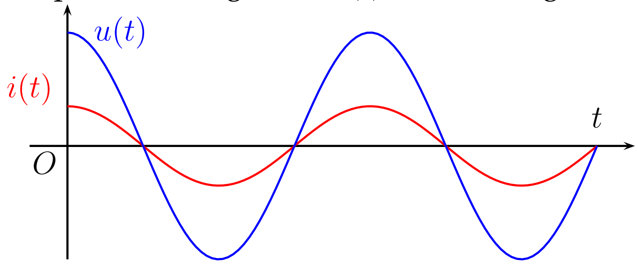
$$\Rightarrow \underline{u(t)} = R\underline{i(t)} = \underline{Z}_R\underline{i(t)} \Rightarrow \underline{Z}_R = R$$





L'impédance étant réelle, il n'y a pas de déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$, on dit qu'ils sont en phase : $\varphi = \arg R = 0$.

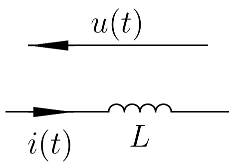
Par exemple, en prenant la phase à l'origine de $i(t)$ comme origine des phases.

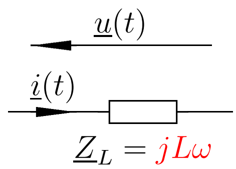


2.b. Impédance complexe d'une bobine parfaite

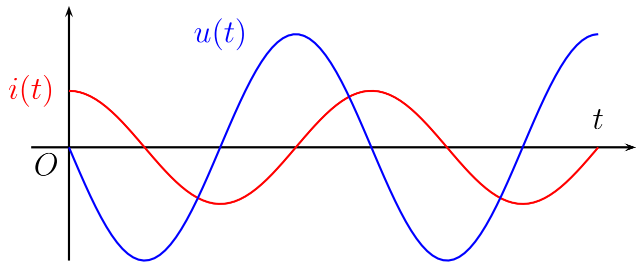
Si la bobine est parfaite et en convention récepteur,
$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \underline{u(t)} = L\frac{d\underline{i(t)}}{dt} = jL\omega\underline{i(t)} = \underline{Z}_L\underline{i(t)}$ soit

$$\underline{Z}_L = jL\omega = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$$



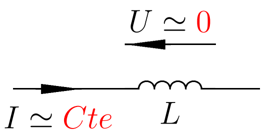


$j = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$ et $\underline{Z}_L = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$, il y a donc un déphasage de $+\frac{\pi}{2}$ de $u(t)$ par rapport à $i(t)$, on dit que la tension est en quadrature avance sur le courant (en convention récepteur).

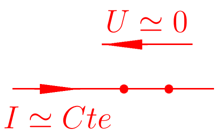


Remarques :

- Si $\omega \to 0$, alors $|\underline{Z}_L| = L\omega \to 0$: en basses fréquences, la bobine se comporte comme un interrupteur fermé :

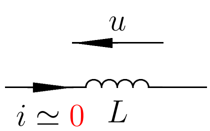


Équivaut en BF à

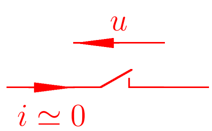


  On retrouve le comportement du régime continu ($\omega = 0$).

- Si $\omega \to \infty$, alors $|\underline{Z}_L| = L\omega \to \infty$: en hautes fréquences, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert :

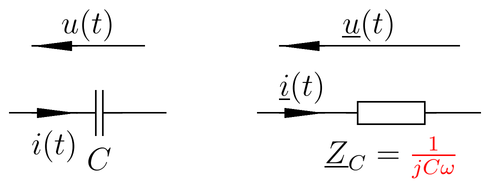


Équivaut en HF à



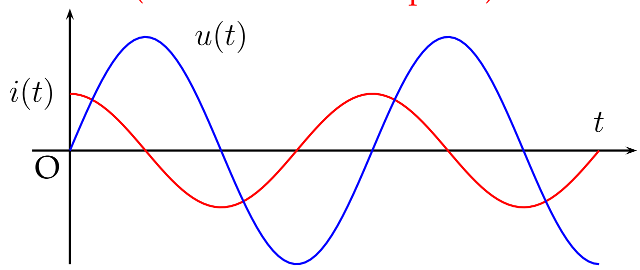
2.c. Impédance complexe d'un condensateur parfait

Si le condensateur est parfait et en convention récepteur,
$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \Rightarrow u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \Rightarrow \underline{i(t)} = jC\omega\underline{u(t)}$ et $\underline{u(t)} = \underline{Z_C}\,\underline{i(t)}$ en posant



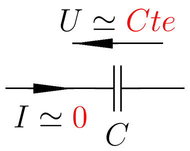
$$\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega} \iff \underline{Y_C} = jC\omega$$

$\underline{Z_C} = \frac{1}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$, il y a donc un déphasage $-\frac{\pi}{2}$ de $u(t)$ par rapport à $i(t)$, on dit que la tension est en quadrature retard sur le courant (en convention récepteur).

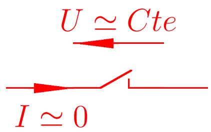


Remarques :

- Si $\omega \to 0$, alors $|\underline{Z_C}| = \frac{1}{C\omega} \to \infty$: aux basses fréquences, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert :

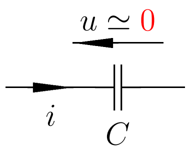


Équivaut en BF à

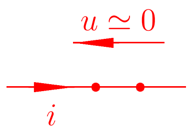


On retrouve le comportement du régime continu ($\omega = 0$).

- Si $\omega \to \infty$, alors $|\underline{Z_C}| = \frac{1}{C\omega} \to 0$: en hautes fréquences, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé :

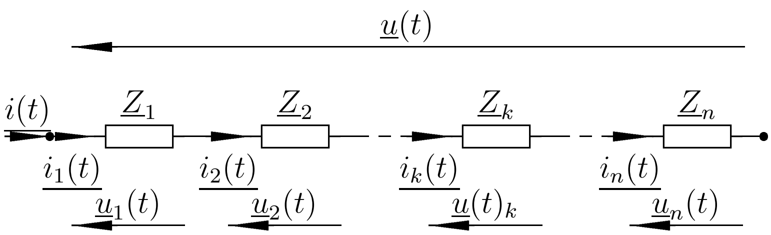


Équivaut en HF à

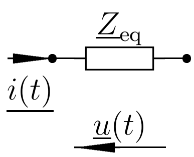


3. Association de dipôles linéaires

3.a. Association série



Équivaut à



À tout instant, en passant en notation complexe, $\underline{u}(t) = \underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t) + ..\underline{u}_k(t)... + \underline{u}_n(t)$ soit après division par $e^{j\omega t}$, $\underline{U}_m = \Sigma_{k=1}^{n}\underline{U}_{mk}$ avec $\underline{U}_{mk} = \underline{Z}_k\underline{I}_{mk} = \underline{Z}_k\underline{I}_m$ d'où $\underline{U}_m = \underline{Z}_{\text{eq}}.\underline{I}_m$ avec

$$\Rightarrow \underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + .. + \underline{Z}_n = \sum_{k=1}^{n}\underline{Z}_k$$

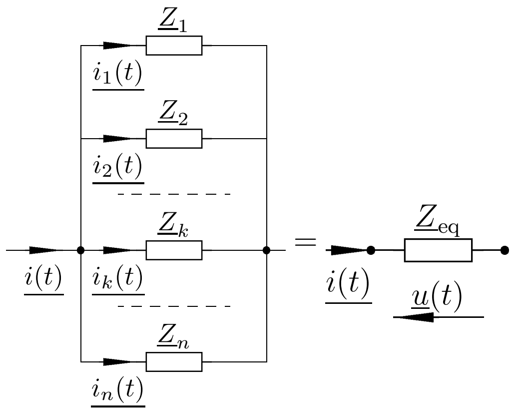
Exemple : Quelle est l'impédance complexe d'une bobine réelle ? $R + jL\omega$

3.b. Association parallèle

De même, $\underline{i}(t) = \underline{i}_1(t) + \underline{i}_2(t) + ..\underline{i}_k(t)... + \underline{i}_n(t)$
avec $\underline{i}_k(t) = \underline{Y}_k \underline{u}_k(t)$ conduit à
$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}} + ... + \frac{1}{\underline{Z_n}} = \sum_{k=1}^{n} + \frac{1}{\underline{Z_k}}$ soit

♡

$$\Rightarrow \underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y_1} + \underline{Y_2} + .. + \underline{Y_n} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y_k}$$



Exemple : Quelle est l'admittance complexe d'un condensateur réel ? (Résistance de fuite R_f en parallèle) $1/R + jC\omega$

3.c. Conclusion

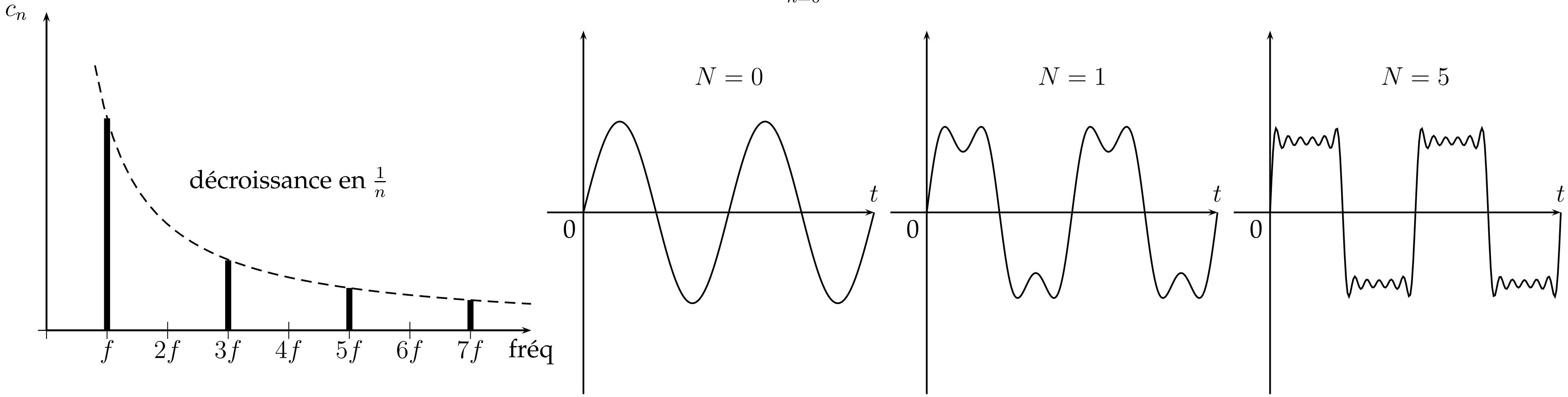
On retrouve les mêmes lois d'association que celles obtenues en régime permanent avec des résistors en remplaçant R par $\underline{Z}$ et $G = \frac{1}{R}$ par $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$.

Remarque : il en sera de même pour tous les théorèmes de l'électrocinétique. En particulier, il sera donc possible en RSF d'utiliser les formules des ponts diviseurs avec des condensateurs et des bobines.

Table des matières

Synthèse de Fourier

Signal rectangulaire : $s(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(2n+1)\omega t}{2n+1}$ avec $N \to \infty$



Signal triangulaire : $s(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\cos(2n+1)\omega t}{(2n+1)^2}$ avec $N \to \infty$