

EC₆ Oscillateurs linéaires en RSF, RLC série, résonance

PCSI 2024 – 2025

Ce chapitre est présenté en électrocinétique, mais nous avons vu que les équations de la mécanique sont les MÊMES! Donc tout ce qui est présenté en électronique ici est aussi valide pour un oscillateur mécanique (masse accrochée à un ressort dont l'autre extrémité oscille de façon sinusoïdale par exemple).

I Lois et Théorèmes de l'électrocinétique en RSF

Les lois vues en continue sont généralisable aux circuits LINEAIRES en RSF : loi des nœuds, loi des mailles etc... On peut les appliquer directement aux amplitudes complexes (correspond à diviser partout par $e^{j\omega t}$)

En particulier, les ponts diviseurs de tensions et de courant vont beaucoup beaucoup nous servir.

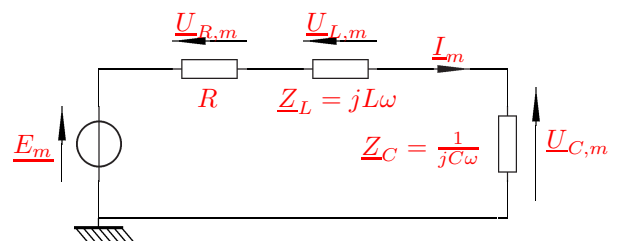
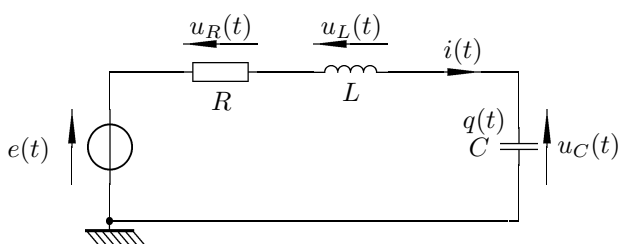
Définition : On parle de phénomène de **résonance** en régime sinusoïdal forcé lorsque **l'amplitude d'une grandeur présente un maximum pour une fréquence d'excitation.**

Remarque : les fréquences de résonance sont généralement proches des fréquences propres du système (c'est-à-dire les fréquences auquel le système oscille en l'absence de forçage sinusoïdal), bien qu'il n'y ait pas nécessairement égalité.

II Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé, résonances.

1. Caractéristiques du circuit

Impédance complexe du circuit : \underline{Z} .

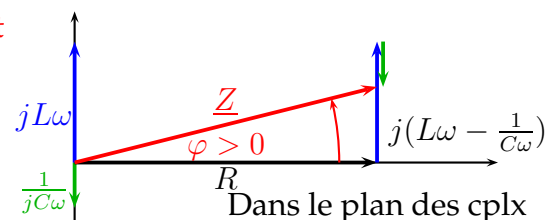


Les composants étant montés en série, $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$ soit

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j \left[L\omega - \frac{1}{C\omega} \right]$$

On a donc :

- $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$
- $\varphi = \arg \underline{Z}$ avec $Re(\underline{Z}) = R \geq 0$ donc $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \arctan \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$



Caractère inductif ou capacitif du circuit :

- Pour $\omega = \omega_0$ telle que $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ pulsation propre du circuit telle qu'elle avait été définie au chapitre précédent, $Z = R$, l'impédance est purement résistive.
- Si $\omega < \omega_0$, $L\omega - \frac{1}{C\omega} < 0$, $\varphi < 0$, la tension est en retard sur l'intensité et le circuit est capacitif.
- Si $\omega > \omega_0$, $L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0$, $\varphi > 0$, la tension est en avance sur l'intensité et le circuit est inductif.

2. Résonance en intensité

2.a. Position du problème

Le circuit est alimenté par la source $e(t)$ sinusoïdale et on cherche les caractéristiques de $i(t)$, elle même **sinusoïdale en régime sinusoïdal forcé**.

On pose $e(t) = E_m \cos(\omega t + 0) = E_m \cos \omega t$:

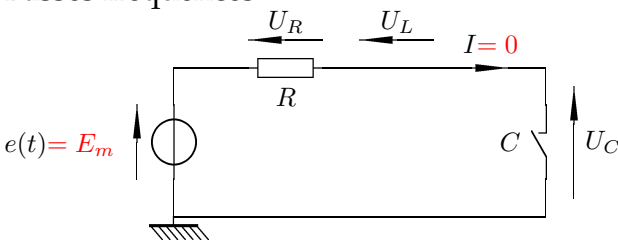
la phase à l'origine de la source $e(t)$ est la référence des phases.

En régime sinusoïdal forcé, $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$, où I_m et φ_i sont l'amplitude et la phase à l'origine de $i(t)$. Elles dépendent de la pulsation $\omega = 2\pi f$ imposée par la source.

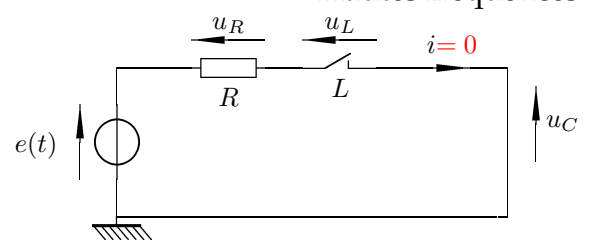
Comportement asymptotique : c'est à dire si ω prend des valeurs extrêmes.

- si $\omega \rightarrow 0$, la bobine se comporte comme un interrupteur **fermé** ($Z_L = L\omega \rightarrow 0$) et le condensateur se comporte comme un interrupteur **ouvert** ($Z_C = \frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$).
- si $\omega \rightarrow \infty$, la bobine se comporte comme un interrupteur **ouvert** ($Z_L = L\omega \rightarrow \infty$) et le condensateur se comporte comme un interrupteur **fermé** ($Z_C = \frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$).

Basses fréquences



Hautes fréquences



On remarque que $i(t)$ sera nulle en "basses fréquences" et "hautes fréquences".

2.b. Amplitude complexe de l'intensité du courant.

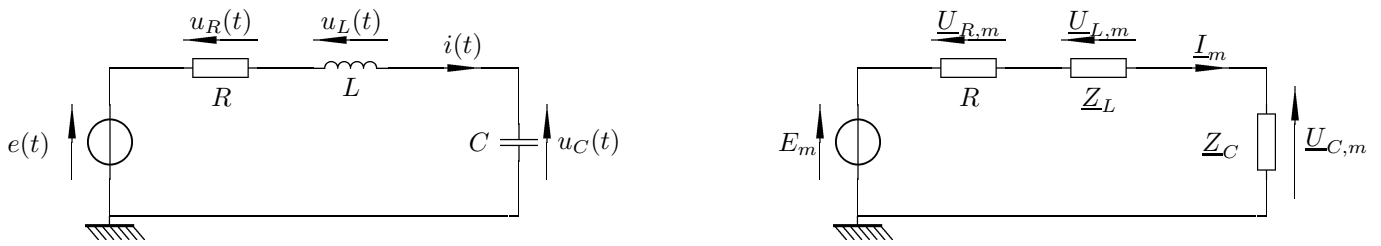
La phase à l'origine de $e(t)$ est la référence des phases d'où

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + 0) \rightarrow \underline{e(t)} = E_m e^{j(\omega t + 0)} = \underline{E_m} \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{E_m} = E_m$$

l'amplitude complexe de $\underline{e(t)}$. Pour l'intensité du courant, on a posé

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \rightarrow \underline{i(t)} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \underline{I_m} e^{j\omega t} \quad \text{avec } \underline{I_m} = I_m e^{j\varphi_i}$$

Pour déterminer totalement $i(t)$, il reste à déterminer φ_i et I_m , c'est à dire $\underline{I_m}$, fonction de ω .



La loi de de Pouillet en notation complexe, donne directement :

$$\underline{I}_m = \frac{E_m}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{E_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

En faisant apparaitre des grandeurs pertinentes et sans dimension :

- $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité, sans dimension et
- $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite, sans dimension.

$$L = \frac{RQ}{\omega_0} \text{ et } \frac{1}{C} = RQ\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_m = \frac{E_m}{R + j(Q\frac{\omega}{\omega_0} - Q\frac{\omega_0}{\omega})} = \frac{E_m/R}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

Comportement asymptotique :

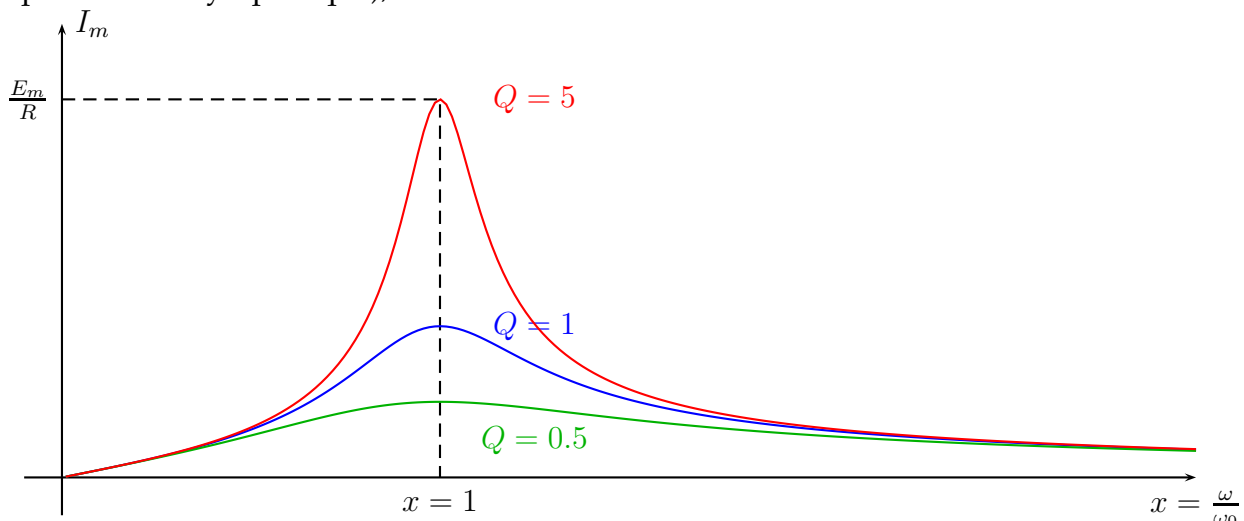
$$\underline{I}_m = \frac{E_m/R}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

<p>BF : $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow x \ll 1$</p> <p>$x - \frac{1}{x} \simeq -\frac{1}{x}$</p> <p>$\underline{I}_m \simeq \frac{E_m/R}{1 - jQ(\frac{1}{x})} \simeq \frac{E_m/R}{-j\frac{Q}{x}} \simeq j\frac{E_m x}{QR}$</p> <p>$I_m = \underline{I}_m \simeq 0$ et $\varphi_i = \arg \underline{I}_m \simeq \frac{\pi}{2}$</p>	<p>$x = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0$</p> <p>$x - \frac{1}{x} = 0$</p> <p>$\underline{I}_m = \frac{E_m}{R}$</p> <p>$I_m = \frac{E_m}{R}$ et $\varphi_i = 0$</p>	<p>HF : $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow x \gg 1$</p> <p>$x - \frac{1}{x} \simeq x$</p> <p>$\underline{I}_m \simeq \frac{E_m/R}{1 + jQx} \simeq \frac{x E_m/R}{jQx} = -j\frac{E_m}{QRx}$</p> <p>$I_m \simeq 0$ et $\varphi_i \simeq -\frac{\pi}{2}$</p>
---	---	---

2.c. Variation de I_m en fonction de ω : $I_m(\omega)$

$$I_m(\omega) = |\underline{I}_m(j\omega)| = \frac{E_m/R}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

En travaillant sur la fonction $I_m(\omega)$ précédente et en utilisant les expressions approchées de $\underline{I}_m(j\omega)$ (comportement asymptotique), on a



Pour $x = 1 \iff \omega = \omega_0 \Rightarrow \underline{Z} = R$ on a $I_m = \frac{E_m}{R}$ maximale, on dit qu'il y a **résonance en intensité**.

L'**acuité** de la résonance dépend de la valeur du facteur de qualité Q : résonance **aiguë si Q est grand et floue si Q est faible**.

Il y a toujours résonance en intensité dans le circuit RLC série.

2.d. Variation de φ_i en fonction de ω : $\varphi_i(\omega)$

On calcule

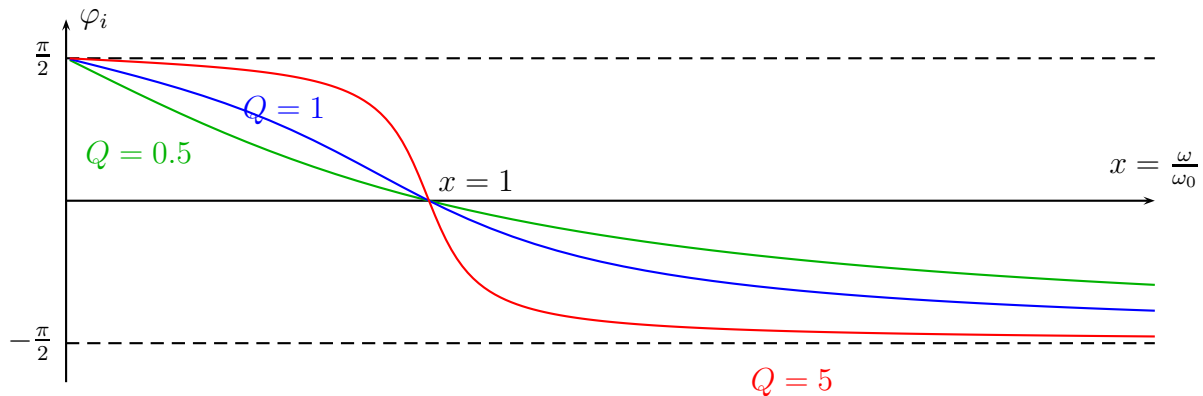
$$\varphi_i = \arg(\underline{I}_m) = \arg\left[\frac{E_m}{R} \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}\right] = \arg\left[\frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}\right]$$



$$\varphi_i = \arg(1) - \arg[1 + jQ(x - \frac{1}{x})] = 0 - \arg(1 + jQ(x - \frac{1}{x})) \quad \text{soit} \quad \tan \varphi_i = -Q(x - \frac{1}{x})$$

et $\cos \varphi_i$ a le signe de 1 (Cf. EC₅) et donc $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_i < \frac{\pi}{2}$ et finalement, $\varphi_i = -\arctan Q(x - \frac{1}{x})$.

En travaillant sur la fonction $\varphi_i(\omega)$ précédente et en utilisant les expressions approchées de $\underline{I}_m(j\omega)$ (comportement asymptotique), on a



Lorsque $x = 1, \underline{I}_m \simeq \frac{E_m}{R} \Rightarrow \varphi_i = 0, e(t)$ et $i(t)$ sont en phase ($\underline{Z} = R$ réelle).

3. Résonance en tension aux bornes du condensateur ?

3.a. Position du problème et hypothèses

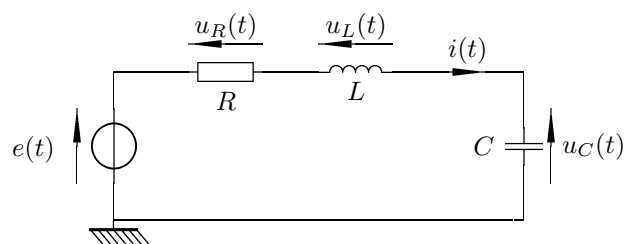
Soit $u_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur lorsque $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t)$.

En régime sinusoïdal forcé,

$$u_C(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_C)$$

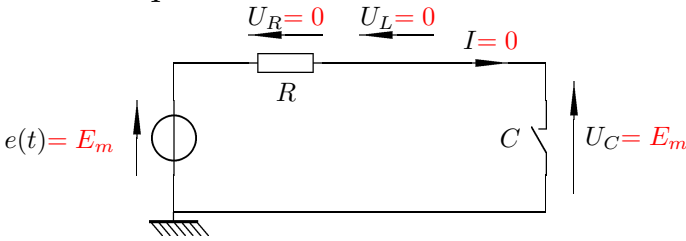
où U_{Cm} et φ_C sont l'amplitude et le déphasage de u_C par rapport à $e(t)$ (dont la phase à l'origine est la référence des phases).

On cherche à déterminer les variations des caractéristiques U_{Cm} et φ_C de $u_C(t)$ quand ω varie.

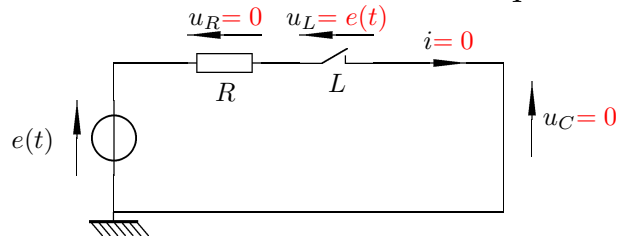


Comportement asymptotique

Basses fréquences



Hautes fréquences

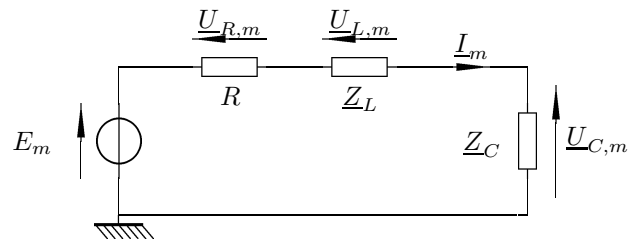
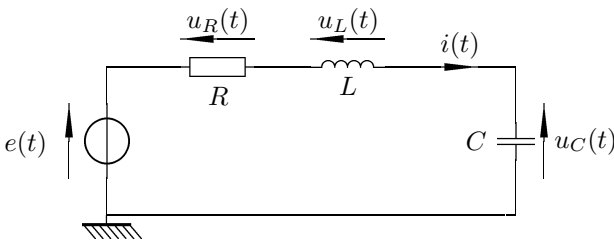


On remarque que $u_C(t)$ tend vers $e(t)$ en “basses fréquences” et devient nulle en “hautes fréquences”.



3.b. Amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur

Après passage en notation complexe,



la formule des diviseurs de tension donne directement :



$$\underline{U_{Cm}} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}} E_m = \frac{E_m}{\underline{Y_C Z_R} + \underline{Y_C Z_L} + 1} = \frac{E_m}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{E_m}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$$

avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$.

Comportement asymptotique :



$$\underline{U_{Cm}} = \frac{E_m}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$$

Basses fréquences : $x \ll 1$

$$1 - x^2 + \frac{jx}{Q} \simeq 1$$

$$\underline{U_{Cm}} \simeq E_m$$

$$\Rightarrow U_{Cm} \simeq E_m \text{ et } \varphi_C \simeq 0$$

$x = 1 \iff \omega = \omega_0$

$$1 - x^2 + \frac{jx}{Q} = \frac{j}{Q}$$

$$\underline{U_{Cm}} \simeq -jQE_m$$

$$\Rightarrow U_{Cm} = QE_m \text{ et } \varphi_C \simeq -\frac{\pi}{2}$$

Hautes fréquences : $x \gg 1$

$$1 - x^2 + \frac{jx}{Q} \simeq -x^2$$

$$\underline{U_{Cm}} = \frac{E_m}{-x^2}$$

$$\Rightarrow U_{Cm} \simeq 0 \text{ et } \varphi_C \simeq \pm\pi$$

3.c. Variation de U_{Cm} en fonction de ω : $U_{Cm}(\omega)$

De $\underline{U_{Cm}}$, en déduit



$$U_{Cm} = |\underline{U_{Cm}}| = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Il y a résonance en tension aux bornes du condensateur si U_{Cm} admet un maximum pour $0 < x < \infty$.

L'expression au numérateur de U_{Cm} étant constante, U_{Cm} est maximale quand son dénominateur est minimum c'est à dire si $(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ admet un minimum.

Il faut donc que la dérivée de cette expression par rapport à x s'annule :

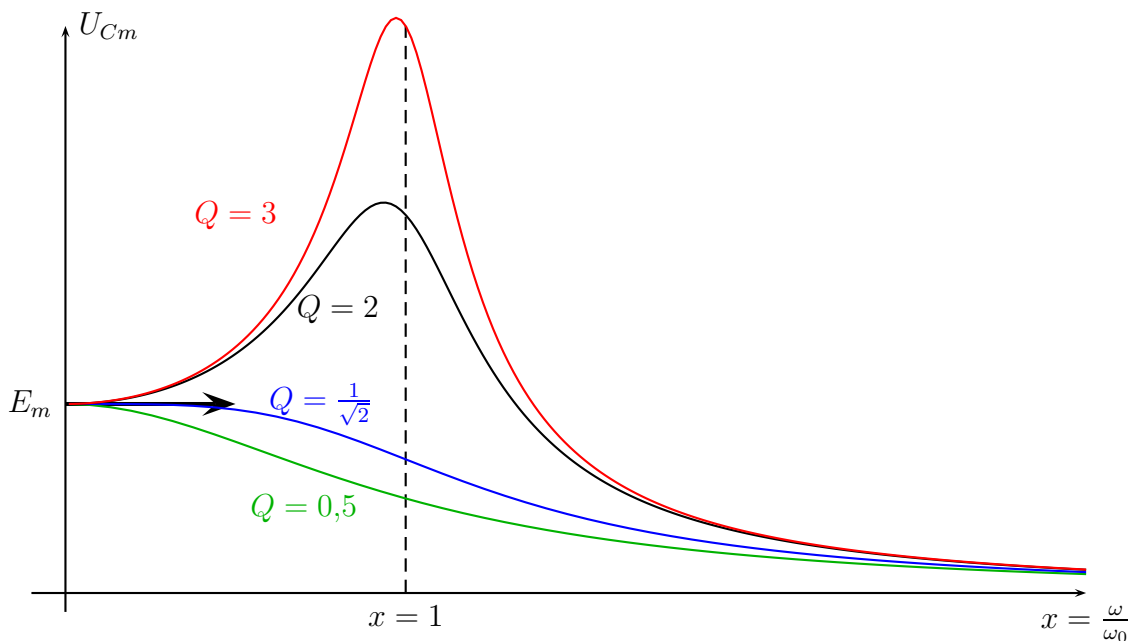
$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right] = 0 \Rightarrow 4x \left[x^2 + \left(\frac{1}{2Q^2} - 1 \right) \right] = 0$$

soit $x = 0$ (tangente à l'origine horizontale), mais aussi $x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$, or, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ étant un réel positif, cette valeur n'est possible que si $1 - \frac{1}{2Q^2} \geq 0$ soit



- Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a pas de résonance en tension aux bornes du condensateur.
- Si $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a une résonance en tension aux bornes de C et à la résonance pour

$$\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0 \Rightarrow U_{Cm}(\max) = \frac{QE_m}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$



Si Q est grand, $\omega_r \rightarrow \omega_0$ et $U_{Cm}(\max) \simeq QE_m$, Q est appelé **facteur de surtension**.

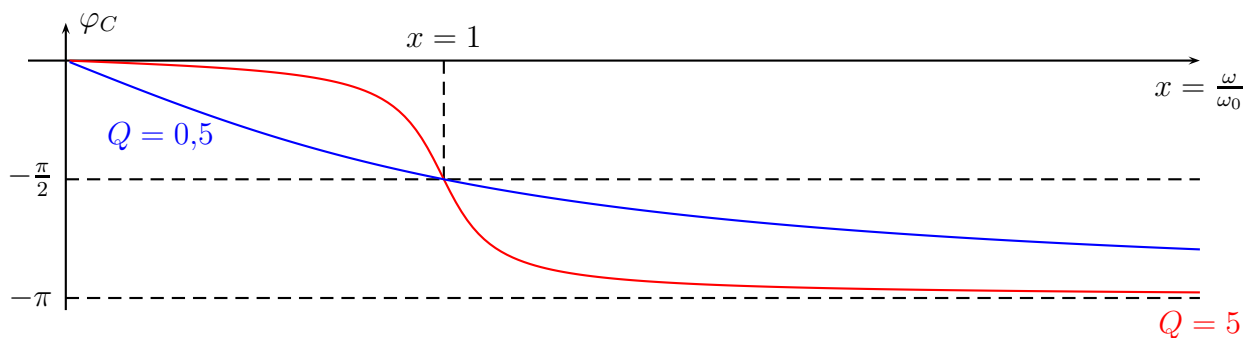
3.d. Variation de φ_C en fonction de ω : $\varphi_C(\omega)$

Il s'agit de l'argument de $\underline{U}_{Cm} = \frac{E_m}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$ dont la partie réelle change de signe ...



$$\underline{U}_{Cm} = \frac{-jE_m}{-j(1 - x^2) - j^2 \frac{x}{Q}} \Rightarrow \varphi_C = -\frac{\pi}{2} - \arg\left[\frac{x}{Q} - j(1 - x^2)\right] \Rightarrow \varphi_C = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left[Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]$$

On trace son allure pour différentes valeurs de Q et en utilisant les valeurs asymptotique et en $x = 1$.



Remarques :

- φ_C est toujours négatif : la tension $u_C(t)$ est toujours en **retard sur $e(t)$** .
- On peut donner l'expression de φ_C en utilisant :
 $U_{Cm} = Z_C \cdot I_m \Rightarrow \varphi_C = \arg(Z_C) + \arg(I_m) = -\frac{\pi}{2} + \varphi_i$: **décalage de $-\frac{\pi}{2}$** . Ou, cf EC05,
 * si $x < 1 \Rightarrow 1 - x^2 > 0 \Rightarrow \varphi_C = -\arctan \frac{x}{Q(1-x^2)}$
 * si $x > 1 \Rightarrow 1 - x^2 < 0 \Rightarrow \varphi_C = -\pi - \arctan \frac{x}{Q(1-x^2)}$

III Oscillateur harmonique mécanique soumis à une excitation sinusoïdale

1. Exemple de mise en équation

Considérons un point matériel M de masse m accroché à un ressort et à un système exciteur : roue en rotation et système de bielle qui assure à A l'extrémité gauche du ressort un mouvement rectiligne sinusoïdal : $x_A = A \cos \omega t$.

- Système $\{M\}$
- Référentiel lié au sol galiléen.
- Forces appliquées :

Le poids \vec{p} et la réaction normale du support \vec{R} , mais $\vec{R} = -\vec{p}$ car pas de déplacement vertical.

La force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x$ avec $l = l_0 - x_A + x$.

Frottement fluide linéaire $\vec{f} = -\alpha \dot{x} \vec{e}_x$.

- Application du PFD :



$$m\ddot{x} = -k(l_0 - x_A + x - l_0) - \alpha \dot{x} \iff \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{kx_A}{m} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 A \cos \omega t \quad (E)$$

en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la pulsation propre de l'oscillateur et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$ avec Q son facteur de qualité.

On peut poser $kx_A = kA \cos \omega t = F_0 \cdot \cos \omega t$ l'expression de la force extérieure excitatrice \vec{F}_e .

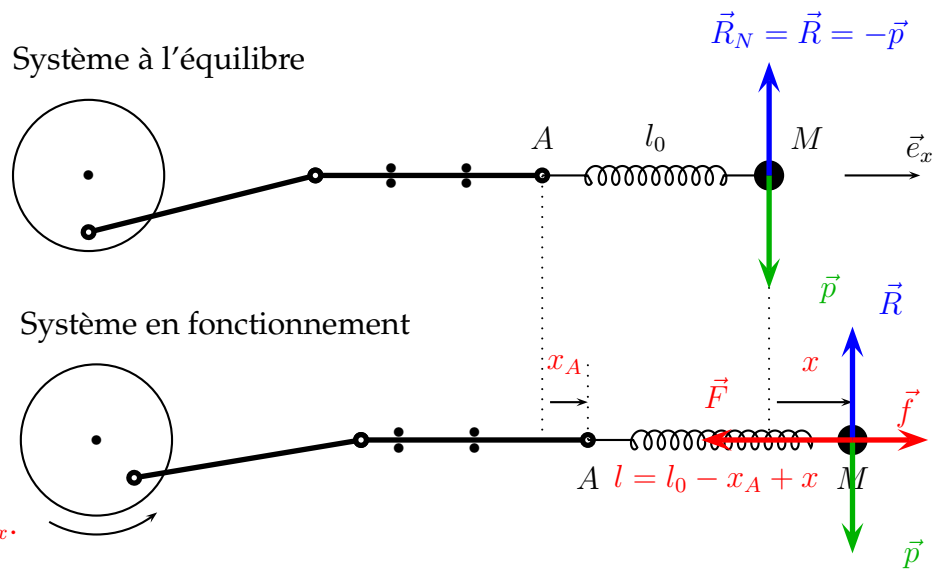


Table des matières

I Lois et Théorèmes de l'électrocinétique en RSF

II Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé, résonances.

1. Caractéristiques du circuit
2. Résonance en intensité
 - 2.a. Position du problème
 - 2.b. Amplitude complexe de l'intensité du courant.
 - 2.c. Variation de I_m en fonction de ω : $I_m(\omega)$
 - 2.d. Variation de φ_i en fonction de ω : $\varphi_i(\omega)$
3. Résonance en tension aux bornes du condensateur ?
 - 3.a. Position du problème et hypothèses
 - 3.b. Amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur
 - 3.c. Variation de U_{C_m} en fonction de ω : $U_{C_m}(\omega)$
 - 3.d. Variation de φ_C en fonction de ω : $\varphi_C(\omega)$

III Oscillateur harmonique mécanique soumis à une excitation sinusoïdale

1. Exemple de mise en équation

Manip : résonance aux bornes d'un RLC

Résonance mécanique avec une masse accrochée à un ressort.