

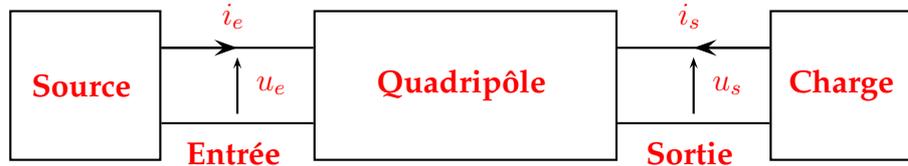
EC₇ Filtres électriques linéaires

PCSI 2024 – 2025

I Généralités

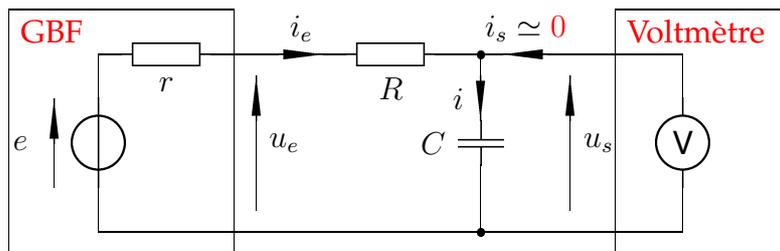
1. Quadripôles

Définition :



C'est un dispositif électrique délimité par **quatre pôles : deux bornes d'entrée et deux de sortie.**

Exemple : quadripôle *RC* avec *C* en sortie ouverte (charge d'impédance quasiment infinie : volt-mètre ou oscillo).



Caractéristiques

- Convention d'algébrisation des tensions et intensités : **cf. dessin.**
- Impédance d'entrée, et impédance de sortie (similaire à ce qu'on a vu pour un oscilloscope ou un générateur réel).
- Un quadripôle est **passif** s'il ne contient aucune source. Sinon, il est **actif**.
- Gain en tension : $G = \frac{U_s}{U_e}$. On peut aussi définir un gain en intensité ou en puissance.

Définition : un quadripôle est linéaire s'il ne comporte que des éléments **linéaires** (*R*, *L*, *C* et sources linéaires).

En conséquence,

- Le signal d'entrée u_e et le signal de sortie u_s sont reliés par une équation **différentielle linéaire à coefficients constants du type :**

$$D_n \frac{d^n u_s(t)}{dt^n} + D_{n-1} \frac{d^{n-1} u_s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + D_0 u_s(t) = N_m \frac{d^m u_e(t)}{dt^m} + \dots + N_0 u_e(t)$$

Le plus grand des entiers n ou m définit **l'ordre du circuit.**

Remarque : en général, ce dernier est inférieur ou égal au nombre de dipôles réactifs (condensateurs ou bobines) qu'il contient.

- Si u_e est sinusoïdal, alors toutes les autres grandeurs le sont également (après le régime transitoire). Par la suite, on notera

$$u_e = U_e \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_e) \Rightarrow \underline{u_e} = \underline{U_e} \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad u_s = U_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_s) \Rightarrow \underline{u_s} = \underline{U_s} \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

- Si aux tensions d'entrée u_{e1} et u_{e2} correspondent les tensions de sortie u_{s1} et u_{s2} , alors, à la tension d'entrée $\alpha u_{e1} + \beta u_{e2}$ (α et β réels), correspond la tension de sortie $\alpha u_{s1} + \beta u_{s2}$.
C'est à dire que si on connaît la réponse d'un filtre pour tout signal sinusoïdal pur, on peut en déduire la réponse à un signal quelconque car ce dernier est décomposable en une somme de signaux sinusoïdaux : **Fourier**.

2. Fonction de transfert en régime sinusoïdal forcé

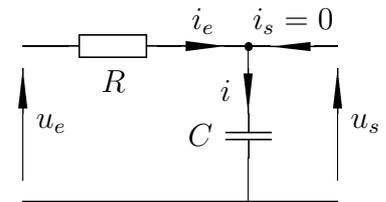
Définition : on définit la fonction de transfert (ou transmittance) par la grandeur complexe :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{U_s} \sqrt{2} e^{j\omega t}}{\underline{U_e} \sqrt{2} e^{j\omega t}} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{U_s}{U_e} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$$

Exemple : quadripôle RC en sortie ouverte $i_e = i$ et on retrouve un pont diviseur de tension :

$$\frac{U_s}{U_e} = \underline{H}(j\omega) = \frac{Z_C}{R + Z_C}$$

avec $Z_C = \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ où $\omega_0 = \frac{1}{RC}$



Relation entre équation différentielle et fonction de transfert : remplaçons u_s et u_e par leurs expressions dans l'équation différentielle en notation complexe qui caractérise le circuit :

$$D_n \frac{d^n u_s(t)}{dt^n} + D_{n-1} \frac{d^{n-1} u_s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + D_0 u_s(t) = N_m \frac{d^m u_e(t)}{dt^m} + \dots + N_0 u_e(t)$$

or, en notation complexe, la dérivée n^{ieme} revient à multiplier par $(j\omega)^n$, il vient donc :

$$\begin{aligned} D_n (j\omega)^n \underline{u_s(t)} + D_{n-1} (j\omega)^{n-1} \underline{u_s(t)} + \dots + D_0 \underline{u_s(t)} &= N_m (j\omega)^m \underline{u_e(t)} + \dots + N_0 \underline{u_e(t)} \\ \Rightarrow \frac{\underline{u_s(t)}}{\underline{u_e(t)}} = \underline{H}(j\omega) &= \frac{N_0 + j\omega N_1 + \dots + (j\omega)^m N_m}{D_0 + j\omega D_1 + \dots + (j\omega)^n D_n} = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)} \end{aligned}$$

Remarque : on pose parfois (en SI) $j\omega = p$, la variable de Laplace. La fonction de transfert s'écrit alors de façon générale :

$$\underline{H}(p) = \frac{N_0 + pN_1 + \dots + p^m N_m}{D_0 + pD_1 + \dots + p^n D_n} = \frac{\sum_{k=0}^m N_k p^k}{\sum_{k=0}^n D_k p^k}$$

Définitions : Gain en tension et déphasage : Si on écrit $\underline{H}(j\omega)$ sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

- $G(\omega)$ est le **module de $\underline{H}(j\omega)$**

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{|U_s|}{|U_e|} = \frac{U_s}{U_e} \quad \text{est le gain en tension.}$$

- $\varphi(\omega)$ est l'**argument de $\underline{H}(j\omega)$**

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg\left(\frac{U_s}{U_e}\right) = \varphi_s - \varphi_e \quad \text{est l'avance de phase algébrique de } u_s \text{ sur } u_e$$

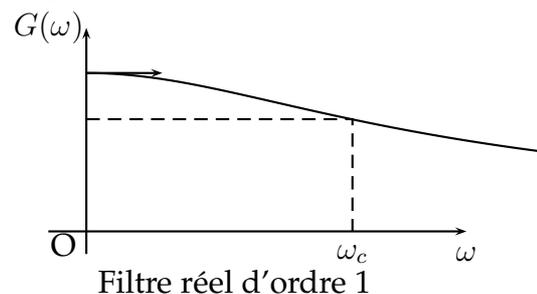
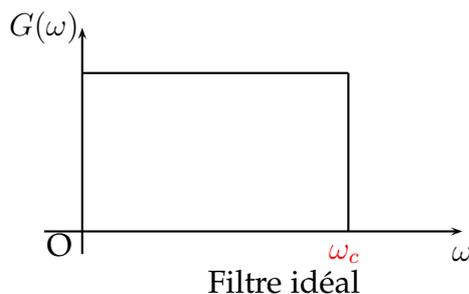
3. Filtres électriques linéaires

3.a. Définition

Définition : Un filtre électrique linéaire est un quadripôle linéaire qui permet de transmettre sélectivement certaines fréquences. On parle de **bande passante** (intervalle des fréquences telles que $G \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$) et de bande **coupée**.

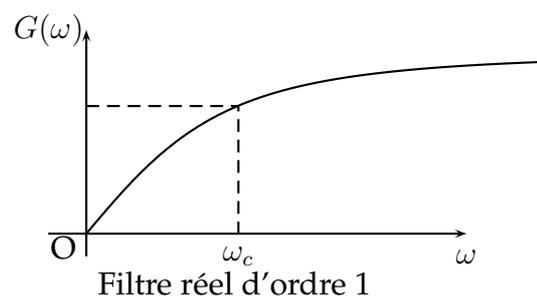
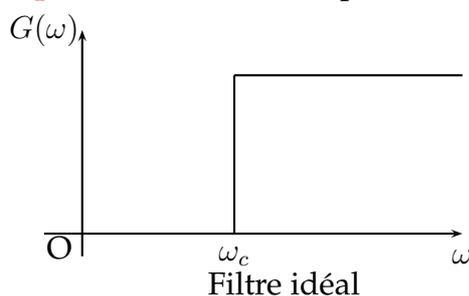
3.b. Principaux types de filtres linéaires : Cf. TP

Filtres passe bas : bande passante $[0; \omega_c]$ où ω_c est la pulsation de coupure.

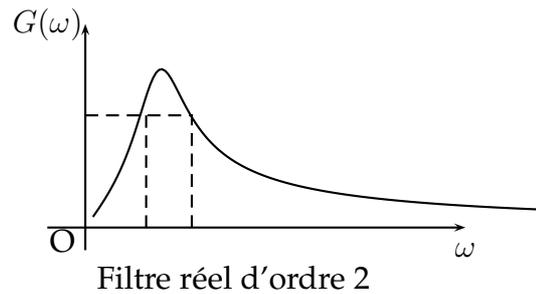
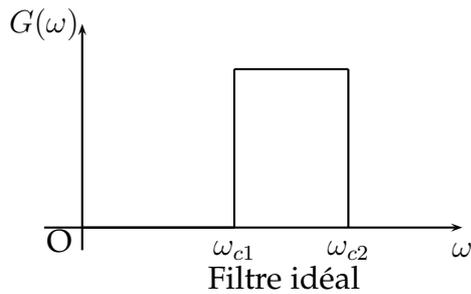


On tend vers un filtre idéal en \uparrow l'ordre du filtre (mais plus de composants \rightarrow plus coûteux et moins robuste).

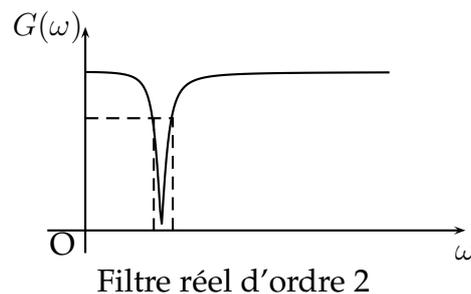
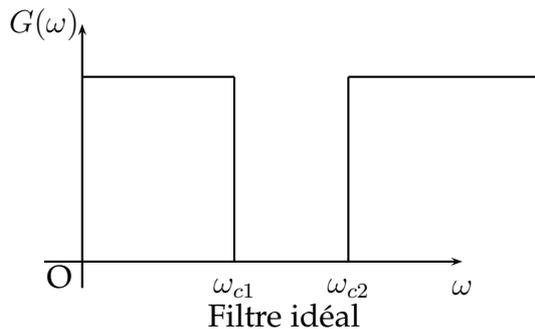
Filtres passe haut : bande passante $[\omega_c; +\infty[$.



Filtres passe bande : bande passante $[\omega_{c1}; \omega_{c2}]$ avec ω_{c1} et ω_{c2} les pulsations de coupure.



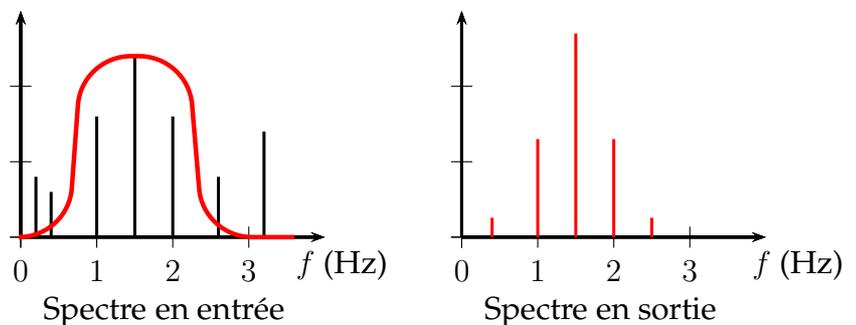
Filtres réjecteur de bande (coupe-bande) : $[\omega_{c1}; \omega_{c2}]$ est la bande coupée.



Filtres déphaseur : garde G constant mais il produit un déphasage entre u_s et u_e .

3.c. Action d'un filtre sur un signal

Pour comprendre comment un filtre agit sur un signal complexe, on peut établir l'équation différentielle reliant u_e et u_s puis chercher une solution particulière. Ce n'est pas forcément facile.



On peut aussi :

1. décomposer le signal en somme de cosinus (**analyse spectrale**)
2. on sait comment le filtre se comporte pour chaque cosinus, chaque fréquence : il suffit de **faire une multiplication** pour obtenir les amplitudes en sortie
3. on re-somme les cosinus en sortie pour former le signal de sortie complet (synthèse spectrale)

Ainsi, l'intérêt de la décomposition spectrale et de la méthode des complexes est de remplacer une équation différentielle par **une multiplication**. La difficulté est « reportée » sur l'analyse spectrale et la synthèse spectrale, mais de nombreux outils expérimentaux ou numériques permettent de faire cela (cf TP et TP-info).

3.d. Exemple sur un signal

Par exemple si on considère un signal $e(t) = U_1 \cos(\omega_1 t) + U_2 \sin(\omega_2 t) + U_3 \cos(\omega_3 t)$ avec $U_1 = 2 \text{ V}$; $U_2 = 5 \text{ V}$; $U_3 = 0,1 \text{ V}$; $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$; $\omega_2 = 10\,000 \text{ rad/s}$; $\omega_3 = 100 \text{ rad/s}$; en entrée d'un filtre de fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{G_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

où $x = \omega/\omega_0$ avec $\omega_0 = 100$; $Q = 1500$ et $G_0 = 20$.

Donner l'expression du signal de sortie et faire les applications numériques pour les différentes amplitudes et phases.

$$s(t) = |\underline{H}(j\omega_1)|U_1 \cos(\omega_1 t + \arg(\underline{H}(j\omega_1))) + \dots$$

$$s(t) = S_1 \cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + S_2 \sin\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{2}\right) + S_3 \cos(\omega_3 t)$$

$$S_1, S_2, S_3 = [2,69 \times 10^{-3}; 6,67 \times 10^{-4}; 2,0] \text{ V}$$

3.e. Filtres réels : diagrammes de Bode

Gain en décibel G_{dB} : Le gain en tension $G = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{U_s}{U_e}$ peut varier dans un très large domaine.

Définition : on définit le gain en décibels (dB) ou gain du filtre par la relation :

$$G_{dB} = 20 \log G(\omega) = 20 \log(|\underline{H}(j\omega)|)$$

Bande passante à -3 dB : soit $G(\text{max})$ le gain maximal en tension du filtre.

Les pulsations de coupure $\omega_c = 2\pi f_c$ sont les pulsations pour lesquelles

$$G = \frac{G(\text{max})}{\sqrt{2}} \iff G_{dB} = 20 \log G = 20 \log \frac{G(\text{max})}{\sqrt{2}} = 20 \log G(\text{max}) - 20 \log \sqrt{2}$$

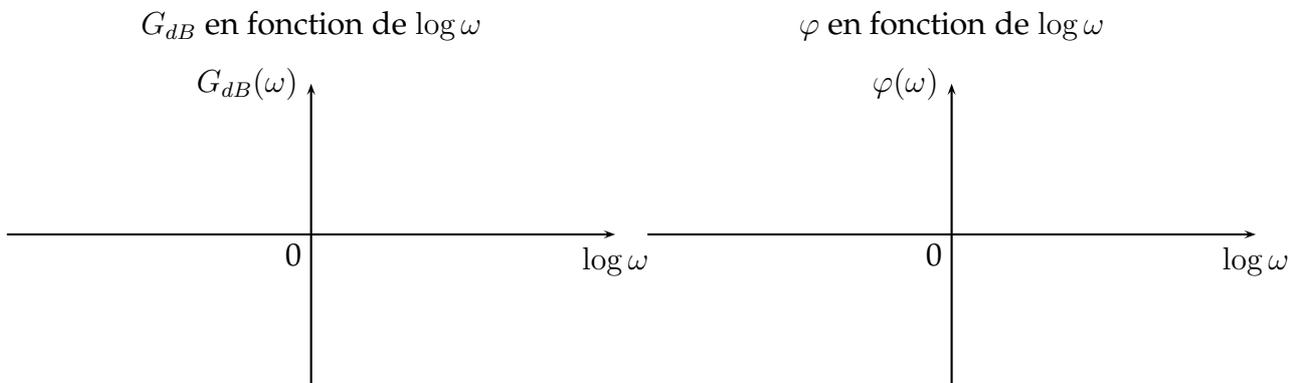
$$\Rightarrow \omega = \omega_c \iff G_{dB} = G_{dB}(\text{max}) - 3 \text{ dB} \quad \text{c'est le gain en dB maximum } -3 \text{ dB.}$$

Définition : diagrammes de Bode d'un filtre : c'est la représentation de sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$: **deux courbes.**

Afin de visualiser les variations de $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ sur un grand domaine de fréquence, on trace ces fonctions en fonction de $\log \omega$.

Courbe de réponse en Gain :

Courbe de réponse en phase :



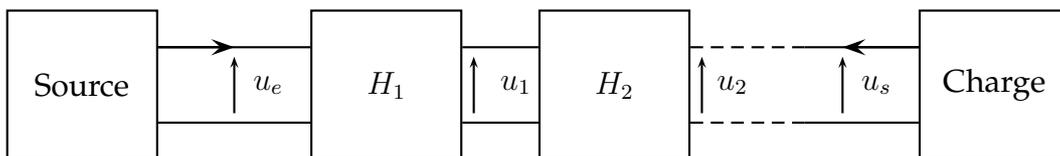
Échelle logarithmique

Échelle semi-logarithmique

Avantages :

- Grande lisibilité pour une plage de fréquences très vaste.
- Tracé asymptotique très facile et fiable (voir plus loin).

4. Filtres en cascade, impédance d'entrée et de sortie

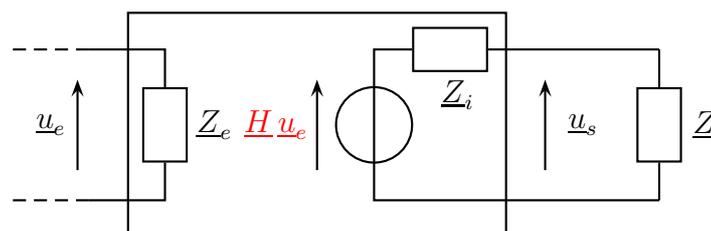


Dans le cas où l'on branche des filtres en cascade, on cherche la fonction de transfert équivalente à nos différents filtres. On a naturellement envie de dire :

$$u_1 = H_1 u_e ; u_2 = H_2 u_1 = H_1 H_2 u_e ; u_s = H_n \times \dots \times H_1 H_2 u_e \Rightarrow H_{eq} = H_1 H_2 \dots H_n$$

Mais cela n'est vrai que si l'on a bien $u_1 = H_1 u_e$ et $u_2 = H_2 u_1$ etc... Mais ces relations ont été établies **pour un courant de sortie nul!** Ce qui n'est pas forcément le cas lorsque l'on branche une charge à la sortie du filtre.

Impédance d'entrée et de sortie



De même que pour le générateur et l'oscilloscope, on utilise un modèle linéaire équivalent au quadripôle avec **une impédance d'entrée Z_e** (comme pour l'oscilloscope réel) et **une impédance de sortie Z_i** (comme pour le générateur réel).

Rôle de l'impédance de sortie : Lorsque l'on a défini les fonctions de transfert, le courant de sortie était nul, donc **il n'y a pas de chute de tension** aux bornes de Z_i et $u_s = H u_e = E$ la force électromotrice du générateur idéal du modèle (qui dépend de ω et de u_e). Dans le cas où l'on a branché une charge, la formule des ponts diviseurs de tensions nous donne

$$u_s = \frac{Z}{Z + Z_i} \times H u_e = \frac{1}{1 + \frac{Z_i}{Z}} H u_e$$

Pour pouvoir considérer que $u_s \simeq H u_e$ même lorsque l'on branche une charge, il faut donc que $|Z_i| \ll |Z|$. On parle de **faible impédance de sortie**.

Rôle de l'impédance d'entrée : L'impédance d'entrée, elle, peut modifier **le comportement du circuit en amont**. Du point de vue du circuit amont, l'impédance d'entrée du filtre est la charge ! Il faut donc que l'impédance de sortie du circuit amont soit faible (en module) par rapport à l'impédance d'entrée du filtre. On parle de **forte impédance d'entrée**.

Mise en cascade de circuits : Lorsque l'on combine plusieurs étages de filtres de tension en cascade pour former un circuit complexe, on souhaite en général pouvoir considérer que le comportement de chaque « sous-circuit » est le même qu'en sortie ouverte. Il est donc intéressant que **l'impédance de sortie d'un étage soit faible devant l'impédance d'entrée de l'étage suivant**

II Réalisation de quelques fonctions particulières

Il arrive fréquemment, notamment pour des asservissements, que l'on souhaite obtenir **la valeur moyenne d'un signal, sa dérivé ou sa primitive**.

1. Filtre « moyeneur »

Si on met un signal $e(t) = u_0 + u_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + u_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots$ en entrée d'un filtre, alors un filtre moyeneur est un filtre tel que la sortie vaut environ $s(t) \simeq u_0$.

Ainsi, le filtre doit :

- « laisser passer » le continu $\omega = 0$
- « couper le mieux possible » toutes les autres fréquences du signal

Filtre moyeneur : Pour qu'un filtre agisse comme un moyeneur, il suffit que **ce soit un filtre passe bas de fréquence de coupure très inférieure à la plus basse fréquence du signal et de gain 1 pour $\omega = 0$**

Puisque le filtre est un passe-bas de gain statique 1, alors la composante u_0 du signal d'entrée n'est pas modifiée. Puisque c'est un passe-bas de fréquence de coupure très basse par rapport à toutes les fréquences du signal alors toutes les autres composantes sont fortement atténuées (« coupées »).

2. Filtre « dérivateur »

Nous avons vu qu'en complexe, dériver un signal revient à le multiplier par $j\omega$. Toutefois, pour des raisons **d'homogénéité**, $j\omega$ n'est pas une fonction de transfert valide.

Un filtre dérivateur est donc un filtre dont la fonction de transfert est $\underline{H} = j\frac{\omega}{\omega_0}$.

Exercice : en déduire les diagrammes de Bodes d'un tel filtre.

+20db/dec +-pi/2 (car éventuellement -1*)

Filtre dérivateur : Pour qu'un filtre agisse comme un dérivateur, il faut que sa fonction de transfert soit équivalente à $j\frac{\omega}{\omega_0}$. Cela correspond à une pente de $+20\text{ dB/dec}$ et à un déphasage de $\pm\frac{\pi}{2}$.

Remarque : Dans la pratique, aucun filtre ne se comporte comme un dérivateur sur tout le spectre, il s'agit donc de **comportement limite/asymptotique de filtre réel**.

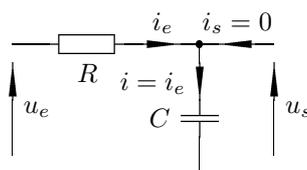
3. Filtre « intégrateur »

Filtre intégrateur : De même, pour qu'un filtre agisse comme un intégrateur, il faut que sa fonction de transfert soit équivalente à $\frac{1}{j\omega}$. Cela correspond à une pente de -20 dB/dec et à un déphasage de $\pm\frac{\pi}{2}$.

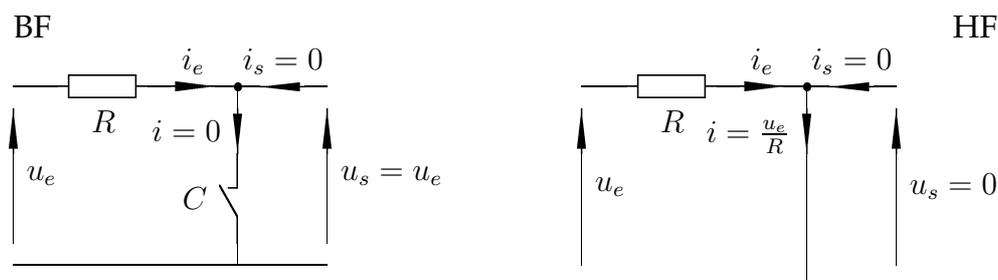
III Exemples de filtres du premier ordre

1. Filtre passe bas du premier ordre : exemple du quadripôle RC.

1.a. Montage



1.b. Comportement asymptotique



Il s'agit d'un filtre passe bas.

1.c. Fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} = RC\omega$$

La fonction de transfert d'un filtre passe bas du premier ordre peut toujours se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{G_0}{1 + jx} \quad \text{Forme canonique}$$

avec :

- $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite (sans dimension).
- G_0 le gain statique ($x = 0$) qui est ici la valeur maximale de G (égale à 1).

1.d. Pulsation de coupure ω_c

$$G(x_c) = \frac{G(\max)}{\sqrt{2}} = \frac{G_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + x_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_c = 1 \Rightarrow \omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

1.e. Diagrammes de Bode

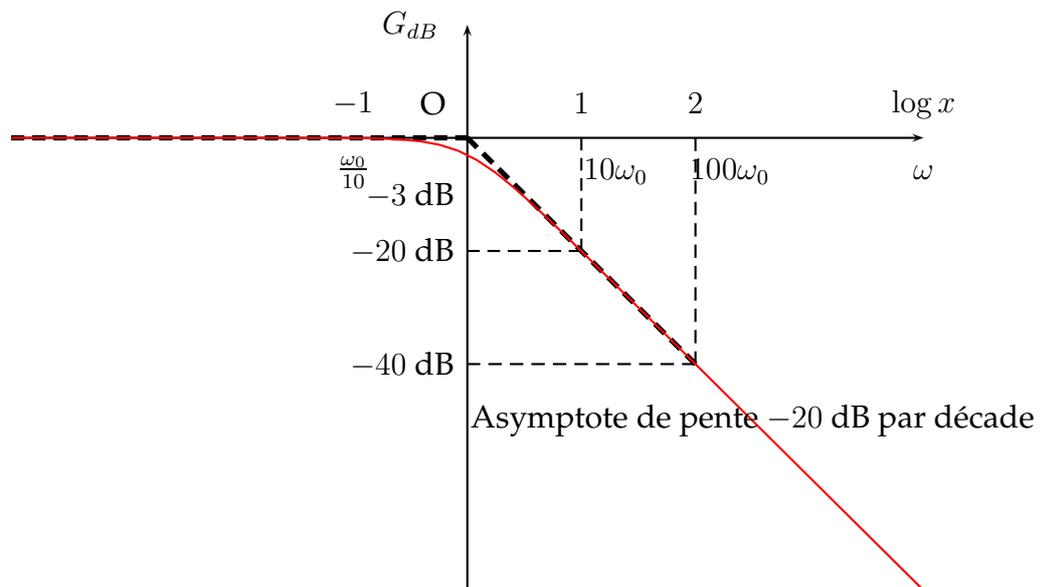
Réponse en gain :

$$G_{dB} = 20 \log G = 20 \log \frac{G_0}{\sqrt{1 + x^2}} = 20 \log G_0 - 10 \log(1 + x^2)$$

Diagramme asymptotique :

- Asymptote basses fréquences :
Quand $\omega \ll \omega_0$, ($\omega < \frac{\omega_0}{10} \iff \log x < -1$) $x \rightarrow 0$, $\log x \rightarrow -\infty$ et $G_{dB} \rightarrow 20 \log G_0$: droite horizontale.
- Asymptote hautes fréquences :
Quand $\omega \gg \omega_0$, ($\omega > \frac{\omega_0}{10} \iff \log x > 1$) $x \rightarrow \infty$, $\log x \rightarrow \infty$ et $1 + x^2 \rightarrow x^2$ soit $G_{dB} = 20 \log G_0 - 10 \log(1 + x^2) \rightarrow 20 \log G_0 - 10 \log x^2 = 20 \log G_0 - 20 \log x$: droite de pente -20 dB/décade qui passe par $20 \log G_0$.

Une décade est l'intervalle de fréquence compris entre une fréquence f et $10f$: si on multiplie la fréquence par 10, le gain en dB chute de 20 dB.



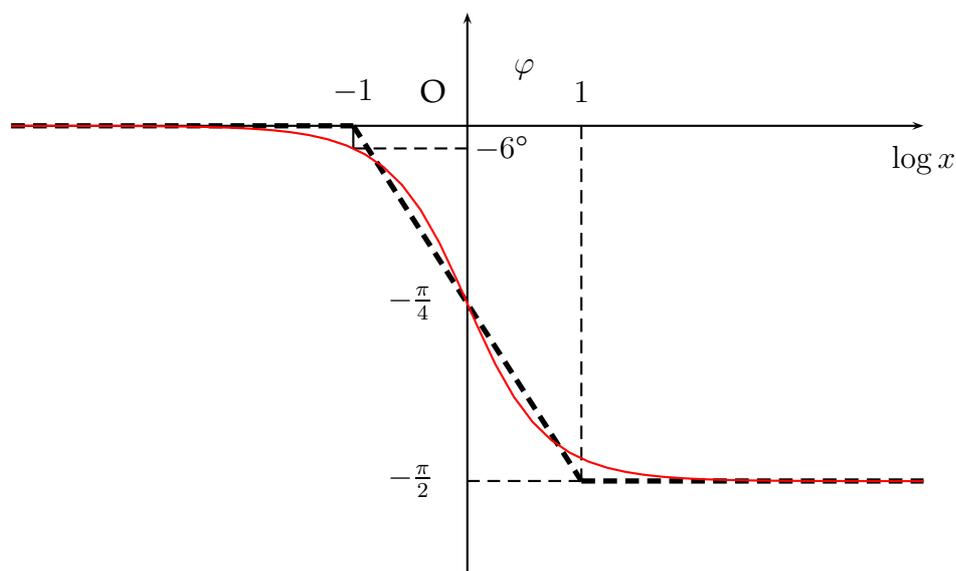
L'écart maximum entre les asymptotes et la courbe réelle est de -3 dB, il est atteint en $x = 1$ on a pris $G_0 = 1$ ici.

Réponse en phase :

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg \frac{G_0}{1 + jx} = \arg G_0 - \arg(1 + jx) \Rightarrow \tan \varphi = -x \quad \text{si } G_0 > 0.$$

Diagramme asymptotique :

- Asymptote basses fréquences :
Quand $\omega \ll \omega_0, x \rightarrow 0, \log x \rightarrow -\infty, \underline{H} \rightarrow G_0 > 0$ et $\varphi \rightarrow 0$: droite horizontale.
- Asymptote hautes fréquences :
Quand $\omega \gg \omega_0, x \rightarrow \infty, \log x \rightarrow \infty, \underline{H} \rightarrow -jG_0$ et $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$: droite horizontale.
- Pour $\omega = \omega_0, x = 1, \log x = 0$ et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ → on complète par une droite.



L'écart maximum entre les asymptotes et la courbe réelle est $|\Delta\varphi| < 6^\circ$.

1.f. Caractère intégrateur du filtre

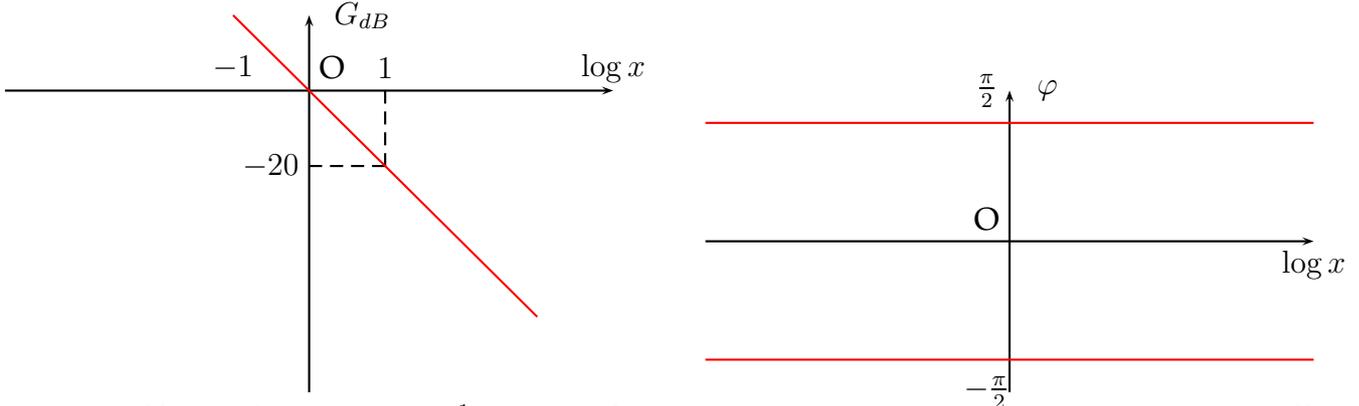
Un filtre électrique se comporte en intégrateur si $u_s(t) = \pm\omega_0 \int u_e(t)dt$ (inverseur si $-$), avec ω_0 une constante. En régime sinusoïdal, cela revient à $\underline{u}_s = \pm\omega_0 \frac{1}{j\omega} \underline{u}_e$ soit une fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \pm \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}} = \pm \frac{1}{jx} \quad \text{avec } x \text{ la pulsation réduite } x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Un intégrateur est donc caractérisé par :

- Un gain $G_{dB} = 20 \log \frac{1}{x} = -20 \log x$ droite de -20 dB par décade.
- Une phase $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

D'où le diagramme de Bode :

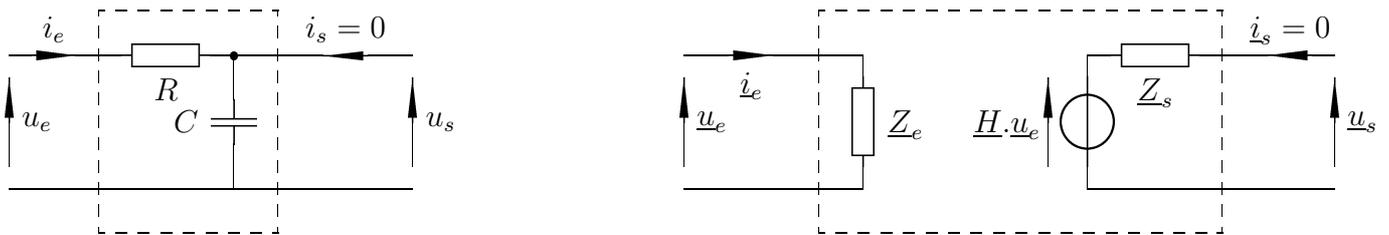


Pour notre filtre RC, $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+jx}$ Nous obtenons ces caractéristiques pour $x \gg 1$, en effet, $1 + jx \simeq jx$ et $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{1}{jx}$.

On vérifiera en TP que ce circuit devient intégrateur si $\omega > 10\omega_0$ (Cf. TP).

1.g. Modélisation

On peut modéliser le quadripôle précédent par :



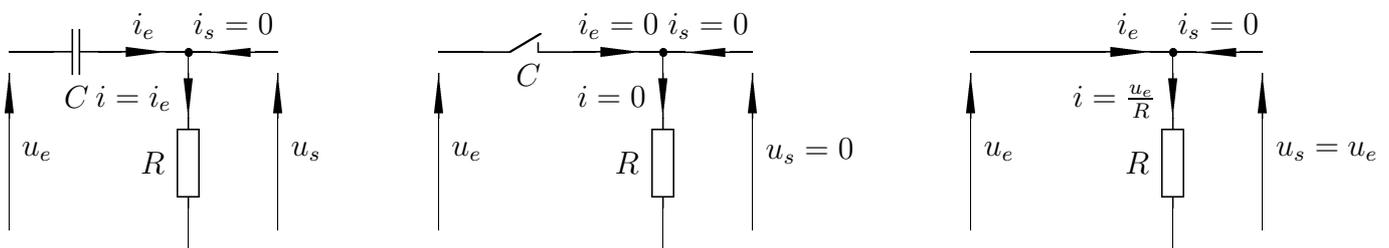
On obtient ici $Z_e = R + \frac{1}{jC\omega}$ car $i_s = 0$ et $\underline{u}_s = \underline{H} \cdot \underline{u}_e + \underline{Z}_s \cdot \underline{i}_s = \underline{H} \cdot \underline{u}_e$ si $i_s = 0$.

La source de tension $\underline{H} \cdot \underline{u}_e$ est liée à \underline{u}_e : on parle d'une source de tension commandée en tension.

2. Filtre passe haut du premier ordre.

2.a. Montage et comportement asymptotique

Il suffira de permuter R et C dans le montage précédent :



Circuit BF HF

- Pour $\omega \rightarrow 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, $i = 0$ et $U_s = Ri = 0$.
- Pour $\omega \rightarrow \infty$, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé et $U_s = U_e$.

Il s'agit d'un filtre passe haut.

2.b. Fonction de transfert

$i_e = i$ et on retrouve un pont diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + \underline{Z}_C} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{jx}{1 + jx} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

La fonction de transfert d'un filtre passe bas du premier ordre peut toujours se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jxG_0}{1 + jx} \quad \text{Forme canonique}$$

avec :

- $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite (sans dimension).
- G_0 la valeur maximale de G , atteint quand $x \gg 1$

2.c. Fréquence de coupure :

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \left| \frac{jx}{1 + jx} \right| = \frac{|jx|}{|1 + jx|} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

et $x_c = \frac{\omega_c}{\omega_0}$ est telle que

$$G(x_c) = \frac{G(\max)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{x_c}{\sqrt{1 + x_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_c = 1 \Rightarrow \omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

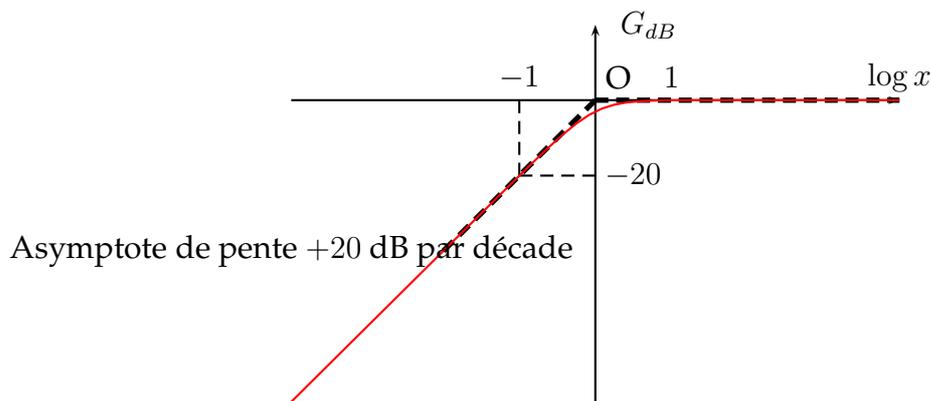
2.d. Diagrammes de Bode :

Réponse en gain

$$G_{dB} = 20 \log G = 20 \log \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = 20 \log x - 10 \log(1 + x^2)$$

Diagramme asymptotique :

- Asymptote basses fréquences : Quand $\omega \ll \omega_0$, $x \rightarrow 0$, $\log x \rightarrow -\infty$ et $G_{dB} \rightarrow 20 \log x - 20 \log 1 = 20 \log x$: droite de pente + 20 dB/décade.
- Asymptote hautes fréquences : Quand $\omega \gg \omega_0$, $x \rightarrow \infty$, $\log x \rightarrow \infty$ et $1 + x^2 \rightarrow x^2$ soit $G_{dB} = 20 \log x - 10 \log(1 + x^2) \rightarrow 20 \log x - 10 \log x^2 = 0$: droite horizontale.

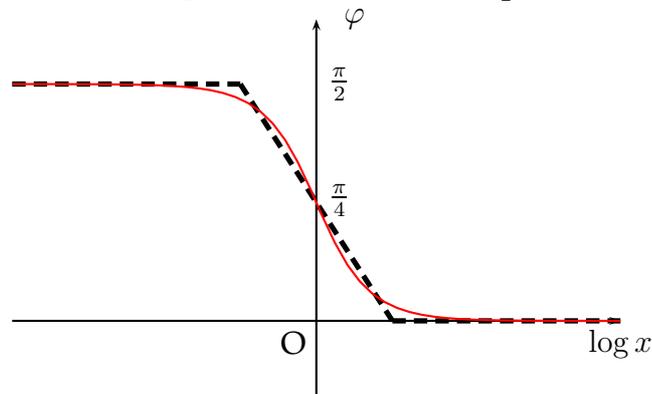


L'écart maximum entre les asymptotes et la courbe réelle est de -3 dB, il est atteint en $x = 1$.

Réponse en phase

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg \frac{jx}{1 + jx} = \arg jx - \arg(1 + jx) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

soit la même courbe que plus haut, simplement translaturée de $\frac{\pi}{2}$.



2.e. Caractère dérivateur du filtre

Un filtre électrique se comporte en dérivateur si $u_s(t) = \pm \frac{1}{\omega_0} \frac{du_e(t)}{dt}$, avec ω_0 une constante. En régime sinusoïdal, cela revient à $\underline{u}_s = \pm \frac{1}{\omega_0} j\omega \underline{u}_e$ soit une fonction de transfert

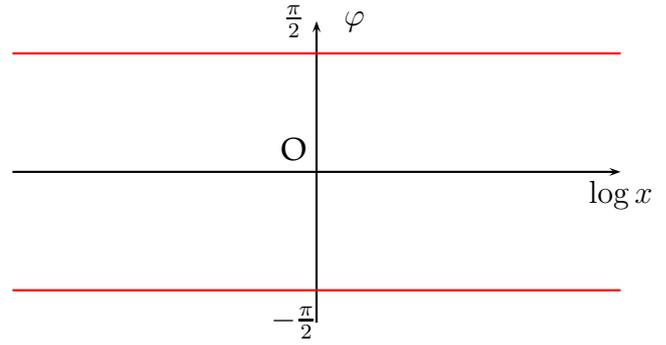
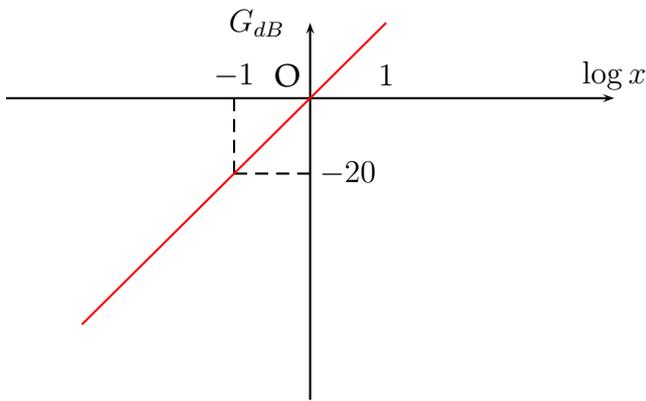
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \pm j \frac{\omega}{\omega_0} = \pm jx$$

avec x la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Un dérivateur est donc caractérisé par :

- Un gain $G_{dB} = 20 \log x$: droite de $+20$ dB par décade.
- Une phase $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

D'où le diagramme de Bode :



Pour notre filtre RC,

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jx}{1 + jx}$$

Nous obtenons ces caractéristiques pour $x \ll 1$, en effet, $1 + jx \simeq 1$ et $\underline{H}(j\omega) \simeq jx$.

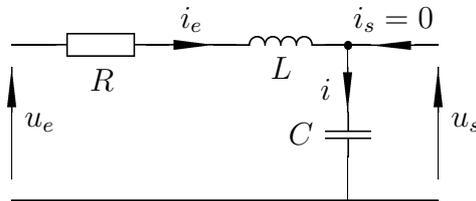
On vérifiera en TP que ce circuit devient dérivateur si $\omega < \frac{\omega_0}{10}$.

IV Exemples de filtres du deuxième ordre

1. Filtre passe bas d'ordre deux

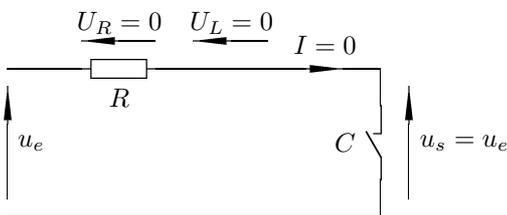
1.a. Montage

Circuit RLC avec C en sortie ouverte.

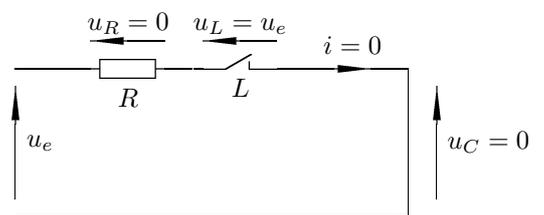


1.b. Comportement asymptotique

Basses fréquences



Hautes fréquences



Conclusion : il s'agit bien d'un filtre passe bas.

1.c. Fonction de transfert

La sortie étant ouverte, on retrouve un pont diviseur de tension.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{Z_C}{Z} = \frac{1}{RC\omega j - LC\omega^2 + 1}$$

En utilisant les mêmes changements de variables que dans le chapitre sur les régimes transitoires :

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre du circuit.
- $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ le facteur de qualité.
- $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite.

On obtient $\underline{H}(j\omega)$ sous la forme canonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{G_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad (\text{ici, } G_0 = 1)$$

1.d. Diagramme de Bode

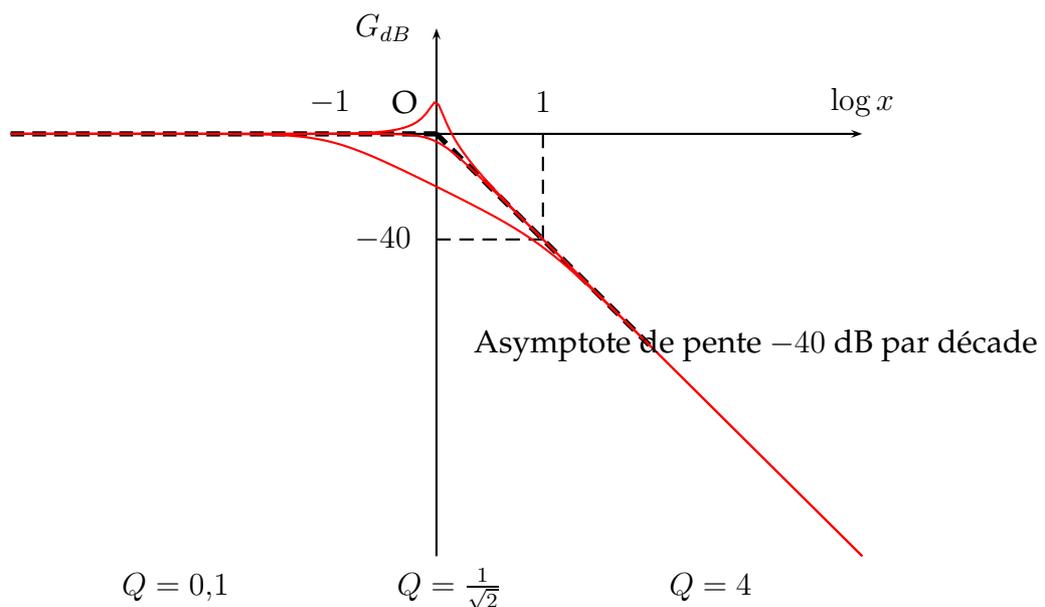
Réponse en gain :

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \log G(\omega) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} = -10 \log[(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}]$$

- Asymptote en basses fréquences :
 $\omega \rightarrow 0, x \rightarrow 0$ et $\log x \rightarrow -\infty$
 $G_{dB} = -10 \log((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}) \simeq -10 \log 1 = 0$: asymptote horizontale.
- Asymptote en hautes fréquences :
 $\omega \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty$ et $\log x \rightarrow \infty$ et $(1 - x^2)^2 \simeq x^4 \gg \frac{x^2}{Q^2}$ d'où
 $G_{dB} = -10 \log((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}) \simeq -10 \log x^4 = -40 \log x$: droite de pente -40 dB par décade (on se rapproche du filtre idéal).
- Pour $x = 1$ soit $\omega = \omega_0, G_{dB} = -10 \log((1 - 1^2)^2 + \frac{1^2}{Q^2}) = -10 \log \frac{1}{Q^2} = 20 \log Q$
 L'écart entre la courbe asymptotique et la courbe réelle augmente quand Q s'éloigne de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Remarques :

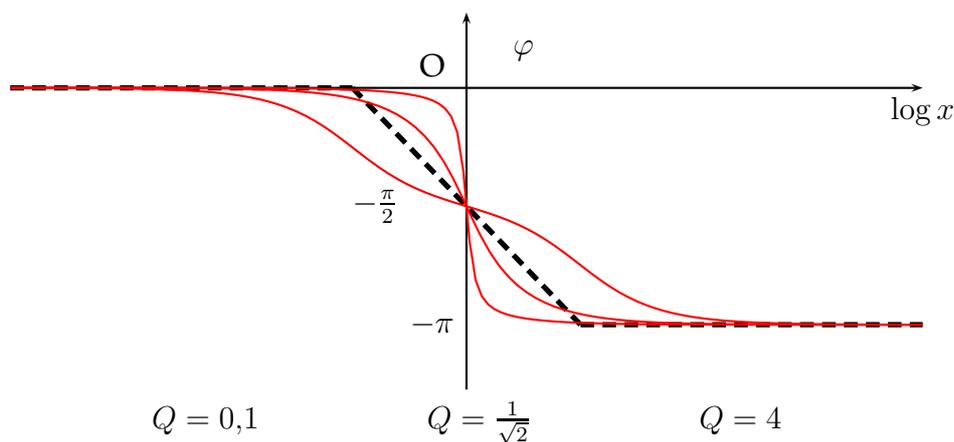
- On retrouve la résonance en tension aux bornes du condensateur si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Cf. chap EC₅), c'est pourquoi Q est appelé aussi facteur de surtension.
- pour un bon passe bas, il faut que G soit constant avant ω_c la pulsation de coupure, on aura donc intérêt à prendre $Q \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Réponse en phase

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}\right) = \arg\left(\frac{-j}{-j(1 - x^2) + \frac{x}{Q}}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan Q\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Diagramme asymptotique :

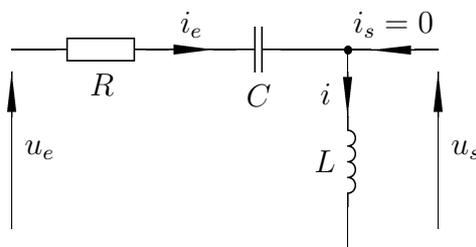
- Asymptote basses fréquences :
Quand $x \rightarrow 0$, $\log x \rightarrow -\infty$, $\underline{H} \rightarrow 1$, d'où $\varphi \rightarrow 0$: droite horizontale.
- Pour $\omega = \omega_0$, $x = 1$, $\log x = 0$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.
- Asymptote hautes fréquences :
Quand $x \rightarrow \infty$, $\log x \rightarrow \infty$ et $\underline{H} \rightarrow -\frac{1}{x^2} < 0$ d'où $\varphi \rightarrow -\pi$: droite horizontale.



2. Filtre passe haut d'ordre deux.

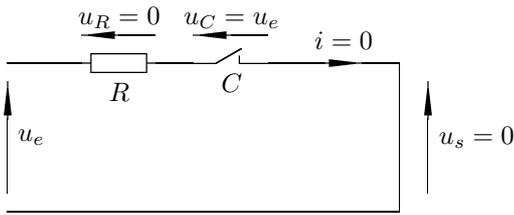
2.a. Montage

Circuit RLC avec L en sortie ouverte.

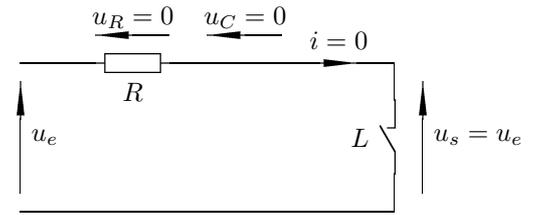


2.b. Comportement asymptotique

Basses fréquences



Hautes fréquences



Conclusion : il s'agit bien d'un filtre passe haut.

2.c. Fonction de transfert

La sortie étant ouverte, on retrouve un pont diviseur de tension.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{Z_L}{Z} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{LC(j\omega)^2}{RC\omega j - LC\omega^2 + 1} = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

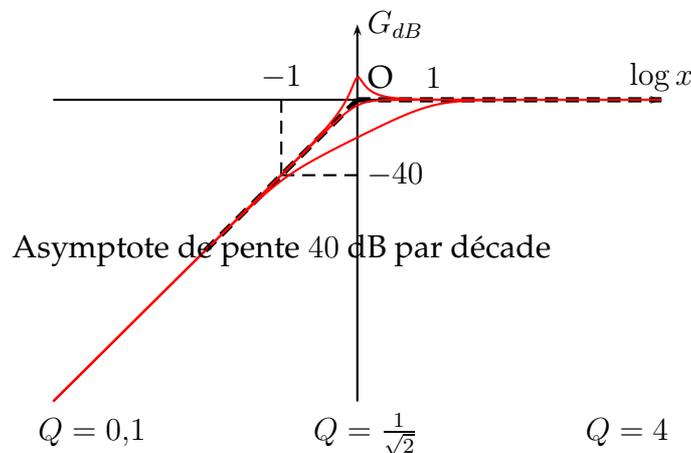
2.d. Diagramme de Bode

Réponse en gain

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Gain en décibels : $G_{dB} = 20 \log G(\omega) = 20 \log \frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} = 40 \log x - 10 \log((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2})$.

- Asymptote en basses fréquences : $\omega \rightarrow 0, x \rightarrow 0$ et $\log x \rightarrow -\infty$ $G_{dB} = 40 \log x - 10 \log((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}) \simeq 40 \log x - 10 \log 1 = 0$: droite de pente 40 dB par décade.
- Asymptote en hautes fréquences : $\omega \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty$ et $\log x \rightarrow \infty$ $(1 - x^2)^2 \simeq x^4 \gg \frac{x^2}{Q^2}$ d'où $G_{dB} = 40 \log x - 10 \log((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}) \simeq 40 \log x - 10 \log x^4 = 0$: asymptote horizontale.
- Pour $x = 1$ soit $\omega = \omega_0, G_{dB} = 40 \log 1 - 10 \log((1 - 1^2)^2 + \frac{1^2}{Q^2}) = -10 \log \frac{1}{Q^2} = 20 \log Q$
L'écart entre la courbe asymptotique et la courbe réelle augmente quand Q augmente.



Remarques :

- La courbe du passe haut est la symétrique de celle du passe bas par rapport à l'axe vertical.
- On a une résonance en tension aux bornes de la bobine si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- Pour un bon passe haut, il faut que G soit constant après ω_c la pulsation de coupure, on aura donc intérêt à prendre $Q \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

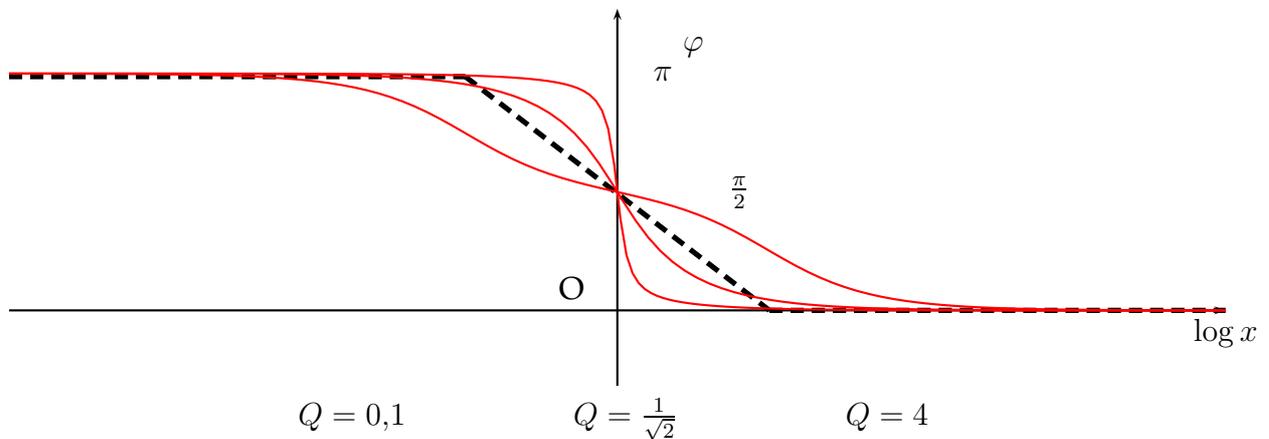
Réponse en phase

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg\left(\frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}\right) = \arg\left(\frac{jx^2}{-j(1 - x^2) + \frac{x}{Q}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan Q\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

On remarque que $\varphi_{PH} = \pi + \varphi_{PB}$, on déduit donc la courbe du passe haut de celle du passe bas en ajoutant simplement π .

Diagramme asymptotique :

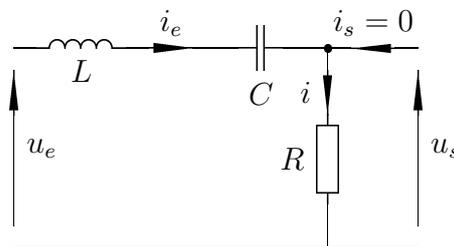
- Asymptote basses fréquences : $x \rightarrow 0, \log x \rightarrow -\infty, \underline{H} \rightarrow -x^2$ et $\varphi \rightarrow \pi$: droite horizontale.
- Pour $\omega = \omega_0, x = 1, \log x = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
- Asymptote hautes fréquences, $x \rightarrow \infty, \log x \rightarrow \infty, \underline{H} \rightarrow 1$ et $\varphi \rightarrow 0$: droite horizontale.



3. Filtre passe bande d'ordre deux

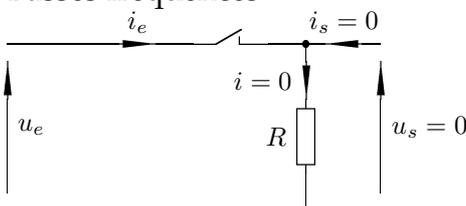
3.a. Montage

Circuit *RLC* avec R en sortie ouverte.

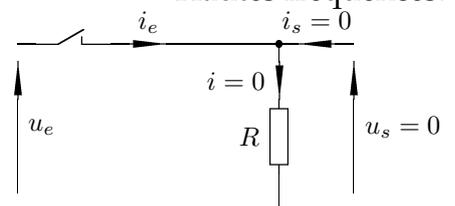


3.b. Comportement asymptotique

Basses fréquences



Hautes fréquences.



- Aux basses fréquences : le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, on a donc $i = 0$ et $u_s = Ri = 0$.
- Aux hautes fréquences : la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert, on a donc $i = 0$ et $u_s = Ri = 0$.

Conclusion : il s'agit bien d'un filtre passe bande.

3.c. Fonction de transfert

La sortie étant ouverte, on retrouve un pont diviseur de tension.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{RC\omega j}{RC\omega j - LC\omega^2 + 1} = \frac{j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

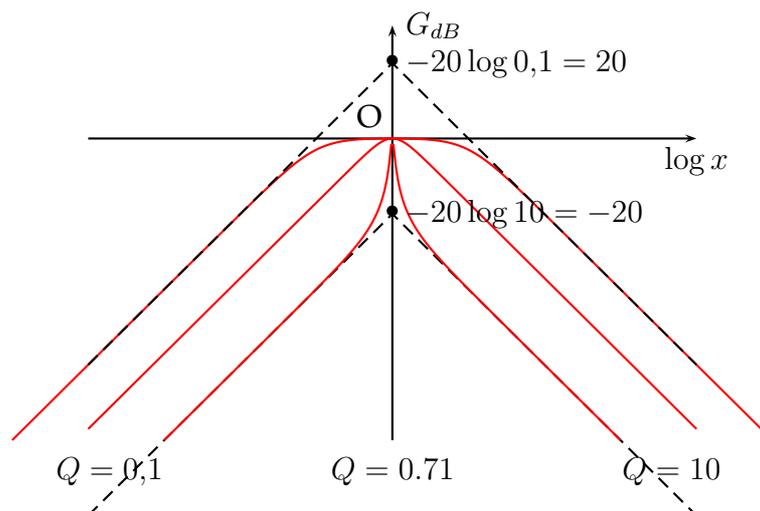
3.d. Diagramme de Bode

Réponse en gain

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + [Q(x - \frac{1}{x})]^2}}$$

Gain en décibels : $G_{dB} = 20 \log G(\omega) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + [Q(x - \frac{1}{x})]^2}} = -10 \log(1 + [Q(x - \frac{1}{x})]^2)$

- Asymptote en basses fréquences : $\omega \rightarrow 0, x \rightarrow 0$ et $\log x \rightarrow -\infty, Q(x - \frac{1}{x}) \simeq -\frac{Q}{x}$ et $1 + [Q(x - \frac{1}{x})]^2 \simeq (\frac{Q}{x})^2. G_{dB} = -10 \log(1 + [Q(x - \frac{1}{x})]^2) \simeq -10 \log(\frac{Q}{x})^2 = -20 \log Q + 20 \log x$: droite de pente 20 dB par décade et coupant l'axe des abscisses en $-20 \log Q$
- Asymptote en hautes fréquences : $\omega \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty$ et $\log x \rightarrow \infty, Q(x - \frac{1}{x}) \simeq Qx$ et $1 + [Q(x - \frac{1}{x})]^2 \simeq (Qx)^2. G_{dB} = -10 \log(1 + [Q(x - \frac{1}{x})]^2) \simeq -10 \log(Qx)^2 = -20 \log Q - 20 \log x$: droite de pente -20 dB par décade et coupant l'axe des abscisses en $-20 \log Q$.
- Pour $x = 1$ soit $\omega = \omega_0, G_{dB} = -10 \log(1 + [Q(1 - \frac{1}{1})]^2) = -10 \log 1 = 0$



Bande passante à -3 dB : c'est l'intervalle de fréquence pour lequel $G(\omega) > \frac{G(\max)}{\sqrt{2}}$.

Ici, on cherche x tel(s) que

$$G = \frac{G(\max)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2 = 2 \Rightarrow Q(x - \frac{1}{x}) = \pm 1 \iff Qx^2 \pm x - Q = 0 \iff x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

et on obtient quatre solutions $x = \pm \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$ dont deux sont positives et en ne retenant que ces dernières,

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} \iff \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

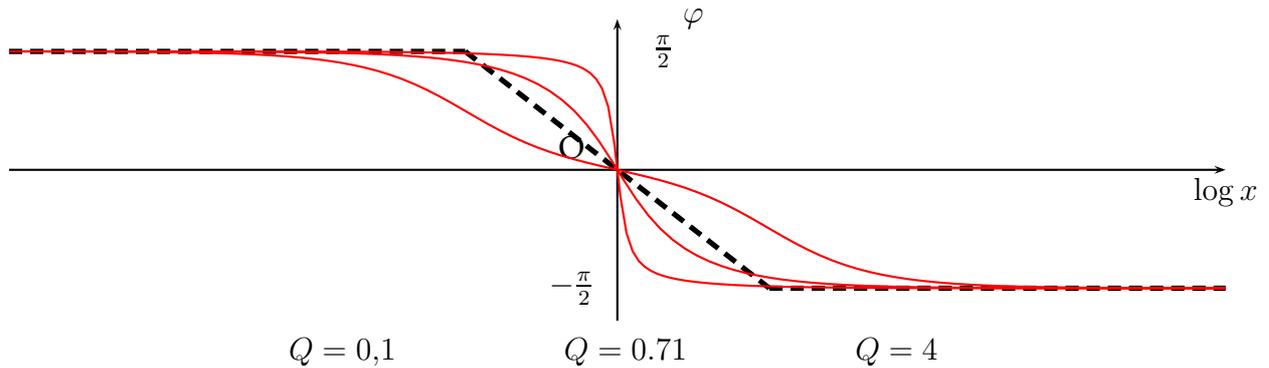
La largeur de la bande est donc inversement proportionnelle au facteur de qualité.

Réponse en phase

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg(\frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}) = 0 - \arctan Q(x - \frac{1}{x})$$

On remarque que $\varphi_{PBa} = \frac{\pi}{2} + \varphi_{PB}$, on déduit donc la courbe du passe bande de celle du passe bas en ajoutant simplement $\frac{\pi}{2}$. On peut aussi utiliser le comportement asymptotique :

- Asymptote basses fréquences : $x \rightarrow 0, \log x \rightarrow -\infty, \underline{H} \rightarrow j\frac{x}{Q}$ et $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$: droite horizontale.
- Pour $\omega = \omega_0, x = 1, \log x = 0$ et $\varphi = 0$.
- Asymptote hautes fréquences : $x \rightarrow \infty, \log x \rightarrow \infty, \underline{H} \rightarrow \frac{1}{jQ}$ et $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$: droite horizontale.

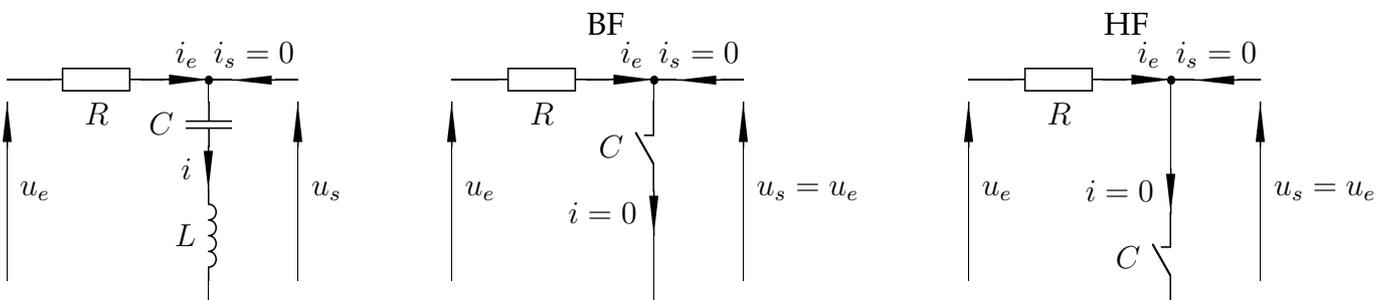


Remarque : on retrouve un comportement dérivateur en BF et intégrateur en HF.

4. Filtre coupe bande d'ordre deux

4.a. Montage et comportement asymptotique

Circuit RLC avec LC en sortie ouverte.



- Aux basses fréquences : le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, on a donc $i = 0, u_R = 0$ et $u_s = u_e$.
- Aux hautes fréquences : la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert, on a donc $i = 0, u_R = 0$ et $u_s = Ri = u_e$.

Conclusion : il s'agit bien d'un filtre coupe bande.

4.b. Fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_{LC}}{Z} = \frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega j - LC\omega^2 + 1} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

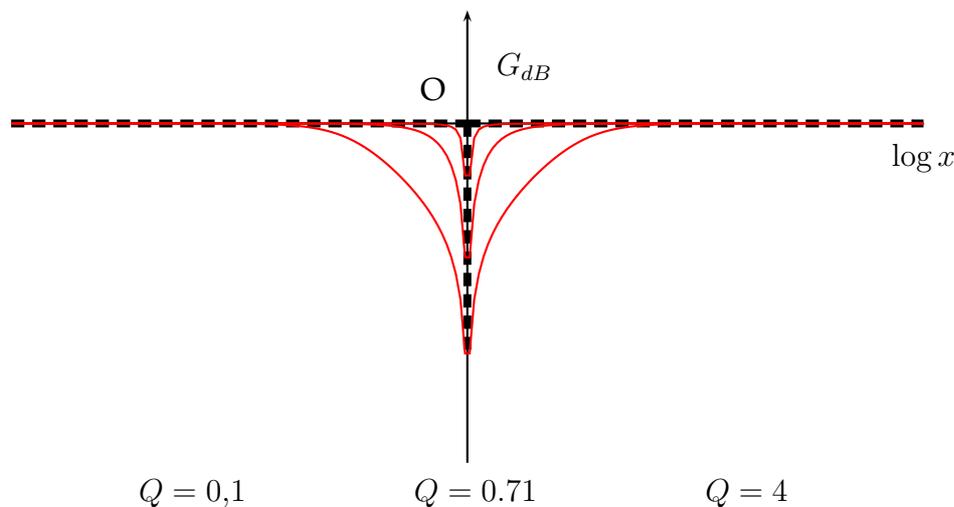
4.c. Diagramme de Bode

Réponse en gain

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

$$\text{Gain en décibels : } G_{dB} = 20 \log G(\omega) = 20 \log \frac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} = 20 \log |1 - x^2| - 10 \log((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2})$$

- Asymptote en basses fréquences : $\omega \rightarrow 0, x \rightarrow 0$ et $\log x \rightarrow -\infty, G_{dB} = 20 \log |1 - x^2| - 10 \log((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}) \simeq 20 \log 1 - 10 \log 1 = 0$: asymptote horizontale.
- Asymptote en hautes fréquences : $\omega \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty$ et $\log x \rightarrow \infty, (1 - x^2)^2 \simeq x^4 \gg \frac{x^2}{Q^2}$ d'où $G_{dB} = 20 \log |1 - x^2| - 10 \log((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}) \simeq 40 \log x - 10 \log x^4 = 0$: asymptote horizontale.
- Asymptote centrale : Pour $x \rightarrow 1$ soit $\omega = \omega_0, |(1 - x^2)^2| \rightarrow 0, G_{dB} = 20 \log |1 - x^2| - 10 \log((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}) \rightarrow -\infty$: droite verticale.



Bande coupée on retrouve également $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$: la largeur de la bande est donc inversement proportionnelle au facteur de qualité.

Réponse en phase

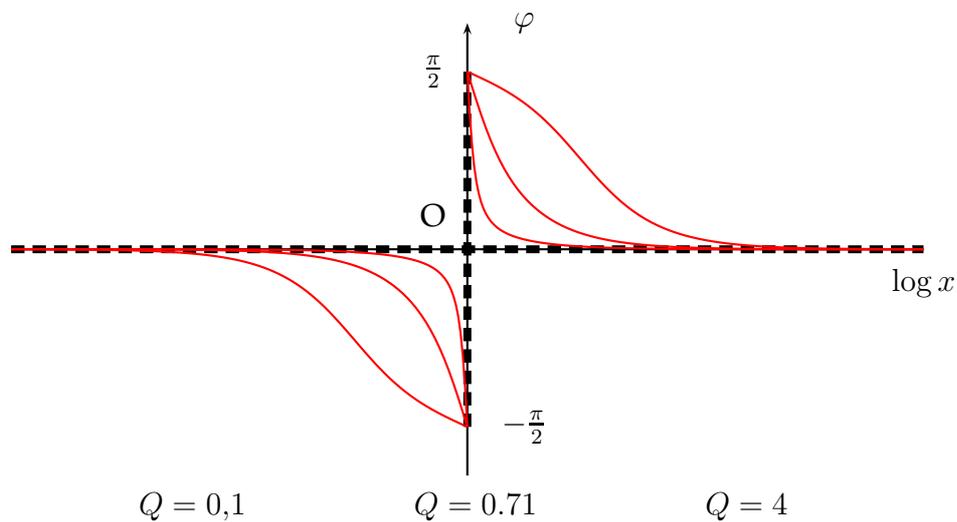
$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg\left(\frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}\right) = \arg(1 - x^2) - \arg(1 - x^2 + j\frac{x}{Q})$$

et $\arg(1 - x^2) = 0$ si $x < 1$ et $\arg(1 - x^2) = \pi$ si $x > 1$

On remarque que $\varphi_{RB} = \varphi_{PB}$ si $x < 1$ et $\varphi_{RB} = \pi + \varphi_{PB}$ si $x > 1$, on déduit donc la courbe du réjecteur de bande de celle du passe bas en ajoutant simplement 0 si $x < 1$ et π si $x > 1$.

Diagramme asymptotique :

- Asymptote basses fréquences :
Quand $x \rightarrow 0$, $\log x \rightarrow -\infty$ et $\varphi \rightarrow 0$: droite horizontale.
- Asymptote hautes fréquences :
Quand $x \rightarrow \infty$, $\log x \rightarrow \infty$ et $\varphi \rightarrow 0$: droite horizontale.
- Si $x \rightarrow 1^-$, $\varphi \rightarrow 0 - \arg\left(\frac{j}{Q}\right) = -\frac{\pi}{2}$
- Si $x \rightarrow 1^+$, $\varphi \rightarrow \pi - \arg\left(\frac{j}{Q}\right) = \frac{\pi}{2}$



Fin

Table des matières

I Généralités

1. Quadripôles
2. Fonction de transfert en régime sinusoïdal forcé
3. Filtres électriques linéaires
 - 3.a. Définition
 - 3.b. Principaux types de filtres linéaires : Cf. TP
 - 3.c. Action d'un filtre sur un signal
 - 3.d. Exemple sur un signal
 - 3.e. Filtres réels : diagrammes de Bode
4. Filtres en cascade, impédance d'entrée et de sortie

II Réalisation de quelques fonctions particulières

1. Filtre « moyennneur »
2. Filtre « dérivateur »
3. Filtre « intégrateur »

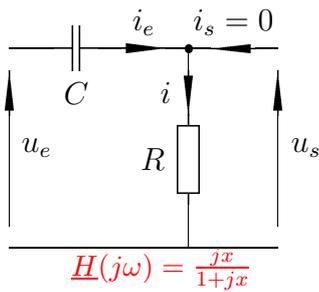
III Exemples de filtres du premier ordre

1. Filtre passe bas du premier ordre : exemple du quadripôle *RC*.
 - 1.a. Montage
 - 1.b. Comportement asymptotique
 - 1.c. Fonction de transfert
 - 1.d. Pulsation de coupure ω_c
 - 1.e. Diagrammes de Bode
 - 1.f. Caractère intégrateur du filtre
 - 1.g. Modélisation
2. Filtre passe haut du premier ordre.
 - 2.a. Montage et comportement asymptotique
 - 2.b. Fonction de transfert
 - 2.c. Fréquence de coupure :
 - 2.d. Diagrammes de Bode :
 - 2.e. Caractère dérivateur du filtre

IV Exemples de filtres du deuxième ordre

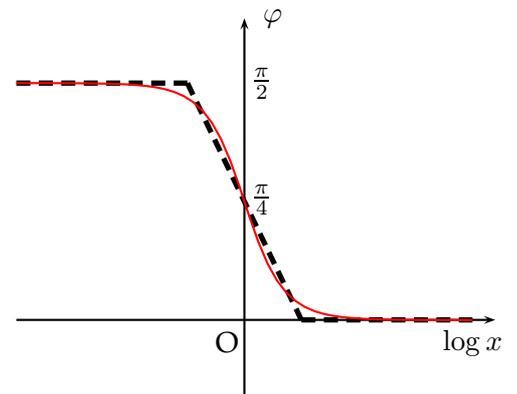
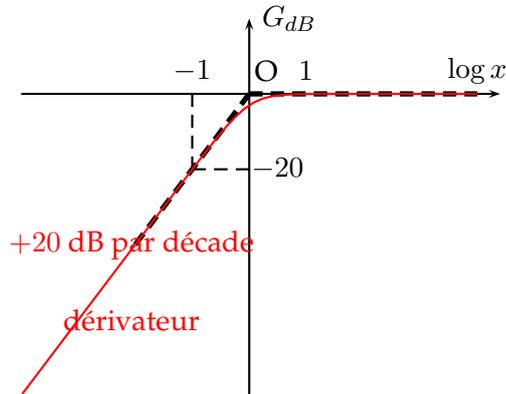
1. Filtre passe bas d'ordre deux
 - 1.a. Montage
 - 1.b. Comportement asymptotique
 - 1.c. Fonction de transfert
 - 1.d. Diagramme de Bode
2. Filtre passe haut d'ordre deux.
 - 2.a. Montage
 - 2.b. Comportement asymptotique
 - 2.c. Fonction de transfert
 - 2.d. Diagramme de Bode
3. Filtre passe bande d'ordre deux
 - 3.a. Montage
 - 3.b. Comportement asymptotique
 - 3.c. Fonction de transfert
 - 3.d. Diagramme de Bode
4. Filtre coupe bande d'ordre deux
 - 4.a. Montage et comportement asymptotique
 - 4.b. Fonction de transfert
 - 4.c. Diagramme de Bode

Filtre passe haut du premier ordre



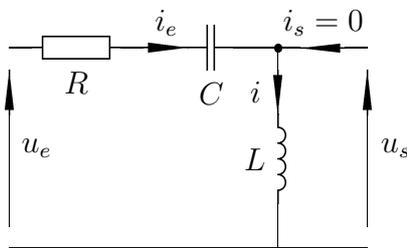
$$G_{dB} = 20 \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{\pi}{2} + \varphi_{P.Bas \text{ 1er ordre}}$$

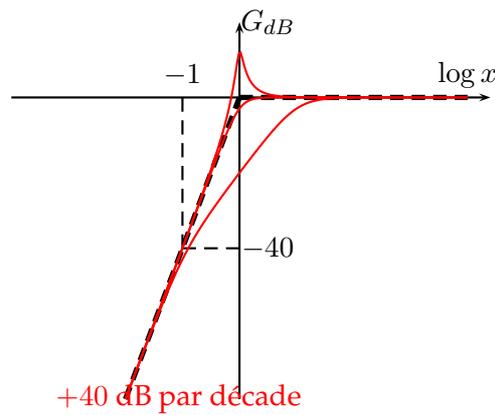
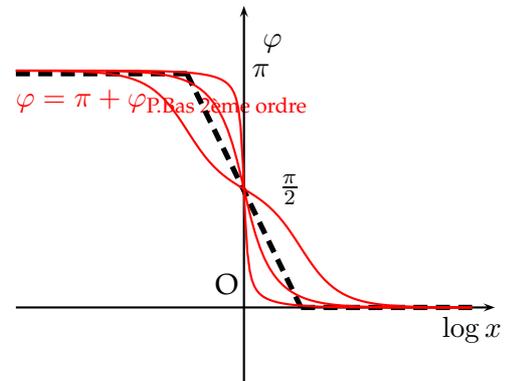


+20 dB par décade
dérivateur

Filtre passe haut du second ordre



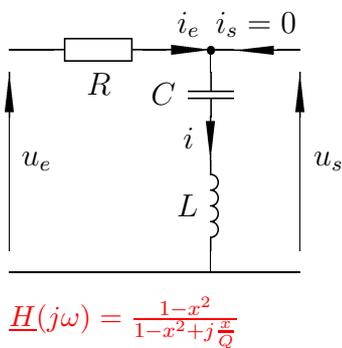
$$G_{dB} = 40 \log x - 10 \log((1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2})$$



+40 dB par décade

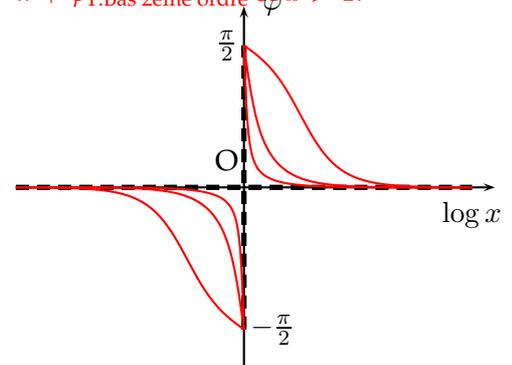
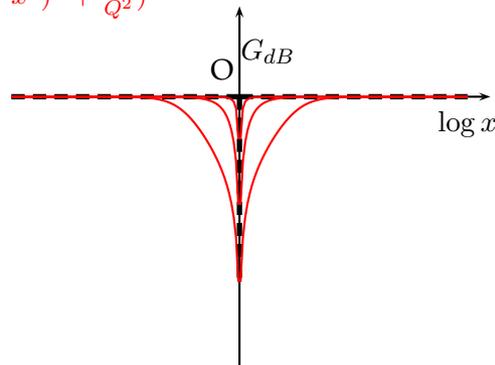
$$\varphi = \pi + \varphi_{P.Bas \text{ 2ème ordre}}$$

Filtre coupe bande du second ordre



$$G_{dB} = 20 \log |1-x^2| - 10 \log((1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2})$$

$$\varphi = \varphi_{P.Bas \text{ 2ème ordre}} \text{ si } x < 1 \text{ et } \varphi = \pi + \varphi_{P.Bas \text{ 2ème ordre}} \text{ si } x > 1.$$



$$H(j\omega) = \frac{1-x^2}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$$