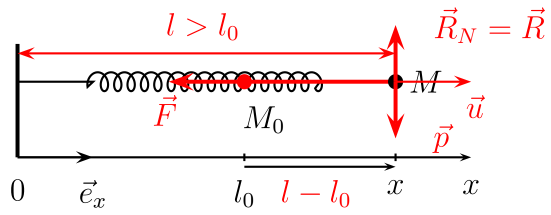
$EC_{3.5}$: Oscillateur harmonique

PCSI 2022 – 2023

L'oscillateur harmonique est l'un des systèmes les plus étudiés en physique, en effet, il représente le comportement d'un grand nombre de systèmes physiques lorsqu'ils sont faiblement perturbé autour d'une position d'équilibre.

I Position du problème

1. Système étudié



Le système considéré est le suivant : une masse M attachée à un ressort et pouvant se déplacer sur un plan horizontal. On fera les hypothèses suivantes :

- les frottements avec le support sont négligeables,
- la masse M peut être considérée comme un point matériel pour cette étude,
- la masse du ressort est négligeable devant celle du point M.

2. Force exercée par un ressort

Définition : On appelle longueur à vide d'un ressort la longueur du ressort lorsqu'il n'est soumis à aucune force.
Cette longueur est intrinsèque à un ressort et dépend de la manière dont il a été construit.

Définition : On appelle longueur à l'équilibre d'un ressort dans un problème donné la longueur du ressort lorsqu'il est immobile (de façon permanente).
Cette longueur dépend à la fois du ressort et du problème considéré.
Elle est a priori différente de la longueur à vide , en particulier si d'autres forces sont exercées (autre ressort, gravité etc....)

La force exercée par un ressort tend à ramener le ressort vers sa longueur à vide, cette force doit donc repousser la masse lorsque le ressort est comprimé et l'attirer lorsque le ressort est étendu. Ainsi la force de rappel du ressort dépend de l'élongation $(l - l_0)$ et est dirigée selon l'axe du ressort.

Définition : La force de rappel exercée par un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k sur un point matériel M attaché au ressort est :

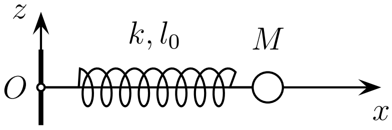
$$\vec{F} = k\overrightarrow{MM_0} = -k(l - l_0)\vec{u}$$

où M_0 est la position qu'aurait le point M si le ressort avait sa longueur à vide et $\vec{u}$ est un vecteur unitaire parallèle au ressort dirigée du ressort vers le point M et l est la longueur du ressort.

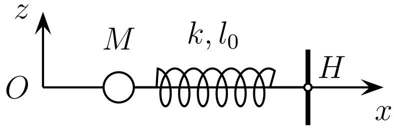
Remarque : Il est fréquent de faire des erreurs de signe avec les ressorts, il faut donc systématiquement vérifier sur le schéma que l'on ne s'est pas trompé. Pour cela, la méthode la plus courante consiste à imaginer une situation où le ressort est étiré ($l > l_0$), la force doit tendre à ramener le ressort vers sa position d'équilibre.

2 difficultés : le sens du vecteur (donc le signe) , puis le lien longueur/paramètre(ou coordonnée)

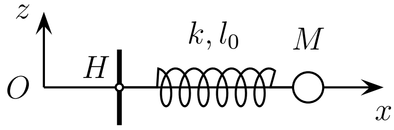
Exemple : Le point M est repéré par son abscisse x ou sa cote z selon les cas. Le point H est repéré par son abscisse h. Donner les forces exercées par les ressorts sur la masse M dans les cas ci-dessous (pour les masses M_1 et M_2 dans le cas n°4) en fonction des grandeurs k, k', l_0, l'_0, x, z, h, x_1 et x_2 et des vecteurs unitaires $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$.



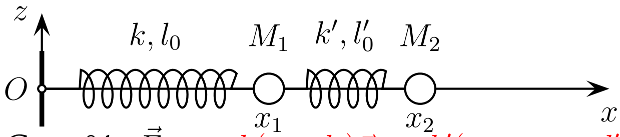
Cas n°1 : $\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{u}_x$



Cas n°2 : $\vec{F} = +k(h - x - l_0)\vec{u}_x$



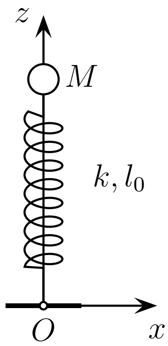
Cas n°3 : $\vec{F} = -k(x - h - l_0)\vec{u}_x$



Cas n°4 : $\vec{F}_1 = -k(x - l_0)\vec{u}_x + k'(x_2 - x_1 - l'_0)\vec{u}_x$

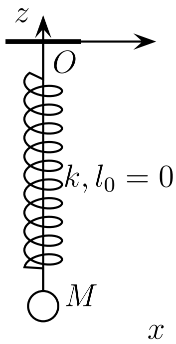
$\vec{F}_2 = -k'(x_2 - x_1 - l'_0)\vec{u}_x$

Cas n°5 :



$\vec{F} = -k(z - l_0)\vec{u}_z$

Cas n°6 :



$\vec{F} = -kz\,\vec{u}_z$

II Équation du mouvement

Pour établir l'équation du mouvement d'un objet en mécanique, on suivra systématiquement les étapes suivantes :

1. définir le système
2. définir le référentiel
3. faire le bilan des forces appliquées au système et les représenter sur un schéma
4. appliquer un des théorèmes de la mécanique

Dans notre cas :

- système : {la masse m} assimilée à un point matériel M
- référentiel : le référentiel terrestre, lié au laboratoire qui peut être considéré comme galiléen pour ce type de mouvement
- bilan des forces :
  - ⋆ Le poids $\vec{P}$ orthogonal à $\vec{e}_x$ car le plan est horizontal
  - ⋆ La réaction du support $\vec{R}$, orthogonale à $\vec{e}_x$ car les frottements sont négligés Attention, on n'a pas nécessairement R=-P sinon une balle ne pourrait pas rebondir
  - ⋆ la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x = -k(x - l_0)\vec{e}_x$

- le référentiel étant galiléen, on peut utiliser le principe fondamental de la dynamique.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{R}$$

(attention aux vecteurs) On projette ensuite selon $\vec{e}_x$ ce qui donne :

$$m\ddot{x} = -k(l - l_0) + 0 + 0 = -k(x - l_0)$$

(attention il n'y a plus de vecteur) D'où le résultat suivant : $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0}$

Définition : On appelle oscillateur harmonique un système physique qui est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = cte$$

Remarques :

- Ce type d'équation reliant une fonction à ses dérivés est appelée équation différentielle .
  Contrairement aux équations dont vous avez l'habitude, l'inconnu ici n'est pas un nombre mais une fonction (objet qui à tout nombre associe un autre nombre).
  La fonction inconnue est ici $x(t)$.
- Ces équations sont très fréquentes en physique, en particulier lorsque l'on étudie l'évolution temporelle d'un système.

On définit en général le paramètre ω_0, appelé pulsation propre de l'oscillateur , tel que l'équation différentielle s'écrit

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = cte.$$

Le paramètre ω_0 vaut donc ici[1] $\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Méthode : Pour trouver la pulsation propre d'un oscillateur harmonique, il suffit de mettre l'équation de l'oscillateur sous forme canonique (avec un 1 en facteur du terme $\ddot{x}$), on identifie alors le terme en facteur de x comme étant ω_0^2.

Exemple : Si l'équation est $m\ddot{x} + \frac{k}{2}x = mg$, a-t-on affaire à un oscillateur harmonique ? si non pourquoi et si oui quelle est sa pulsation propre ?

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

III Solutions de l'équation du mouvement

1. Position d'équilibre

Les équations différentielles peuvent dans certains cas être très difficile à résoudre complètement, on peut toutefois en tirer des informations même sans trouver la solution générale.

À l'équilibre, la masse est immobile , donc sa position $x(t)$ ne varie pas. Ainsi, à l'équilibre $\ddot{x} = 0$ et l'équation peut s'écrire :

$$0 + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0 \Rightarrow x = l_0$$

Ce résultat est homogène et conforme à l'intuition puisque le plan est horizontal.

2. Solution complète

La manière de résoudre ces équations différentielles de façon générale sera vue pendant l'année en cours de mathématiques, mais on peut déjà dire plusieurs choses :

- il s'agit d'une équation linéaire (pas de produit $x\dot{x}$, pas de fonction $\cos x \dots$),
- d'ordre 2 (x est dérivé au maximum 2 fois),
- à coefficients constants (les coefficients ne dépendent pas de t)
- avec un second membre (lorsque l'on place tout ce qui dépend de x à gauche, il n'y a pas simplement 0 à droite).

De telles équations n'ont pas une seule solution, mais un ensemble de solutions .
par exemple si $f'(x) = 5$, alors $f(x) = 5x$ est solution, mais $f(x) = 5x + 3$ aussi
Pour trouver l'ensemble des solutions, on cherche tout d'abord une solution particulière de l'équation que l'on notera sol_P (cette solution n'est pas unique, mais il suffit d'en trouver une).

On cherche ensuite la solution générale de l'équation homogène associée (c'est-à-dire l'équation pour laquelle le second membre est 0, soit $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ici) que l'on va noter sol_H.

Théorème : La solution générale d'une équation différentielle linéaire avec second membre est la somme d'une solution particulière est de la solution générale de l'équation homogène associée :

$$sol = sol_H + sol_P$$

Pour trouver la solution particulière, on utilise généralement le régime stationnaire , c'est-à-dire ici lorsque le ressort est à l'équilibre. Si on se place à l'équilibre, on cherche une solution sous la forme $x \mapsto A$ ce qui a déjà été fait au paragraphe précédent. Nous avons donc déjà démontré que $sol_P = l_0$ est une solution particulière qui convient.
L'équation homogène associée est $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Les solutions générales pour cette équations sont :

- $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ ou
- $C\cos(\omega_0 t + \varphi)$ ou encore
- $D\sin(\omega_0 t + \theta)$

avec A,B,C,D, φ, θ des constantes.
Vérifions que la deuxième solution convient :

$$\dot{x} = -C\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{et} \quad \ddot{x} = -C\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -C\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0^2 C\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$$

1. Attention, ce n'est pas toujours le cas, on peut parfois avoir $\omega = \sqrt{2\frac{k}{m}}$ ou encore bien d'autres expressions.

la 2e solution est donc toujours ok, quelques soient les constantes

La solution générale de l'équation différentielle est donc $sol = sol_H + sol_P = l_0 + C\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Il s'agit d'un ensemble de solution car les constantes C et φ peuvent prendre a priori n'importe quelle valeur. Toutefois on sait que si on lâche deux fois le ressort à partir de la même position, il aura le même mouvement. Pour avoir un mouvement différent, il faut lâcher le ressort « d'une autre manière ».

Théorème : Les constantes d'intégrations se déterminent à l'aide des conditions initiales.

Le nombre de conditions initiales à prendre en compte est le même que l'ordre de l'équation différentielle.

Ici, les conditions initiales à prendre en compte sont :

1. la position d'où la masse est lâchée, $x(t = 0)$,
2. la vitesse avec laquelle la masse est lâchée, $\dot{x}(t = 0)$,

Exercice : Que valent les constantes d'intégrations dans le cas où la masse est lâchée sans vitesse initiale d'une position x_0 ? et dans le cas où la masse est initialement en $x = l_0$ mais avec une vitesse v_0 ? Vérifier l'homogénéité

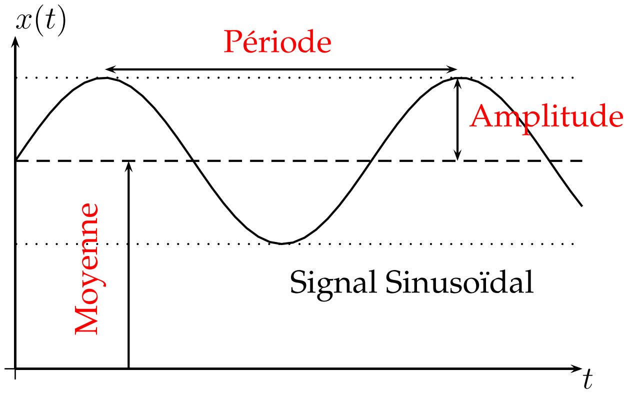
✍ Dans le premier cas :
$x_0 = x(t = 0) = C\cos\varphi + l_0$ et $v_0 = 0 = -\omega_0 C \sin\varphi$ d'où$\varphi = 0$ et donc $C = x_0 - l_0$. La solution est $x(t) = l_0 + (x_0 - l_0)\cos(\omega_0 t)$

Dans le deuxième cas :
$l_0 = x(t = 0) = C\cos\varphi + l_0$ d'où $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $v_0 = -\omega_0 C\sin\varphi$ d'où$C = \frac{v_0}{\omega_0}$ et la solution est $x(t) = l_0 + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$. Homogénéité ? L.T^{-1}/T^{-1} = L

3. Vocabulaire des signaux sinusoïdaux

Pour un signal sinusoïdal de la forme $x(t) = l_0 + D\sin(\omega_0 t + \theta)$

- l_0 est la valeur moyenne du signal
- D est l'amplitude du signal
- ω_0 est sa pulsation
- $\omega_0 t + \theta$ est appelé phase instantanée
- θ est la phase à l'origine
- la période est $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
- la fréquence est $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$



Le signal sinusoïdal considéré peut donc aussi s'écrire de la forme $l_0 + D\sin(2\pi f t + \theta)$: si t augmente de T, alors l'argument du sinus augmente de 2π et le signal a bien la même valeur en t et en $t + T$.

IV Aspect énergétique

Puisque les frottements sont négligés, il n'y a aucune source de dissipation : l'énergie mécanique, somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique, doit se conserver .

Théorème Énergie potentielle élastique : On admet pour le moment que l'énergie potentielle élastique emmagasinée par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 est

$$E_{p,el} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

Vérifions que l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m = E_p + E_c = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}k\left(C\cos(\omega_0 t + \varphi)\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(-\omega_0 C\sin(\omega_0 t + \varphi)\right)^2$$

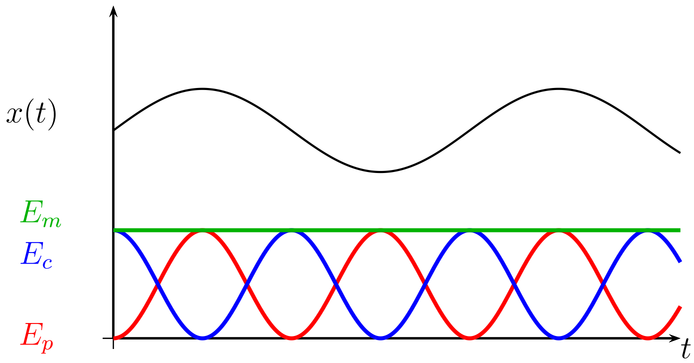
or $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ donc :

$$E_m = \frac{1}{2}kC^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kC^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

et comme $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$E_m = \frac{1}{2}kC^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2$$

L'énergie mécanique totale est donc constante, mais l'énergie potentielle et l'énergie cinétique ne sont pas constantes.



Un autre moyen d'arriver à la conservation de l'énergie est de partir de l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - l_0) = 0$$

On multiplie par $\dot{x}$:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\omega_0^2(x - l_0) = 0$$

Puis en prennant la primitive

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2(x - l_0)^2 = cte$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 = cte'$$

Table des matières