M_1 Cinématique

PCSI 2024 – 2025

I Quelques notions de cinématique

1. Objet et cadre de l'étude

Définition : la cinématique est l'étude et la description des mouvements des corps sans préoccupation des causes qui les produisent.

En cinématique du point, on se ramènera à l'étude du mouvement d'un point M (centre de masse d'un solide) ou d'un objet ponctuel c'est à dire dont le repérage ne nécessite que trois coordonnées de position pour le problème étudié.

En pratique, il faut que ses dimensions soient très inférieures aux distances caractéristiques du problème étudié.

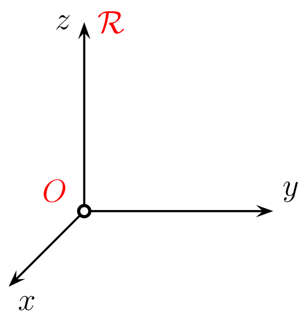
Exemple : la Terre (rayon $R_T \simeq 6400$ km) si on étudie son mouvement autour du soleil (rayon orbital moyen $R_{\text{orbite}} \simeq 150$ millions de km).

2. Repères

Pour repérer la position d'un mobile au cours du temps, l'observateur a besoin de repères :

- Repère d'espace : $\mathcal{R}$ (O,Ox,Oy,Oz) origine O et un système d'axes liés à un solide de référence.
- Repère de temps : horloge (dans laquelle se produit un phénomène périodique) et origine.

  Remarque : Deux observateurs mesureront une même durée entre deux événements quelque soit l'endroit où ils se trouvent et leur mouvement propre, on dit que **le temps est absolu.**



3. Référentiels d'observation

Définition : l'ensemble repère de temps et d'espace est le référentiel $\mathcal{R}$: c'est l'ensemble des points fixes pour un observateur associé à une horloge.

Exemples : référentiel local (lié au sol), référentiel géocentrique, référentiel de Copernic.

4. Mouvement et trajectoire

La trajectoire (ensemble des positions successives du point dans le référentiel) dépend du référentiel dans lequel on se place, on dit que **le mouvement est relatif.**

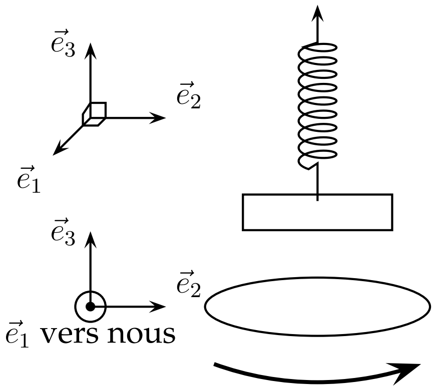
Exemple : un corps en mouvement dans un référentiel peut être immobile dans un autre référentiel.

II Repérage du point

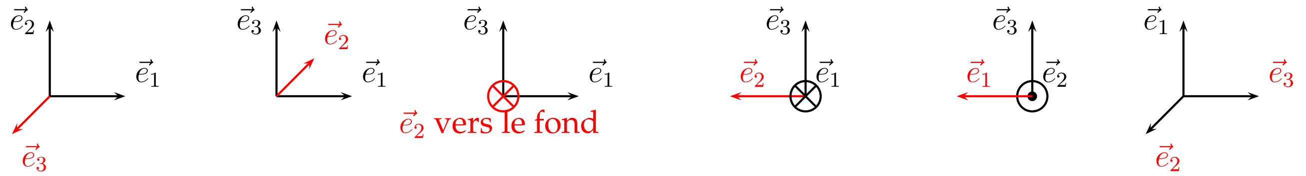
1. Base orthonormée directe

Pour plus de simplicité, nous n'utiliserons que des bases orthonormées directes $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

- La norme des vecteurs est égale à l'unité.
- Les vecteurs sont orthogonaux deux à deux.
- La base est directe si $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$.
  produit vectoriel, voir cours de mathématiques.
  Le sens de $\vec{e}_3$ est donné par la règle du tire bouchon : si on visse le tire bouchon de $\vec{e}_1$ vers $\vec{e}_2$, il progresse selon $\vec{e}_3$.
  Autre règle, celle de la main droite : tous les doigts de la main droite tendus selon $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ sortant de la paume, relevez le pouce, il indique la direction et le sens de $\vec{e}_3$.
  Ou encore, si on place le pouce de la main droite suivant $\vec{e}_1$ et l'indexe suivant $\vec{e}_2$, le majeur est selon $\vec{e}_3$.



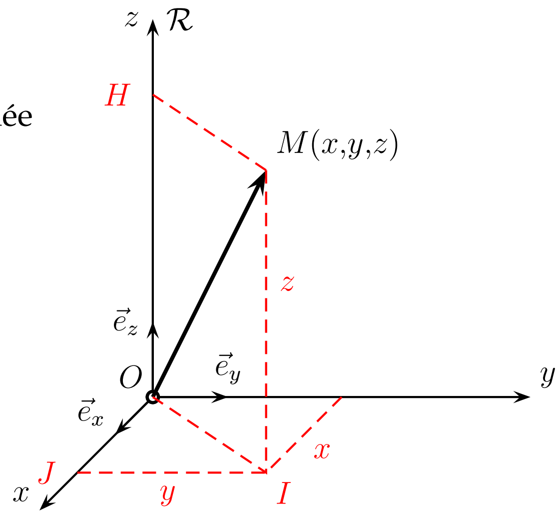
Exemples :



2. Systèmes usuels de coordonnées

L'espace est rapporté à trois axes orthogonaux $(Ox,Oy,Oz) \to$ repère d'origine O : $\mathcal{R}\,(O,Ox,Oy,Oz)$.

2.a. Coordonnées cartésiennes (x,y,z)



Le système d'axes est muni de la base $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ orthonormée directe.

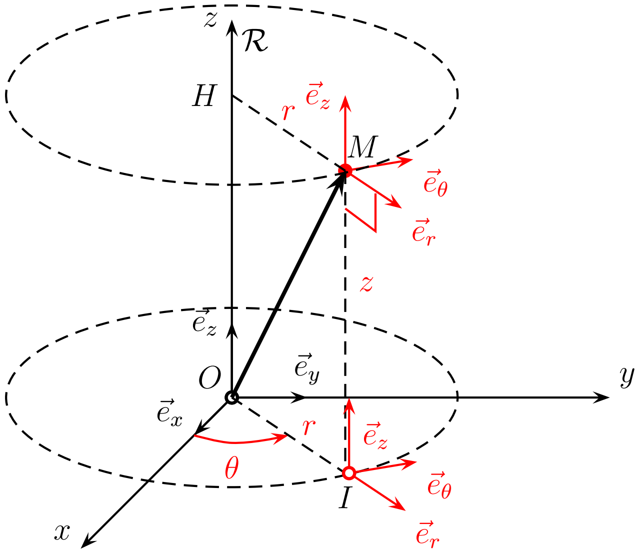
- x abscisse, y ordonnée et z la cote sont les coordonnées cartésiennes de M.
- Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IM}$
  $$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$
- Distance à l'origine OM telle que
  $OM^2 = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM} = (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z).(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) = x^2\vec{e}_x.\vec{e}_x + xy\vec{e}_x.\vec{e}_y + ... = x^2 + y^2 + z^2$ d'où $||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- Déplacement élémentaire : le déplacement élémentaire est le vecteur noté $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ qui relie le point M de coordonnées x, y, z au point M' de coordonnées infiniment proches $x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z$. On a donc ici en coordonnées cartésiennes :

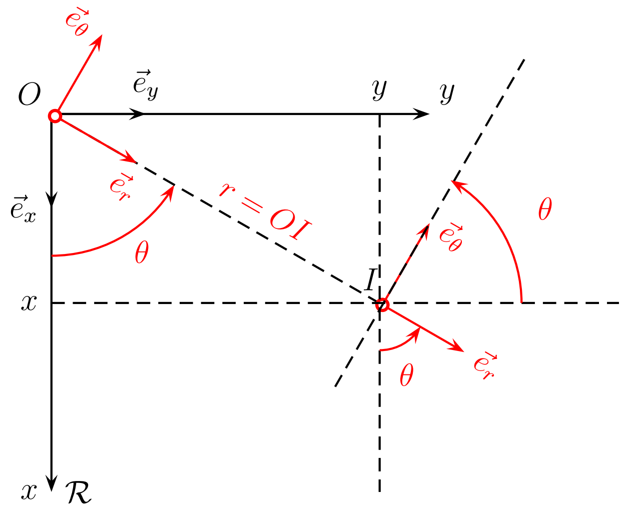
$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$

2.b. Coordonnées cylindro polaires (ou cylindriques) : (r,θ,z)

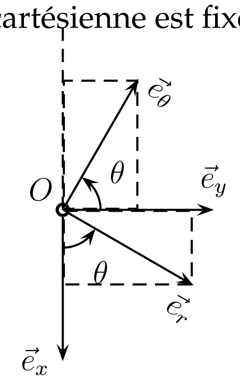
Quand un problème fait intervenir une direction privilégiée (rotation autour d'un axe fixe par exemple), il est parfois plus simple d'utiliser le système suivant :

M se projette en I dans le plan (xOy), on définit alors $r = OI$ le rayon polaire et $\theta = (Ox,OI)$ l'angle polaire.





- r, θ et z sont les coordonnées cylindriques (ou cylindropolaires) de M.
- $\vec{e}_r$ est le vecteur radial tel que $\overrightarrow{OI} = r\vec{e}_r$.
- $\vec{e}_\theta$ est le vecteur orthoradial obtenu par rotation de $\vec{e}_r$ de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Oz : on parle de base locale car $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent de la position de M. Á contrario, la base cartésienne est fixe.
- Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$
- Distance de l'origine à M : $||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{r^2 + z^2}$



Lien avec le système cartésien :

⋆ $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ soit $r^2 = x^2 + y^2$: Pythagore.

⋆ $\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y$ et $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y$.

Remarques :

$$\vec{e}_\theta = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \quad \text{et de même} \quad \vec{e}_r = -\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$$

la déviation par rapport à θ d'un vecteur de la base mobile revient à lui faire effectuer une rotation de $+\frac{\pi}{2}$.

Déplacement élémentaire : Le déplacement élémentaire est le vecteur noté $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ qui relie le point M de coordonnées r, θ, z au point M' de coordonnées infiniment proches $r+\mathrm{d}r, \theta+\mathrm{d}\theta, z+\mathrm{d}z$. On a donc ici en coordonnées cylindriques :
$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$

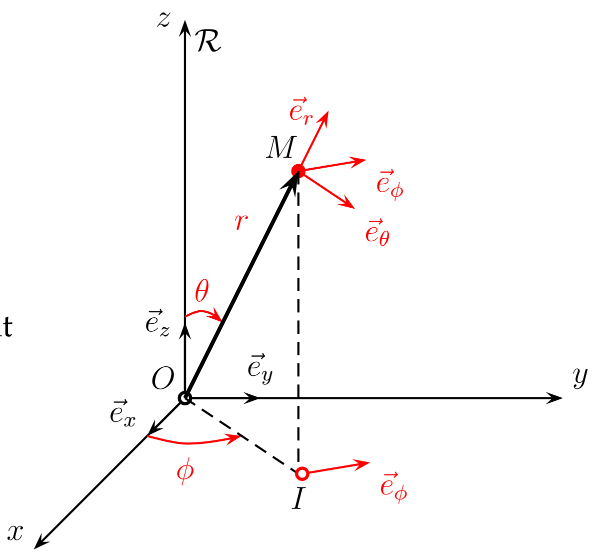
2.c. Coordonnées polaires : (r,θ)

Si le mouvement est plan, le mobile se déplace dans un plan (Oxy), on se place alors dans ce plan $\rightarrow z = 0$: coordonnées cylindriques sans z.

2.d. Coordonnées sphériques : (r, θ, ϕ)

Quand un problème fait intervenir un point privilégié (rotation autour d'un point par exemple), il est parfois plus simple d'utiliser le système suivant :

On définit le vecteur $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ associé à la la coordonnée $r = OM$. On repère aussi le point M par l'angle orienté $\theta = (Oz, \overrightarrow{OM})$ associé au vecteur $\vec{e}_\theta$ qui appartient au plan $(Oz, \overrightarrow{OM})$, qui est orthogonal à $\vec{e}_r$ et dirigé par θ. Enfin on utilise l'angle φ entre Ox et $\overrightarrow{OI}$ avec I le projeté orthogonal de M dans le plan Oxy associé au vecteur $\vec{e}_\phi$ tel que $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ soit une base orthonormée directe.



L'expression du vecteur position est alors extrêmement simple : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. Toutefois, la difficulté est « cachée » dans le fait que $\vec{e}_r$ dépend de θ et de ϕ

Lien avec le système cartésien :

- ⋆ $x = OI \cos\phi = r \sin\theta \cos\phi$
- ⋆ $y = OI \sin\phi = r \sin\theta \sin\phi$
- ⋆ $z = r\cos\theta$
- ⋆ On a donc $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Remarque : Attention à ne pas confondre avec le système précédent !

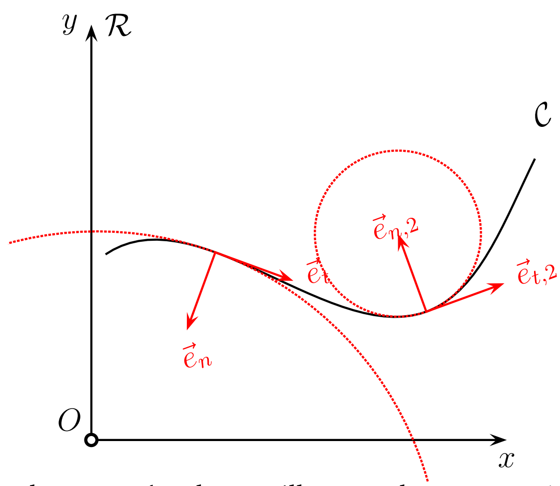
Déplacement élémentaire : Le déplacement élémentaire est le vecteur noté $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ qui relie le point M de coordonnées r, θ, ϕ au point M' de coordonnées infiniment proches $r+\mathrm{d}r, \theta+\mathrm{d}\theta, \phi+\mathrm{d}\phi$.
On a donc ici en coordonnées sphérique :
$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\phi\,\vec{e}_\phi$

2.e. Base de Frenet

On ne travaillera dans la base de Frenet que pour des mouvement plan . De plus, on ne définira ici que les vecteurs de base.

On définit le vecteur tangent unitaire $\vec{e}_t$ à un instant donné pour un point M par ses caractéristiques :
- norme : 1 ;
- direction : tangent à la trajectoire ;
- sens : le sens du déplacement du point M.

On définit le vecteur normal unitaire $\vec{e}_n$ à un instant donné pour un point M par ses caractéristiques :
- norme : 1 ;
- direction : orthogonal à $\vec{e}_t$;
- sens : vers l'intérieur de la trajectoire.



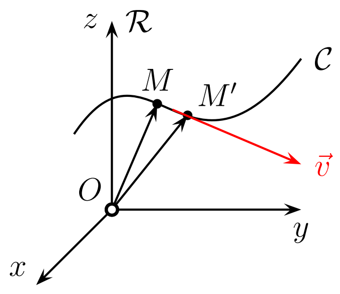
Sur le graphique, les cercles en pointillés sont appelés cercles osculateurs : c'est le « meilleur cercle » tangent à la courbe en un point.

2.f. Choix du système de coordonnées

Il doit être fait de façon à simplifier les équations du mouvement. Cf. Suite.

3. Vecteur vitesse d'un point M dans un référentiel donné $\vec{v}(M/\mathcal{R})$

3.a. Définition



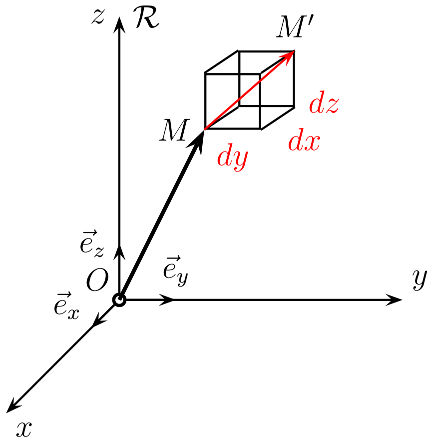
Soit un point M dont la trajectoire est $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}$.

Si il est en M à l'instant t et en M' à l'instant $t+\Delta t$, alors par définition, sa vitesse instantanée est

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

$\vec{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MM'}$, il est donc tangent à la trajectoire.
On a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$ et

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$ dérivée temporelle de $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{R}$



3.b. Expression de $\vec{v}$ en coordonnées cartésiennes

On avait $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ et donc,

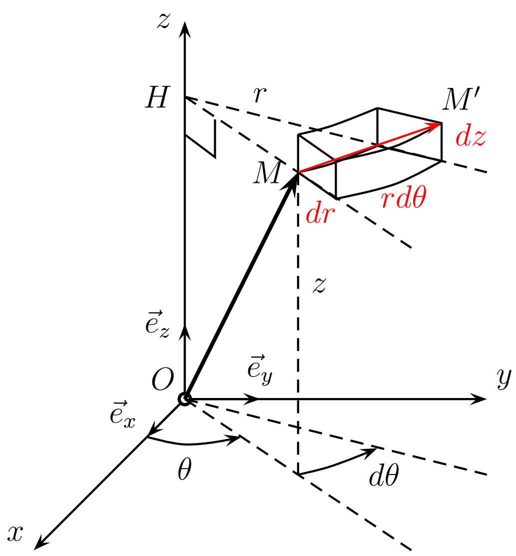
$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + x\frac{d\vec{e}_x}{dt} + \dot{y}\vec{e}_y + y\frac{d\vec{e}_y}{dt} + \dot{z}\vec{e}_z + z\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

Or, les vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont fixes dans $\mathcal{R}$, leur dérivée par rapport au temps est nulle soit $\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \vec{0}$, $\frac{d\vec{e}_y}{dt} = \vec{0}$ et $\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$ et il reste

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

d'où $v = ||\vec{v}|| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ la vitesse numérique.

Remarque : on peut aussi écrire $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$ et par division par dt, on obtient également $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$



3.c. En coordonnées cylindro–polaires

On avait, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ et donc

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{z}\vec{e}_z + z\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

Le vecteur $\vec{e}_z$ étant fixe dans $\mathcal{R}$, $\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$
$\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y$, $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y$ soit

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \Rightarrow \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

Vitesse numérique $v = ||\vec{v}|| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$.

Remarque : on peut retrouver ce résultat avec $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$

3.d. Dans la base de Frenet

Dans la base de Frenet, la vitesse et le vecteur tangent unitaire étant tous les deux tangents à la trajectoire et dans le sens de la trajectoire, on a simplement $\vec{v} = v\,\vec{e}_t$.

4. Vecteur accélération

4.a. Définition

L'accélération d'un point matériel M par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ est :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}}$$ dérivée temporelle du vecteur $\vec{v}$ par rapport à $\mathcal{R}$

4.b. Expression de $\vec{a}$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{e}_x + \dot{x}\frac{d\vec{e}_x}{dt} + \ddot{y}\vec{e}_y + \dot{y}\frac{d\vec{e}_y}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{z}\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

Or $\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \vec{0}$, $\frac{d\vec{e}_y}{dt} = \vec{0}$ et $\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$ et il reste

♡

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \quad \text{et} \quad a = ||\vec{a}|| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$ accélération numérique

En coordonnées cylindro–polaires :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_z + \dot{z}\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

avec $\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$, $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$ il reste,

✍

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

Remarques :

- La composante de $\vec{a}$ suivant $\vec{e}_r$, $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ est l'accélération radiale et $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{dr^2\dot{\theta}}{dt}$ est l'accélération orthoradiale.
- Accélération numérique, $a = ||\vec{a}|| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$
- En coordonnées polaires, $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$.

Dans la base de Frenet :
On admet le résultat suivant (qui peut se retrouver en coordonnées cylindro-polaires, cf plus loin) :

♡

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

où ρ représente le rayon de courbure , c'est-à-dire le rayon du cercle osculateur (varie en fonction de la position sur la courbe, non constant sauf dans le cas d'un cercle).

4.c. Différence entre base et référentiel

La vitesse ou l'accélération est définie par rapport à un référentiel (axes liés à un observateur muni d'une horloge et une origine) mais son expression vectorielle peut être donnée dans différentes bases. Il ne faut pas confondre base et référentiel.

III Exemples de mouvements

1. Mouvement uniformément accéléré

Si on a $\vec{a}$ un vecteur constant (champ de pesanteur uniforme par exemple), par intégrations successives et en tenant compte des conditions initiales,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \vec{a}.t + \vec{v}_0$$

avec $\vec{v}_0$ la vitesse du mobile à l'instant initial ($t = 0$) et ensuite,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM}_0$$

où M_0 est la position initiale de M.
Pour résoudre dans ce cas, il est inutile de projeter sur une base mais c'est un cas particulier et en général, il faut bien choisir la base de projection, c'est à dire le système de coordonnées à utiliser.

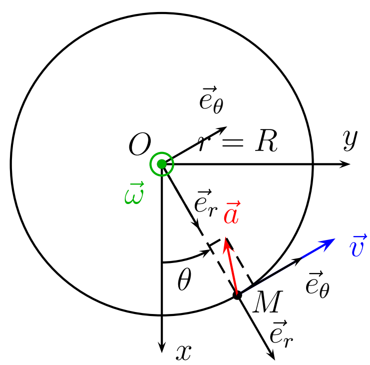
2. Mouvement quelconque, sens du vecteur accélération

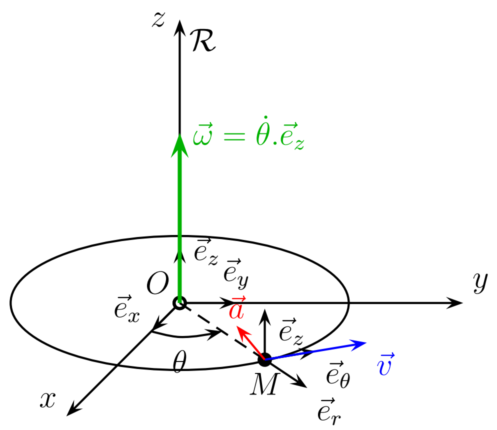
Par définition, l'accélération est la dérivé de la vitesse. On en déduit qu'elle est orientée vers « l'intérieur » des courbes lorsque l'on représente la trajectoire.

3. Mouvement circulaire

Les exemples suivants sont très importants et doivent être maitrisés à la perfection.

3.a. Vecteur vitesse et vecteur accélération





Le mobile décrit le cercle de rayon $r = R$ constant, de centre O à la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ (en radian par seconde).
Le mouvement étant plan, on utilise les coordonnées polaires le centre du repère est O en on place les axes de façon à avoir $\theta = (Ox,OM)$.

- Vitesse du mobile : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ et ici, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ avec $r = R$ constant d'où

$$\vec{v} = \frac{d(R\vec{e}_r)}{dt} = R\frac{d\vec{e}_r}{dt} = R\dot{\theta}.\vec{e}_\theta = v_\theta.\vec{e}_\theta \text{ avec } v_\theta = R\omega = R\dot{\theta}$$

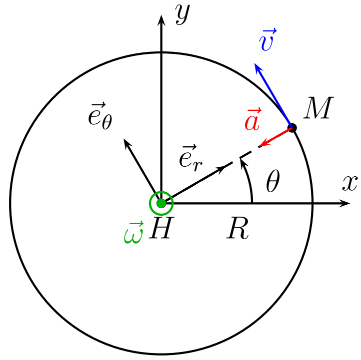
- Accélération du mobile :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_\theta}{dt} = \frac{d(v_\theta\vec{e}_\theta)}{dt} = \frac{dv_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + v_\theta\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{dv_\theta}{dt}\vec{e}_\theta - v_\theta\dot{\theta}\vec{e}_r \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv_\theta}{dt}.\vec{e}_\theta - \frac{v_\theta^2}{R}.\vec{e}_r$$

Remarque : on peut définir le vecteur rotation $\vec{\omega} = \dot{\theta}.\vec{e}_z$ de norme $\omega = \dot{\theta}$, de direction, celle de l'axe de rotation et dont le sens est donné par la règle du tire-bouchon.

3.b. Cas du mouvement circulaire uniforme

Dans le cas d'un MCU autour d'un point H de l'axe (Oz), $r = R = Cte$ et $\dot{\theta} = Cte$ et $\vec{\omega} = \omega.\vec{e}_z$ constant.



- $\vec{v}= R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \neq \vec{Cte}$ même si $v = R\dot{\theta} = cte$ car le vecteur change de direction à chaque instant, on a donc $\vec{a} \neq \vec{0}$.
- Le vecteur accélération est alors centripète : $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2.\overrightarrow{HM} = -r\omega^2\vec{e}_r = \frac{-v^2}{r}\vec{e}_r}$$

où H est le projeté de M sur l'axe de rotation.

Table des matières