

M₂ Dynamique du point matériel en référentiel galiléen

PCSI 2024 – 2025

Définitions :

- la dynamique relie le mouvement observé à **ses causes**.
- un point matériel est défini par 3 coordonnées (**cinématique**) et une **masse (dynamique)**.

I Forces

1. Définition et propriétés

Une force caractérise l'action subie par un système : **déformation et (ou) modification du mouvement**.

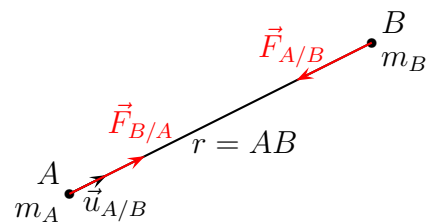
- On la modélise par un **vecteur \vec{F}** dont les caractéristiques sont : **la direction, le sens, la norme ou intensité en Newton ($1 \text{ N} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) et le point d'application**.
- Elle ne dépend pas du référentiel d'étude.
- Si un point M subit N actions caractérisées par les forces \vec{F}_i , l'action résultante est la force $\vec{F}_{\text{Totale}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$: **c'est une grandeur additive**.
 - ★ Si $\vec{F}_i = \vec{0}$ quelque soit i alors l'objet ne subit aucune force, il est **isolé**.
 - ★ Si $\vec{F}_{\text{Totale}} = \vec{0}$ alors que $\vec{F}_i \neq \vec{0} \forall i$ l'objet est **pseudo isolé**.

2. Interactions à distance

2.a. Interaction de gravitation et poids

Entre deux points matériels de masses m_A et m_B (toujours attractive),

$$\vec{F}_{A/B} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_{AB} = m_B \cdot \vec{G}_A(B) = -\vec{F}_{B/A}$$



où $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{r}$ est unitaire, \mathcal{G} est la constante de gravitation : $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\vec{G}_A(B)$ le champ de gravitation créé par A et ressenti au point B .

Dans le cas particulier d'un objet M à la surface de la Terre (masse $M_T \simeq 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, rayon $R_T \simeq 6400 \text{ km}$), on peut considérer que localement, la force de gravitation se traduit par une force \vec{p} verticale descendante qui ne dépend plus que de m la masse de M :

$$\vec{p} = m\vec{g}$$

où \vec{g} est l'accélération de pesanteur (d'intensité $g \simeq \mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} \simeq 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$) à la surface de la Terre.

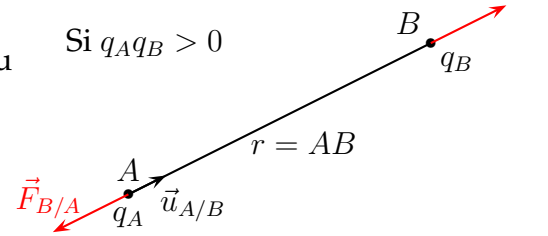
2.b. Interaction coulombienne, force électrostatique

Entre deux points matériels de charges q_A et q_B (attractive ou répulsive) est

$$\vec{F}_{A/B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_{AB}$$

avec $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9$ SI.

Et dans un champ électrostatique \vec{E} , la particule de charge q subit $\vec{F} = q\vec{E}$



3. Interactions de contact

L'étude théorique de ce type d'interaction est tellement complexe qu'on se contente d'utiliser des lois empiriques, issues de l'expérimentation.

3.a. Forces de frottement dans un fluide

On parle de **frottements fluides ou visqueux**.

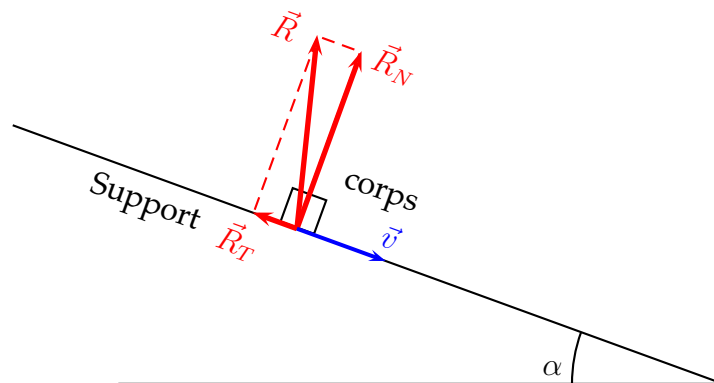
L'expression de la force de frottement \vec{f} dépend de la vitesse du mobile par rapport au fluide, de sa forme, du fluide ... en général on utilise :



- si v relativement faible, $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ avec α en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$.
- si v plus grande $\vec{f} = -\beta v\vec{v}$ proportionnelle à v^2 avec β en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$.

3.b. Forces de frottements au contact d'un solide en translation.

On parle de **frottements solides**.



On note $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ la réaction du support avec

- \vec{R}_N la réaction **normale, perpendiculaire au support et**
- \vec{R}_T la réaction **tangentielle due aux frottements**.

Lois de Coulomb (empiriques) :

- Si mouvement (glissement), la réaction tangentielle \vec{R}_T est **opposée** à la vitesse de glissement \vec{v} et $\|\vec{R}_T\| = \mu\|\vec{R}_N\|$ où μ est le coefficient dynamique de frottements.
- Si pas de mouvement, $\|\vec{R}_T\| < \mu_0\|\vec{R}_N\|$ où μ_0 est le coefficient statique de frottements ($\mu_0 \geq \mu$ en général).

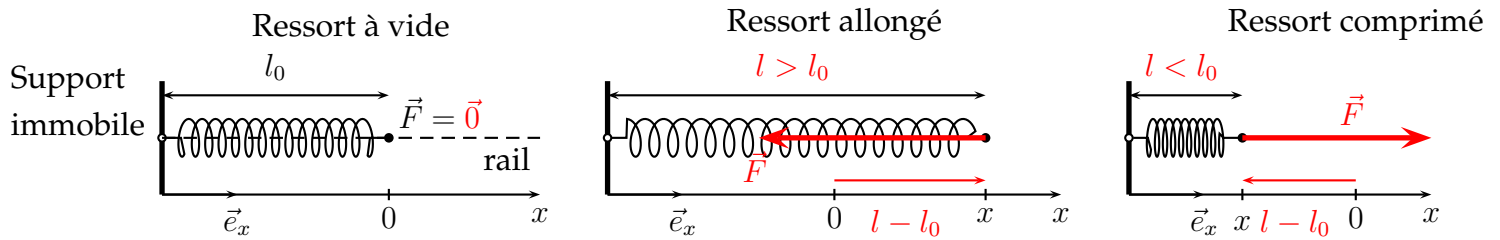
Remarques :

- Si il n'y a pas de frottement, $\vec{R} = \vec{R}_N$ normale au support qu'il y ait déplacement ou pas.
- La réaction normale doit être **dirigée du support vers le solide**. Lorsque le contact est rompu, la force **s'annule**.

3.c. Force de rappel élastique

Exercée par un ressort à spires non jointives de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 .

Son intensité est, par hypothèse, proportionnelle à **la déformation du ressort**.



\vec{F} , la force appliquée par le ressort est ici $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x$ où l est la longueur du ressort mais on aurait $\vec{F} = +k(l - l_0)\vec{e}_x$ si \vec{e}_x était orienté en sens inverse, on retiendra donc que

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$$

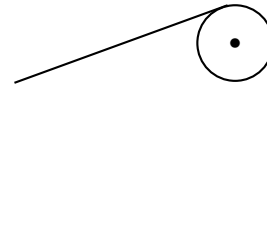
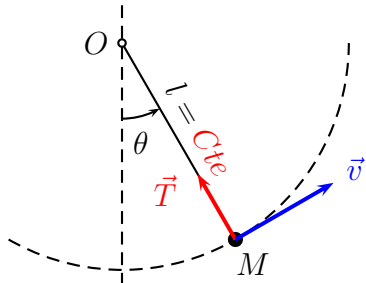
où \vec{u} est un vecteur unitaire dans la direction du ressort, orienté depuis le ressort vers la masse.

3.d. Tension d'un fil

On suppose le fil idéal c'est à dire de masse **nulle, inextensible et parfaitement souple**.

Exemples :

- Le pendule (ci-dessous à gauche) : le fil impose une contrainte au point mobile : **en coordonnées polaires, $r = l = Cte$ et $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$** .



Au cours du temps, \vec{T} n'est constant ni en direction ni en norme (maximale en $\theta = 0$) mais identique en tout point du fil à un instant donné.

- Figure de droite, en associant un fil idéal à une poulie idéale (de masse négligeable et qui peut tourner autour de son axe sans frottement), on peut modifier la direction de T sans en modifier l'intensité.

3.e. Autres forces usuelles

Nous rencontrerons et étudierons dans les détails d'autres forces comme :

- la poussée d'Archimède verticale ascendante et d'intensité égale au poids du volume de fluide déplacé (Cf. statique des fluides).
- la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$ à laquelle est soumise une particule de charge q et qui se déplace à la vitesse \vec{v} dans un champ électromagnétique.

II Lois de Newton

Principe d'inertie (première loi de Newton) : il existe une classe de référentiels, appelés référentiels Galiléen (ou d'inertie), par rapport auxquels un point matériel isolé ou pseudo isolé est en mouvement rectiligne uniforme (MRU) :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \iff \vec{v}(M/\mathcal{R}_g) = C\vec{t}e \iff \vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{0}$$

Application directe : un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k est maintenu vertical et muni d'un plateau sur lequel on a déposé une masse m . Déterminer la hauteur $z_{\text{éq}}$ de la masse à l'équilibre.

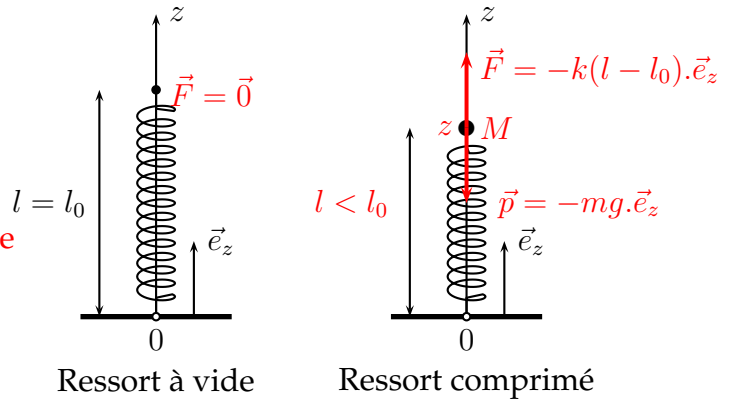
Dans le référentiel \mathcal{R} lié au sol et considéré comme galiléen, le système $\{ M \}$ est à l'équilibre.

Les forces appliquées au système sont :

- le poids $\vec{p} = -mg.\vec{e}_z$,
- la force de rappel du ressort

$$\vec{F} = \pm k(l - l_0).\vec{u} = -k(l - l_0).\vec{e}_z = -k(z - l_0).\vec{e}_z \text{ ici.}$$

À l'équilibre dans \mathcal{R} , on a $\vec{p} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -mg.\vec{e}_z - k(z_{\text{éq}} - l_0).\vec{e}_z = 0$ et par projection selon l'axe (Oz) , on en déduit $-mg - k(z_{\text{éq}} - l_0) = 0 \Rightarrow z_{\text{éq}} = l_0 - \frac{mg}{k} < l_0$



Principe fondamental de la dynamique (seconde loi de Newton) : dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , la résultante des forces \vec{F} qui s'exercent sur un point matériel M est égale à la dérivée temporelle de son vecteur quantité de mouvement $\vec{p}(M/\mathcal{R}_g) = m\vec{v}(M/\mathcal{R}_g)$ dans \mathcal{R}_g .

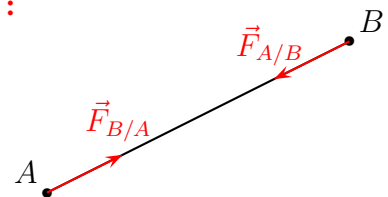
$$\vec{F} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \left(\frac{d(m\vec{v})}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_g)$$

Soient deux points matériels A et B en interaction.

Principe des actions réciproques (troisième loi de Newton) :

les forces d'interaction $\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$ sont opposées et s'exercent sur la droite (AB) .

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{A/B} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$



Remarque : Attention à ne pas oublier la deuxième partie de cette loi.

III Exemples d'application

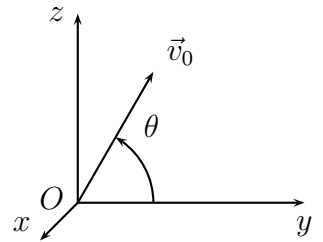
1. Chute libre

Soit un point matériel M de masse m lancé à la surface de la Terre avec une vitesse initiale \vec{v}_0 . On cherche à déterminer sa trajectoire dans le référentiel local.

Si pas de frottement

- ① Définition du système sur lequel s'appliquent les forces : point matériel $\{M\}$.
- ② Nature du référentiel choisi : référentiel local terrestre considéré ici comme galiléen.

- Origine : $O = M(t = 0)$ position initiale de M : fixe l'origine du repère d'espace et de temps.
- Système de coordonnées cartésiennes.
- Axe Oz vertical ascendant (selon $-\vec{g}$), axe Oy tel que \vec{v}_0 contenu dans (yOz) .



- ③ Bilan des forces agissant sur M : le poids : $\vec{p} = m\vec{g}$.
- ④ Énoncé du principe fondamental de la dynamique (PFD) dans ces conditions :

$$m\vec{a} = \vec{p} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

On a affaire à un mouvement à accélération constante.

- ⑤ Projection dans une base directe du référentiel : $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ pour obtenir les équations différentielles du mouvement.

$$m(\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z) = -mg\vec{e}_z \iff m \begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases} = m \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -g \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{x} = 0 & (1) \\ \ddot{y} = 0 & (2) \\ \ddot{z} = -g & (3) \end{cases}$$

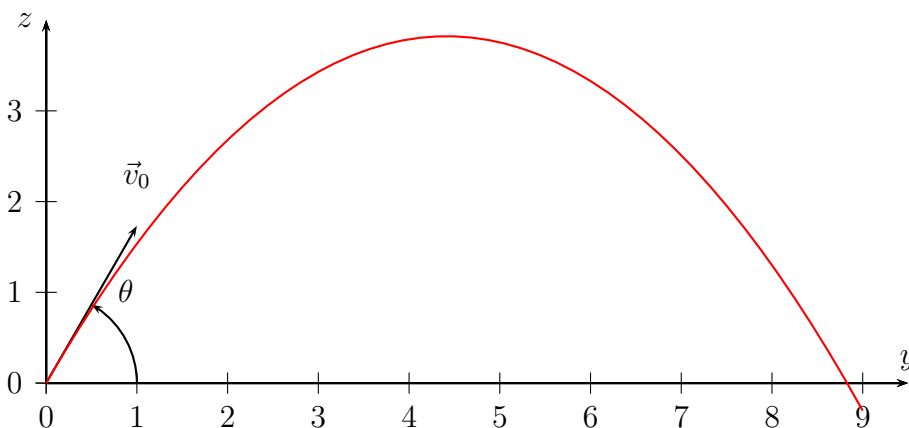
- ⑥ Résolution du système d'équations différentielles en tenant compte des conditions initiales. Il y a toujours autant d'équations et de CI que d'inconnues donc il existe une solution unique, on dit que la mécanique classique est déterministe.

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_{0x} = 0 \\ \dot{y} = v_{0y} = v_0 \cos \theta \\ \dot{z} = -gt + v_{0z} = -gt + v_0 \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + x_0 = 0 \Rightarrow \text{Mvt plan.} \\ y = v_0 t \cos \theta + y_0 = v_0 t \cos \theta \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta + z_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta \end{cases}$$

- ⑦ Trajectoire $z(x)$: on doit éliminer le paramètre t .

Or $y = v_0 t \cos \theta \Rightarrow t = \frac{y}{v_0 \cos \theta}$ si $\cos \theta \neq 0$ et $v_0 \neq 0$ et en remplaçant dans $z(t)$, on obtient :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} y^2 + y \tan \theta \quad \rightarrow \text{Il s'agit d'une parabole.}$$



La figure ci-dessus a été réalisée pour $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ et $\theta = 60^\circ$, le temps de vol est alors de 1,75 s.

⑧ Analyse physique :

- Si on avait $\vec{g} = \vec{0}$ (impesanteur), $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y = v_0(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y) = C\vec{t}e$: MRU avec $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v_0 = Cte$.
- Si $\cos \theta = 0$ ($\theta = \pm \frac{\pi}{2}$), $y = 0$: Mouvement est Rectiligne Uniformément Accéléré : MRUA.

Si frottements fluides proportionnels à v

- ① Système $\{M\}$.
- ② Même référentiel et mêmes conditions initiales.
- ③ Bilan des forces : le poids : $\vec{p} = m\vec{g}$ et la force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.
- ④ Énoncé du principe fondamental de la dynamique (PFD) dans ces conditions : $m\vec{a} = \vec{p} + \vec{f}$
- ⑤ Projection pour obtenir les équations différentielles du mouvement.

$$m \begin{cases} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{cases} = m \begin{cases} 0 & -\alpha \\ 0 & \\ -g & \end{cases} \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\alpha}{m}\dot{x} & (1) \\ \ddot{y} = -\frac{\alpha}{m}\dot{y} & (2) \\ \ddot{z} = -g - \frac{\alpha}{m}\dot{z} & (3) \end{cases}$$

⑥ Résolution du système d'équations différentielles en tenant compte des conditions initiales.

- Équation (1) à intégrer deux fois.
Posons $\tau = \frac{m}{\alpha}$ qui a la dimension d'une durée, c'est une durée caractéristique du problème.
(1) : $\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{\tau} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{x}{\tau} + 0 \Rightarrow x = A \cdot \exp(-\frac{t}{\tau})$ où A est une constante homogène à une distance et à $t = 0$, $x_0 = 0$ d'où $A = 0$ et $x = 0$ à tout instant : le mouvement reste plan.
- De même, (2) : $\ddot{y} = -\frac{\dot{y}}{\tau} \Rightarrow \dot{y} = A \cdot \exp(-\frac{t}{\tau})$ et à $t = 0$, $\dot{y}(0) = v_0 \cos \theta$ d'où $A = v_0 \cos \theta$ et $\dot{y} = v_0 \cos \theta \cdot \exp(-\frac{t}{\tau})$ et par intégration, $y = -v_0 \tau \cos \theta \exp(-\frac{t}{\tau}) + B$ or, à $t = 0$, $y = 0$ soit finalement,

$$y = v_0 \tau \cos \theta [1 - \exp(-\frac{t}{\tau})]$$

- Équation (3) : $\ddot{z} = -g - \frac{\dot{z}}{\tau}$ équation du premier ordre en \dot{z} et $\dot{z} = sol_P + sol_H = -g\tau + C e^{-\frac{t}{\tau}}$ où C est une constante homogène à une vitesse et à $t = 0$ $\dot{z} = v_0 \sin \theta \Rightarrow v_0 \sin \theta = -g\tau + C \Rightarrow C = v_0 \sin \theta + g\tau \Rightarrow \dot{z} = -g\tau + (v_0 \sin \theta + g\tau) e^{-\frac{t}{\tau}}$ soit enfin, par intégration, sachant que $z = 0$ à $t = 0$,

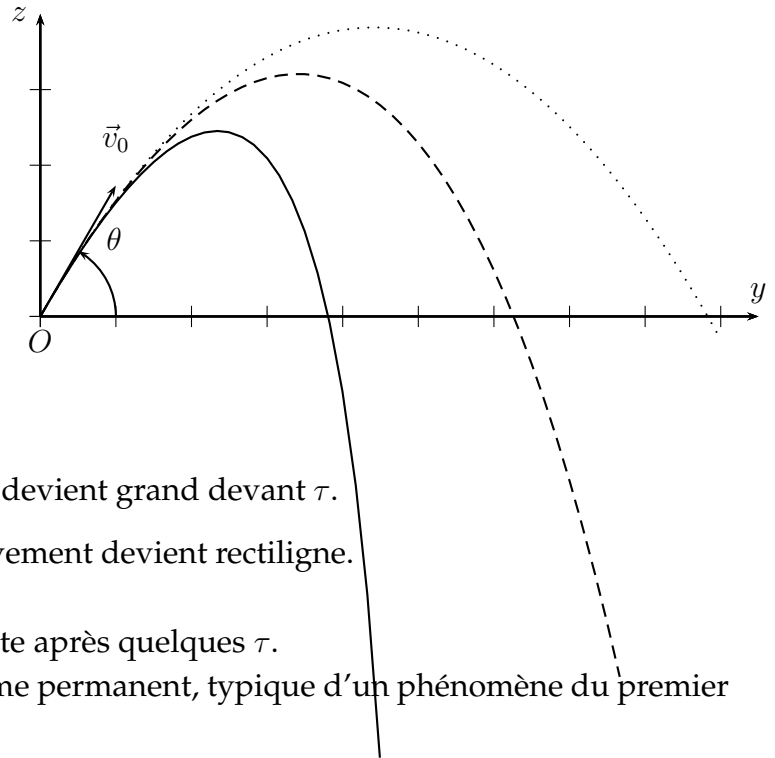
$$z = -g\tau t - \tau(v_0 \sin \theta + g\tau)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

⑦ Trajectoire, il est ici plus difficile d'éliminer t ... à l'aide d'un logiciel de calcul formel (Maple par exemple), on obtient l'allure suivante.

Il ne s'agit plus d'une parabole.

La figure ci-contre a été réalisée pour $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$, $\theta = 60^\circ$ et $\tau = 3 \text{ s}$ (même ordre de grandeur que τ).

La figure s'éloigne d'autant plus de la parabole que τ est faible devant le temps de vol.



⑧ Analyse physique du résultat : quand t devient grand devant τ .

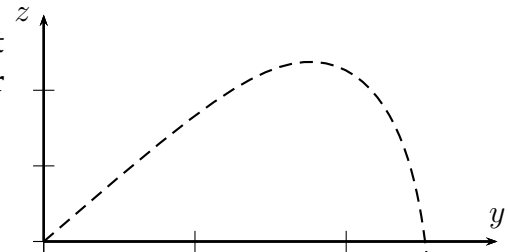
- $y \rightarrow v_0 \tau \cos \theta = Cte = y_\infty$: le mouvement devient rectiligne.
- $z \rightarrow -g\tau t + v_0 \tau \sin \theta$
- $\vec{v} \rightarrow -\tau \vec{g} = \vec{v}_l$: vitesse limite atteinte après quelques τ .

Régime transitoire suivi d'un régime permanent, typique d'un phénomène du premier ordre (Cf. EC₃).

Si frottements fluides proportionnels à v^2 : les équations étant plus difficiles à intégrer, on peut utiliser un logiciel de calcul pour effectuer une résolution numérique.

On obtient alors des formes proches de celle représentée ci-contre.

Remarque : on atteint plus rapidement le régime permanent.



2. Point matériel et ressort vertical, mouvement rectiligne sinusoïdal

Un point matériel est suspendu à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k . On le décale de L vers le bas à partir de sa position d'équilibre $x = 0$ et on le lâche sans vitesse initiale.

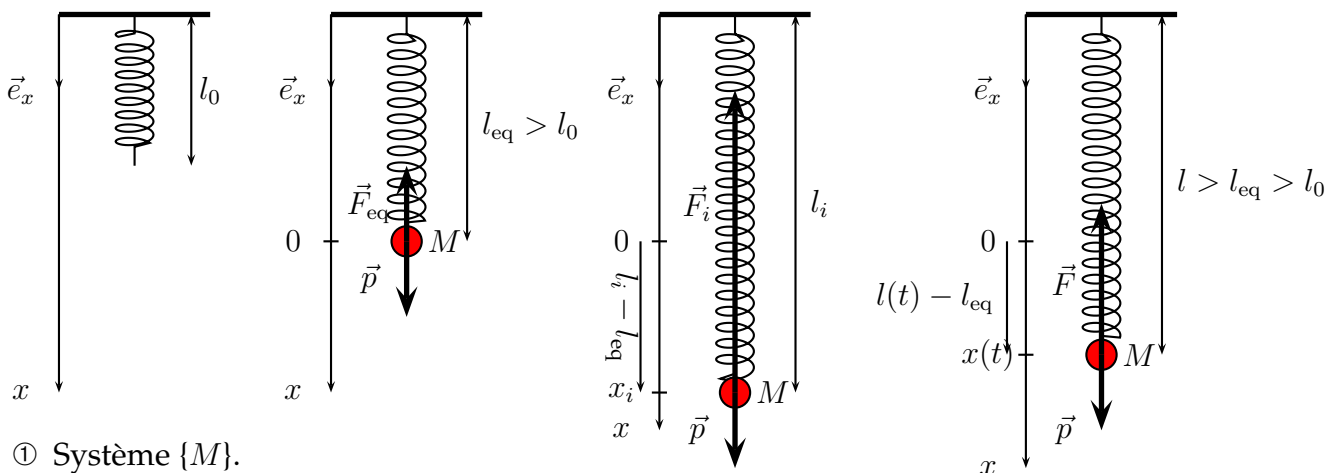
Déterminer $x(t)$ l'équation de son mouvement ultérieur.

Ressort à vide

A l'équilibre

Conditions initiales

Hors équilibre



① Système $\{M\}$.

② Référentiel : terrestre local, système de coordonnées cartésiennes.

- ③ Bilan des forces : le poids : $\vec{p} = m\vec{g}$ et la force de rappel $\vec{F}(t) = \pm k(l(t) - l_0)\vec{e}_x$.
Ici, $\vec{F}(t)$ est ascendant à l'instant t si $l(t) > l_0 \iff l(t) - l_0 > 0$ d'où $\vec{F}(t) = -k(l(t) - l_0)\vec{e}_x$
- ④ Énoncé du principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$m\vec{a}(t) = \vec{p} + \vec{F}(t) \iff m\ddot{x}(t)\vec{e}_x = mg\vec{e}_x - k(l(t) - l_0)\vec{e}_x$$

- ⑤ Projection sur l'axe vertical $m\ddot{x}(t) = mg - k(l(t) - l_0)$: équation différentielle. Pour la résoudre, on doit se ramener à un seul paramètre ($x(t)$ ici), il faut donc exprimer $l(t)$ en fonction de $x(t)$.

Ici, en ayant pris l'origine des élongations $x(t)$ à la position d'équilibre, $l(t) = l_{eq} + x(t)$ et en réinjectant dans l'équation différentielle, à tout instant, $m\ddot{x}(t) = mg - k(l_{eq} + x(t) - l_0) = mg - k(l_{eq} - l_0) - kx(t) = -kx(t) + mg - k(l_{eq} - l_0)$.

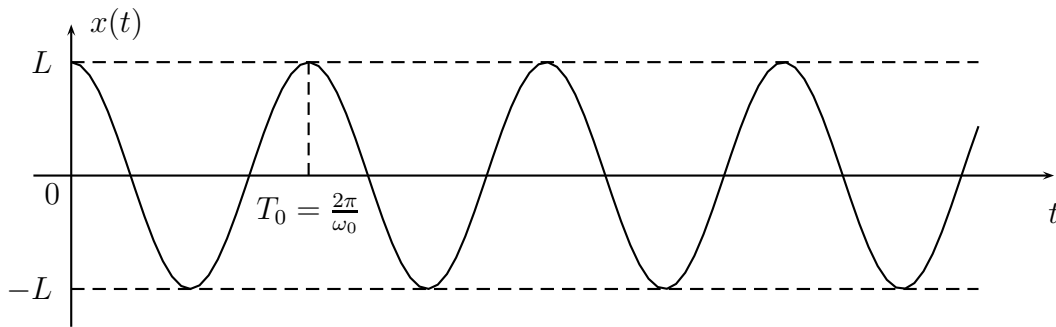
Or, en se plaçant à l'équilibre, $l = l_{eq}$ et $\ddot{x} = 0$ soit $0 = mg - k(l_{eq} - l_0)$: condition à l'équilibre. L'équation précédente se simplifie alors en

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) \iff \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ la pulsation propre.}$$

- ⑥ Résolution de l'équation différentielle en tenant compte des conditions initiales :
 $x(t)$ est de la forme $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ou encore $x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ où X_m l'amplitude, A et B sont des constantes homogènes à des longueurs et φ la phase à l'origine une constante homogène à un angle.

Or, à $t = 0$, $x_i = L = A$ et $v = \dot{x} = -\omega_0 A \sin \omega_0 t + \omega_0 B \cos \omega_0 t = \omega_0 B = 0$ à $t = 0$ d'où $B = 0$

$$\Rightarrow x(t) = L \cos \omega_0 t \quad \text{On parle de mouvement rectiligne sinusoïdal.}$$

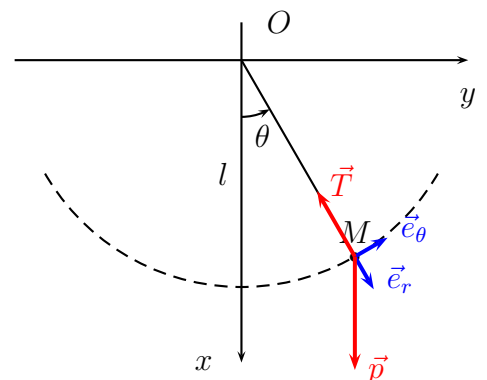


3. Pendule simple : mouvement circulaire.

On néglige tout frottement, la boule M , de masse m est lâchée, sans vitesse initiale depuis la position $\theta_0 \ll 1$ radian.

Le mouvement reste dans le plan Oxy .

- ① Système : boule du pendule $\{M\}$
- ② Référentiel terrestre local galiléen, système de coordonnées : polaires.
- ③ Forces : Poids \vec{p} et tension du fil \vec{T}
- ④ Principe fondamental de la dynamique : $\vec{p} + \vec{T} = m\vec{a}$.



⑤ Projection dans la base polaire :

mouvement circulaire donc $\vec{v} = l\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = l\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta - l\dot{\theta}^2.\vec{e}_r$.

De même, $\vec{T} = -T.\vec{e}_r$ et $\vec{p} = mg \cos \theta.\vec{e}_r - mg \sin \theta.\vec{e}_\theta$.

D'où, par projection du PFD sur \vec{e}_θ (fait disparaître T), $l\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$ que l'on peut mettre sous la forme canonique $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

⑥ Discussions.

On aura toujours $\theta \leq \theta_0 \ll 1$ rad, on peut donc simplifier l'équation précédente pour obtenir $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ et en tenant compte des conditions initiales, $\theta = \theta_0 \cos \omega_0 t$.

Par projection du PDF sur \vec{e}_r , on obtient également $-ml\dot{\theta}^2 = -T + mg \cos \theta$ d'où $T = m(g \cos \theta + l\dot{\theta}^2)$ dépend de θ donc du temps.

T maximale quand M passe tout en bas : $\theta = 0$ pour $\omega_0 t = \frac{\pi}{2}$ et $\dot{\theta} = -\omega_0 \theta_0 \sin \omega_0 t = -\omega_0 \theta_0$ et

$$T_{\max} = m(g + l\omega_0^2 \theta_0^2) = mg(1 + \theta_0^2) > p$$

4. Mesures de forces de frottement fluide

4.a. Méthode de la vitesse limite

On considère une bille de masse m en chute libre dans un fluide. On attend que la vitesse de la bille soit constante (v_{lim}). Peut-on en déduire la valeur de la force de frottement? Comment tester si la force est plutôt proportionnelle à v ou à v^2 ? Dans l'hypothèse proportionnelle, exprimer la valeur du coefficient de proportionnalité en fonction des données (on fera l'hypothèse que la poussée d'Archimède est négligeable ici).

Oui, principe d'inertie, $F=mg$ à ce moment là en norme. Pour tester la proportionnalité, il faut lacher plusieurs billes de masse différentes et mesurer leur vitesse limite. $\lambda = mg/v_{lim}$

4.b. Angle en face d'un sèche-cheveux

On suspend un objet de masse m au plafond via un fil très fin. On place un sèche-cheveux horizontale en face de la bille (on déplacera le sèche-cheveux si la bille bouge de façon à être pile en face). Le fil fait un angle α avec la verticale, en déduire la valeur de la force de frottement subie par l'objet en fonction de m, g et α .

Faire schéma $mg = T \cos \alpha$ et $F = T \sin \alpha$ d'où $F = mg \tan \alpha$

5. Frottement solide

La force de frottement solide est non-linéaire, il est donc fréquent de devoir formuler une hypothèse quant au glissement ou non et de devoir la valider.

Exemple : Un palet de masse m est posé sans vitesse initiale sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On note f le coefficient de frottement entre le support et le point matériel et on suppose que les coefficients statique et dynamique sont égaux.

1. À quelle condition le palet reste-t-il à l'équilibre?
2. Si cette condition n'est pas vérifiée, quelle est l'accélération du palet?
3. Décrire précisément le mouvement du palet. Comment expliquer que la norme de la vitesse augmente malgré les frottements?

1. schéma+projection : $\tan \alpha \leq f$

2. $g \sin \alpha - fg \cos \alpha \geq 0$ car on glisse
3. MRU, on prend de la vitesse malgré les frottements car ils sont constant! donc à partir du moment où le poids est suffisant, on accélère

IV Extension aux systèmes de points

On se place dans le cas de systèmes fermés : pas d'échange de matière avec l'extérieur.

1. Interlude mathématique : le barycentre appliqué à la physique

Définition : Soit un système de n points $\{M_i\}_{i \in [1, n]}$ et un ensemble de réels $\{m_i\}_{i \in [1, n]}$ de somme non nulle. On définit le **barycentre** G des points $\{M_i\}_{i \in [1, n]}$ affectés des poids $\{m_i\}_{i \in [1, n]}$ de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i}$$

Autrement dit, **il s'agit d'une moyenne pondérée.**

Remarque : Cette définition est indépendante du choix du point O . En particulier on en déduit que :

$$\overrightarrow{GG} = \vec{0} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i}}{\sum_i m_i} \Rightarrow \vec{0} = \sum_i m_i \overrightarrow{GM_i}$$

Définition : Le centre de masse d'un système physique est **le barycentre des points matériels affectée de leur masse.**

Exemple : on considère un système constitué d'une masse de 2 kg et d'une masse de 8 kg écartée de 1 m. Trouver la position du centre de masse du système.

$$\overrightarrow{M_1 G} = 2/10 \times \overrightarrow{M_1 M_1} + 8/10 \times \overrightarrow{M_1 M_2} \text{ donc entre } M_1 \text{ et } M_2 \text{ à } 0,2 \text{ m de } M_2$$

Associativité : Soit un premier système de points $\{M_i\}_{i \in [1, n]}$ associés aux poids $\{m_i\}_{i \in [1, n]}$ dont le barycentre est G_1 et un deuxième système de points $\{M'_i\}_{i \in [1, n']}$ associés aux poids $\{m'_i\}_{i \in [1, n']}$ et dont le barycentre est G_2 . On pose $m = \sum_{i=1}^n m_i$ et $m' = \sum_{i=1}^{n'} m'_i$.

Théorème (Associativité) : Alors, le barycentre de l'ensemble des points affectés de leur poids respectif est simplement **le barycentre de G_1 et G_2 affecté des poids m et m' .**

Exemple : On considère quatre points $A(0,0)$; $B(0,1)$; $C(1,1)$; $D(1,0)$ répartis sur un carré. Leur masses respectives sont 2; 8; 8; 2 (kg). À l'aide de l'exemple précédent et de l'associativité, trouver la position du barycentre de ces quatre points.

on fait 2 à 2 puis on utilise le résultat d'avant on le trouve au milieu dans une direction et à 4/5 dans l'autre.

Remarque : L'associativité permet de trouver facilement le centre de gravité d'un système complexe si l'on peut déterminer celui de sous-parties. Exemple : centre de gravité du système Terre-Lune. On cherche d'abord celui de la Terre, puis celui de la Lune, puis on fait le barycentre des deux.

Utilisation des symétrie dans le cas des systèmes homogènes : Dans le cas où la répartition de masse est homogène, il est possible d'utiliser les symétries pour trouver facilement le centre de masse. En particulier, s'il existe un plan de symétrie, alors le barycentre est forcément situé sur ce plan. Ainsi, si l'on peut trouver plusieurs plans de symétrie, on peut en déduire que le centre de masse est situé à leur intersection.

Exemple : Trouver le centre de masse d'un cylindre homogène de hauteur a et de rayon r . Trouver le centre de masse d'une sphère.

sur l'axe à $a/2$, au centre pour la sphère

2. Élément cinétique d'un système de points matériels

Soit un système de points matériels M_i de masse m_i , on définit :

- La masse totale du système : $m = \sum m_i$
- Le centre de masse ou centre d'inertie du système G comme étant le barycentre des points pondéré par leur masse
- L'impulsion (ou quantité de mouvement) du système : $\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i$. En utilisant la définition du centre de masse, on peut démontrer que $\vec{p} = m\vec{v}_G$.

Exercice : Démontrer la relation $\vec{p} = m\vec{v}(G)$ dans le cas d'un système de deux points.

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \frac{d}{dt} (m_1 \overrightarrow{OM}_1 + m_2 \overrightarrow{OM}_2) = \frac{d}{dt} (m \overrightarrow{OG}) = m \vec{v}(G)$$

3. Dynamique d'un système de point matériel

Loi de la quantité de mouvement : Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'impulsion d'un système fermé est égale à la somme des forces extérieures appliquées au système.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Remarque : On ne prend pas en compte les forces intérieures car d'après le principe des actions réciproques, **elles sont de sommes nulles.**

Par exemple, si on cherche le mouvement du centre de masse du système Terre-Lune autour du soleil, il est inutile de calculer la force exercée par la Terre sur la Lune et la force exercée par la Lune sur la Terre puisqu'elles se compensent.

Ce point est déterminant **dans le choix du système** : s'il y a des forces que l'on ne sait pas calculer, choisir un système tel que ces forces soient **des forces internes** peut-être un moyen de contourner la difficulté.

Du point de vue du centre de masse, tout se passe comme si l'on avait un point matériel G de masse m et soumis à une force \vec{F}_{ext} . Les forces intérieures ne sont pas « inutiles » pour autant : elles jouent un rôle dans **le mouvement des points M_i autour de leur centre de masse** (mouvement que l'on n'a pas cherché à décrire pour le moment, à part dans le cas du solide).

Table des matières

I Forces

1. Définition et propriétés
2. Interactions à distance
 - 2.a. Interaction de gravitation et poids
 - 2.b. Interaction coulombienne, force électrostatique
3. Interactions de contact
 - 3.a. Forces de frottement dans un fluide
 - 3.b. Forces de frottements au contact d'un solide en translation.
 - 3.c. Force de rappel élastique
 - 3.d. Tension d'un fil
 - 3.e. Autres forces usuelles

II Lois de Newton

III Exemples d'application

1. Chute libre
2. Point matériel et ressort vertical, mouvement rectiligne sinusoïdal
3. Pendule simple : mouvement circulaire.
4. Mesures de forces de frottement fluide
 - 4.a. Méthode de la vitesse limite
 - 4.b. Angle en face d'un sèche-cheveux
5. Frottement solide

IV Extension aux systèmes de points

1. Interlude mathématique : le barycentre appliqué à la physique
2. Élément cinétique d'un système de points matériels
3. Dynamique d'un système de point matériel