M_3 : Aspect énergétique et problèmes à un degré de liberté

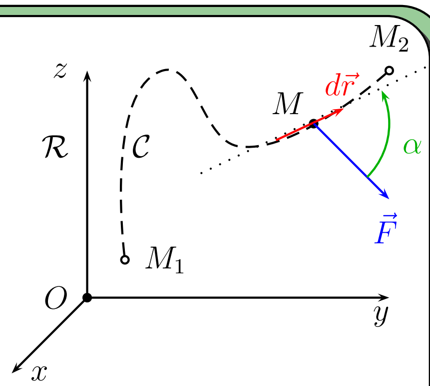
PCSI 2024 – 2025

I Travail et puissance d'une force

1. Travail d'une force dans un référentiel

1.a. Travail élémentaire

Définition :
le travail élémentaire noté $\delta W(\vec{F})/\mathcal{R}$ de la force $\vec{F}$ appliquée au point M qui s'est déplacé de $d\overrightarrow{OM} = d\vec{r}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est par définition :



$$\delta W(\vec{F})/\mathcal{R} = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \vec{F}.d\vec{r}$$

Unité : Joule 1 J $= 1$ kg.m^2.s^{-2}

Remarques :

- Comme le déplacement élémentaire $d\vec{r}$, δW dépend du référentiel dans lequel on se place.
- Le travail élémentaire est moteur si $\delta W > 0 \iff \vec{F}.d\vec{r} = ||\vec{F}||.||d\vec{r}||.\cos\alpha > 0$ si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ c'est à dire si $\vec{F}$ est "dans le sens" du déplacement.

1.b. Travail W de $\vec{F}$

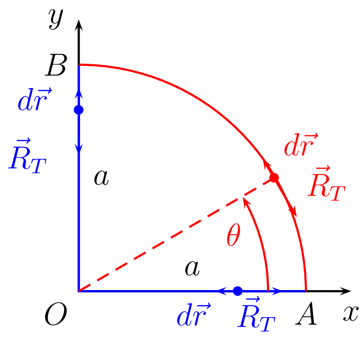
Définition : le travail de $\vec{F}$ entre deux positions M_1 et M_2 du mobile est :

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F})/\mathcal{R} = W = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\vec{r}$$

On dit que W est égal à la circulation du vecteur $\vec{F}$ le long de la trajectoire reliant M_1 à M_2.
Attention : sauf cas particuliers, $W_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta W \neq \vec{F}.\overrightarrow{M_1M_2}$.

Application directe : déterminer le travail de la force de frottements solides $\vec{R}_T$ de norme R_T constante et qui s'oppose toujours à $\vec{v}$.

1. Si la trajectoire suivie est (AOB) : on utilise le système de coordonnées cartésiennes :
   $d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$
   $W = \int_A^B \vec{R}_T.d\vec{r} = \int_A^O \vec{R}_T.d\vec{r} + \int_O^B \vec{R}_T.d\vec{r}$



$$W = \int_{x=a}^{0} R_T\vec{e}_x.dx\vec{e}_x + \int_{y=0}^{a} -R_T\vec{e}_y.dy\vec{e}_y = -R_Ta - R_Ta = -2aR_T$$

2. Si la trajectoire suivie est la portion de cercle AB : on utilise le système de coordonnées polaires :

$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta = ad\theta\vec{e}_\theta$

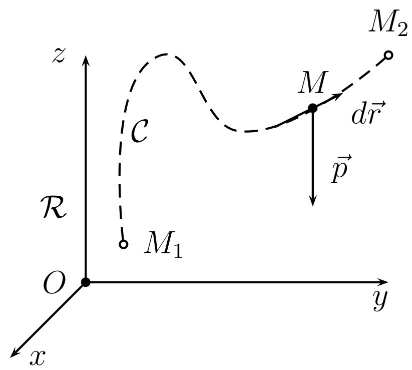
$$W = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} -R_T\vec{e}_\theta.ad\theta\vec{e}_\theta = -aR_T\frac{\pi}{2}$$

Comme W dépend du chemin suivi, δW n'est pas la forme différentielle d'une fonction W, c'est pourquoi on la note δW (variation élémentaire au cours d'un déplacement) et non dW.

1.c. Cas particuliers

- Si la force $\vec{F}$ est constante, $W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}.\int_{M_1}^{M_2} d\vec{r} = \vec{F}.\overrightarrow{M_1M_2}$.

  Exemple : le poids.
  si Oz est orienté vers le haut, $\vec{p} = -mg\vec{e}_z \Rightarrow \delta W = \vec{p}.d\vec{r} = -mg\vec{e}_z.(dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) = -mgdz$ qui est une forme intégrable puisqu'on sait intégrer



$$W = \int_{M_1}^{M_2} -mgdz = -mg\int_{M_1}^{M_2} dz = -mg[z(M_2) - z(M_1)] = -mg\Delta z$$

  On retiendra

$$W = \pm mg\Delta z$$

  et on déterminera le signe selon que le poids soit moteur ($W > 0$) ou pas.

- Si $\vec{F}$ est perpendiculaire au déplacement,

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} ||\vec{F}||.||\vec{dr}|| \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Exemples : tension du fil du pendule simple, force de liaison quand pas de frottement ($\vec{R} = \vec{R}_N$).

1.d. Travail de la résultante de forces

Si le point matériel est soumis à $\vec{F}_i$ forces de résultante $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$, alors le travail élémentaire total est

$$\delta W = \vec{F}.d\vec{r} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right).d\vec{r} = \sum_i(\vec{F}_i.d\vec{r}) = \sum_i \delta W_i \text{ et } W = \sum_i W_i$$

2. Puissance d'une force dans un référentiel

Définition : la puissance instantanée $\mathcal{P}(\vec{F})/\mathcal{R}$ de la force $\vec{F}$ appliquée au point M qui se déplace avec la vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$ est par définition :

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

Unité : Watt W : 1 W = 1 J.s^{-1} = 1 kg.m^2.s^{-3}.

3. Théorème de la puissance cinétique

Théorème de la puissance cinétique : dans un référentiel galiléen, la puissance de la force exercée sur un point matériel est égale à la dérivée temporelle de son énergie cinétique.

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v} = \frac{dE_c}{dt} \qquad \textbf{avec } E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Démonstration : pour un point M de masse m, d'accélération $\vec{a}$ et soumis à $\vec{F}$, dans un référentiel galiléen : $\vec{F} = m\vec{a}$ d'après le PFD.

✍ $$\Rightarrow \mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{dE_c}{dt} \quad \text{par définition de l'énergie cinétique.}$$

4. Théorème de l'énergie cinétique

Théorème de l'énergie cinétique : dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail de la résultante des forces appliquées entre ces deux instants

$$W = \Delta E_c$$

✍ Démonstration : Comme $\mathcal{P}.dt = \delta W = dEc$, entre deux instants t_1 et t_2,

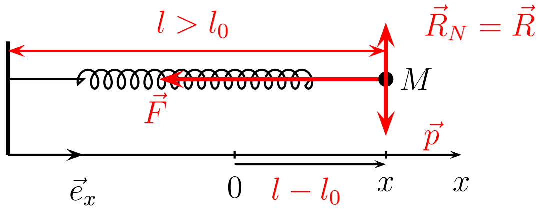
$$W = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}.dt = \int_{t_1}^{t_2} dE_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = \Delta E_c$$

Remarques :

- si le travail est moteur $W > 0$ "$\vec{F}$ dans le sens" du déplacement alors $\Delta E_c > 0$ et v augmente.
- si le travail est résistant $W < 0$, alors $\Delta E_c < 0$ et v diminue.
- si aucune force ne travaille, $\Delta E_c = 0$ et la vitesse numérique v reste constante.

II Problème à 1 degré de liberté : étude Générale

Définition : on parle de problème à un degré de liberté si la position du système est définie par un seul paramètre x, θ, r, ξ ...



Exemple : ressort horizontal.
La position du mobile ne dépend que du paramètre x.

1. Méthode de résolution

Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement (une seule équation scalaire car problème à un degré de liberté), une méthode énergétique sera préférable à l'utilisation du PFD (Cf. M_2).

En effet, le théorème de la puissance cinétique ou de la puissance mécanique fournira une seule équation scalaire au lieu du système d'équations issues des projections du PFD sur les axes.

Exemple : trouver l'équation différentielle du mouvement de M par application du TPC.
$\vec{p}$ et $\vec{R}$ normales au mouvement, ne travaillent pas $\rightarrow$ puissances nulles.
Reste la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x$ dont la puissance est

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v} = -kx\vec{e}_x(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z) = -kx\dot{x}$$

et $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, par dérivation par rapport au temps, $\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} = m\dot{x}\ddot{x}$ or, d'après le théorème de la puissance cinétique,

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}) \iff m\dot{x}\ddot{x} = -kx\dot{x}$$

Deux solutions :

- soit $\dot{x} = 0\ \forall t$, c'est la solution, dite "triviale" correspondant au repos.
- soit $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\omega_0^2 x \Rightarrow x = x_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$, x_0 et φ sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales (Cf. M_2).

2. Forces conservatives, énergie potentielle

2.a. Exemple du ressort et définition

Toujours sur le même exemple, la force de rappel élastique est $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x$
Son travail élémentaire est $\delta W = \vec{F}.\vec{dr}$ avec $\vec{dr} = dx\vec{e}_x$ soit

$\delta W = -kxdx$: forme différentielle (on sait intégrer) $\delta W = -d(\frac{1}{2}kx^2 + Cte)$

Lors du déplacement de son point d'application, le travail de $\vec{F}$ ne dépend que des positions initiale et finale de M et non du chemin suivi,

Définition : on dit que $\vec{F}$ est une force conservative ou encore qu'elle dérive d'une énergie potentielle E_p avec

$$dE_p = -\delta W \iff E_p = -\int \vec{F}.\vec{dr} \qquad \textbf{soit} \qquad F_x = -\frac{dE_p}{dx} \textbf{ si un seul paramètre } x.$$

Exemple : ici, pour le ressort, si on considère (logiquement) que l'énergie potentielle est nulle quand le ressort n'est pas déformé (Cf. interprétation physique).

$$E_{p,\text{éla}} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

Dans le cas général, E_p est définie à une constante près qu'on détermine si on impose une référence des énergies potentielles.

Si $\vec{F}$ est une force conservative, on a alors entre deux positions M_1 et M_2,

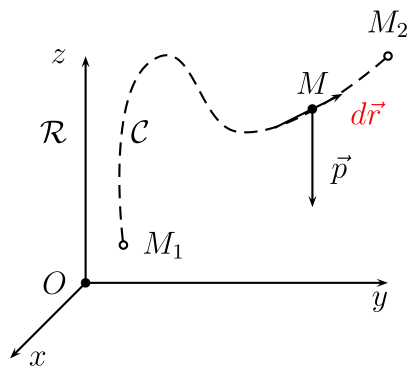
$$\delta W = -dE_p \Rightarrow W_{1\to 2} = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2}$$

2.b. Autre force conservative : le poids

Si on considère le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ avec Oz vertical ascendant vecteur constant,
$\vec{p} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ et $dE_p = -\delta W = -\vec{p}.\vec{dr}$ avec
$\vec{dr} = dx\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$ d'où $dE_p = mgdz = d(mgz + C)$ et si on prend $E_p = 0$ pour $z = 0$ alors $C = 0$
On retiendra

$$E_{p,\text{pes}} = \pm mgz + C$$

$+$ si Oz vertical ascendant et $-$ si vertical descendant.



2.c. Utilisation pratique

Pour calculer le travail d'une force conservative, il sera plus facile de calculer sa variation d'énergie potentielle puis de prendre $W = -\Delta E_p$ que de calculer la circulation de la force le long de la trajectoire $W = \int \vec{F}.\vec{dr}$.

Exemple : le travail du poids entre les positions M_1 d'altitude z_1 et M_2 d'altitude z_2 : en considérant Oz vertical ascendant, $W = -\Delta E_p = -[E_p(z_2) - E_p(z_1)] = -(mgz_2 - mgz_1) = -mg(z_2 - z_1) < 0$ si $z_2 > z_1$: cohérent car le poids s'oppose au déplacement.

2.d. Interprétation physique de l'E_p

La force effectue un travail (exemple : pour allonger le ressort) cette énergie dépensée par l'opérateur est stockée par le ressort sous forme d'énergie potentielle prête à être restituée.

2.e. Circulation d'une force conservative le long d'une courbe fermée

Comme le travail de la force ne dépend que des positions initiales et finales du mobile, s'il parcourt une courbe fermée, le travail est nul : $W_{M\to M} = \oint \vec{F}.\vec{dr} = 0$

2.f. Forces non conservatives

Le travail de ces forces dépend du chemin suivi par la particule.

Exemple : force de frottement : l'énergie dépensée par l'opérateur est dissipée sous forme calorifique au lieu d'être stockée sous forme d'E_p, le travail de la force toujours résistif donc $W < 0$ c'est à dire $W \neq 0$ même sur un contour fermé.

3. Énergie mécanique

Soit un point matériel M soumis à des forces conservatives $\vec{F}_c$ dérivant de E_p et des forces non conservatives $\vec{F}_{nc}$. Soit $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$ la résultante.
D'après le théorème de l'E_c, entre deux instants t_1 et t_2, $W = W_c + W_{nc} = \Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}$
$\vec{F}_c$ est conservative donc $W_c = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2}$

$$\Rightarrow E_{c2} - E_{c1} = E_{p1} - E_{p2} + W_{nc} \Rightarrow E_{c2} + E_{p2} - (E_{c1} + E_{p1}) = W_{nc}$$

Définition : on pose $E_m = E_c + E_p$, l'énergie mécanique du point M (dépend du référentiel).

On a donc $E_{c2} + E_{p2} - (E_{c1} + E_{p1}) = E_{m2} - E_{m1} \Rightarrow \Delta E_m = W_{nc}$

Théorème de l'énergie mécanique : en référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel est égale au travail des forces non conservatives

$$\Delta E_m = W_{nc}$$

Pendant une durée dt, le théorème précédent s'écrit sous la forme différentielle $dE_m = \delta W_{nc}$ et en divisant par dt, on en déduit $\frac{dE_m}{dt} = \frac{\delta W_{nc}}{dt}$ d'où le

Théorème de la puissance mécanique : en référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la puissance des forces non conservatives

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc}$$

Définition : l'évolution d'un point matériel est conservative si toutes les forces qui lui sont appliquées sont conservatives ou ne travaillent pas. On a alors

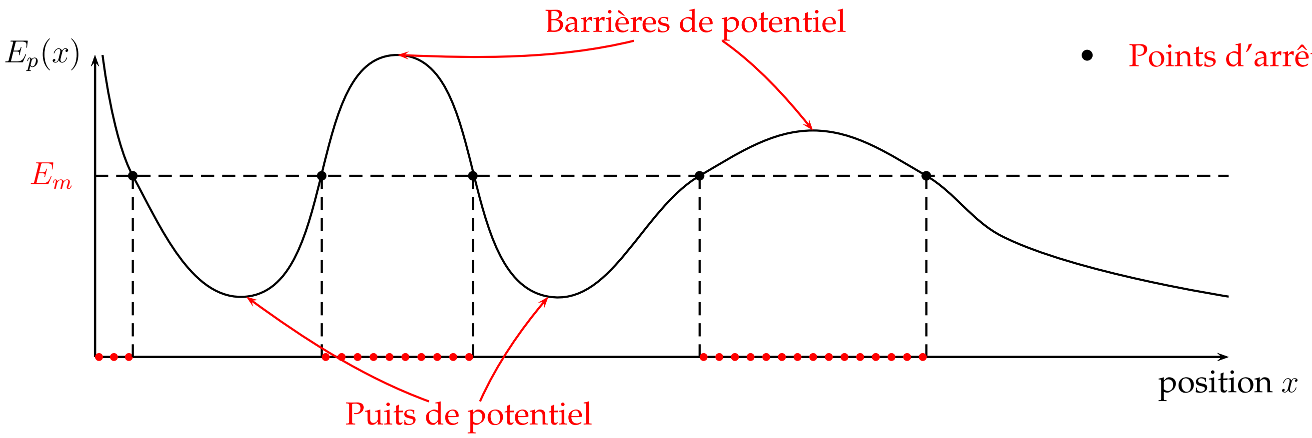
$$dE_m = \delta W_{nc} = 0 \iff E_m = Cte(CI)$$

- Justifie à posteriori l'appellation forces conservatives.
- La constante dépend des conditions initiales (CI).
- Est appelée **intégrale première du mouvement** toute quantité qui se conserve au cours du mouvement et qui n'est fonction que du paramètre et de ses dérivées premières par rapport au temps : on peut mettre cette équation sous la forme $f(x,\dot{x}) = 0$.

4. Discussion graphique

4.a. Valeurs permises, différents états d'une particule

Soit un mobile dont l'énergie potentielle E_p ne dépend que de la position (x ou θ, ξ ...) : $E_p(x)$ dont le profil est le suivant.



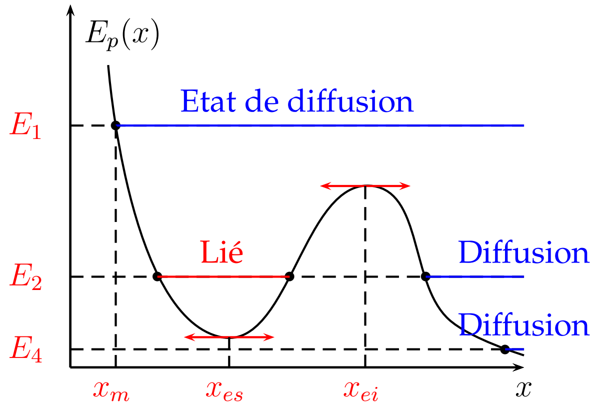
Sachant que $E_m = E_p + E_c$ et que E_c est toujours positive ou nulle, on a nécessairement

$$E_p \leqslant E_m = Cte(CI)$$

Les valeurs de x correspondantes à $E_m < E_p$ sont donc interdites pour le mobile : parties hachurées.

En fonction des conditions initiales, $E_m = Cte$ peut prendre différentes valeurs :

- Si $E_m = E_1$, le mobile est dans un état de diffusion, c'est à dire que x peut prendre n'importe quelle valeur supérieure à x_m.
- Si $E_m = E_2$
  et $x < x_{ei}$ initialement, le mobile reste entre les deux points d'arrêt, il est dans un état lié.
  et $x > x_{ei}$ initialement, état de diffusion.
- Si $E_m = E_4$, le mobile est dans un état de diffusion.



4.b. Équilibres et conditions de stabilité

Les conditions nécessaires et suffisantes à l'équilibre dans $\mathcal{R}$ d'un mobile de vitesse $v = \dot{x}$ et soumis à $\vec{F}$ sont : $v = 0$ et $F = 0$.
Or $\vec{F}$ dérive de $E_p(x)$: $F_x = -\frac{dE_p}{dx}$. Il faut donc que $\frac{dE_p}{dx} = 0$
ce qui correspond à un extremum (mini ou maxi) de $E_p(x)$.
Ici, l'équilibre est possible en x_{es} et x_{ei}.

Mais l'équilibre n'est stable que si, quand on déplace légèrement le mobile de $dx = x - x_e$ avec x_e la position d'équilibre, la force F qui apparaît tend à le ramener vers sa position d'équilibre c'est à dire $F_x(x) < 0$ si $x > x_e$ et $F_x(x) > 0$ si $x < x_e$.

Conclusion :

♡

- Equilibre stable $\iff \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_e} > 0 \iff$ minimum d'$E_p(x)$
- Equilibre instable $\iff \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_e} < 0 \iff$ maximum d'$E_p(x)$

Sur la figure, au creux du puits de potentiel (x_{es}) : équilibre stable et au sommet de la barrière de potentiel (x_{ei}), équilibre instable.
On peut faire l'analogie avec une bille sur un rail : son énergie potentielle est proportionnelle à son altitude.

4.c. Petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable

Pour des valeurs de x proches de x_e une position d'équilibre stable, c'est à dire au fond d'un puits de potentiel, la courbe $E_p(x)$ se confond avec une parabole de minimum $E_p(x_e)$ et dont la concavité est orientée vers le haut orientée vers le haut.
En posant $K = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_e} > 0$, le cours de maths sur les développements limités confirmera que

$$E_p(x) \simeq E_p(x_e) + \frac{1}{2}K(x - x_e)^2$$

De plus, si le système ne comporte pas d'élément dissipatif, l'énergie mécanique E_m est constante et $E_m = E_p + E_c$ avec $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ soit

$$E_m = E_p(x_e) + \frac{1}{2}K(x - x_e)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

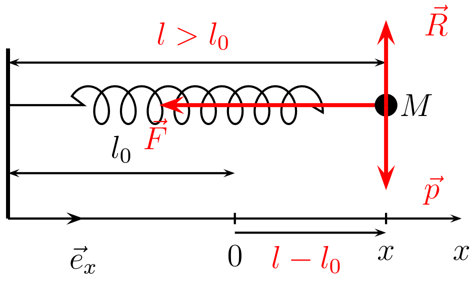
et en dérivant par rapport au temps (TPM) puis en simplifiant par $\dot{x} \neq 0$ (sauf solution triviale), on obtient $m\ddot{x} + K(x - x_e) = 0$ et en posant $X = x - x_e$, on retrouve

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad (E) \qquad \text{avec} \qquad \omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow X = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \Rightarrow x = x_e + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Conclusion : si on perturbe légèrement un système initialement dans un état d'équilibre stable, il va osciller avec la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ autour de sa position d'équilibre initiale : oscillateur harmonique soumis à une force de rappel élastique $\vec{F} = -K(x - x_e).\vec{e}_x$.

III Exemple de l'oscillateur mécanique linéaire en régime libre

1. Oscillateur harmonique

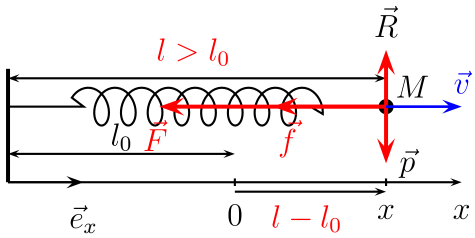


Exemple : masse accrochée à un ressort horizontal.

Trouver l'équation du mouvement par application du TPM.
La seule force non conservative, $\vec{R} = \vec{R}_N$ (pas de frottements) ne travaille pas.
L'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas $E_{p,pes} = Cte = 0$ et la force de rappel $\vec{F}$ dérive de $E_{p,el} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$, on a donc $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$
Par application du théorème de la puissance mécanique à la masse M dans le référentiel d'étude galiléen, $\frac{dE_m}{dt} = 0$ avec $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ soit $m.\dot{x}.\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$ et en éliminant la solution triviale, $\dot{x} = 0$ (M immobile), on obtient l'équation différentielle du mouvement
$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ soit $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

2. Oscillateur linéaire amorti par frottements fluides

2.a. Exemple et équation différentielle



Si on reprend l'exemple de la masse accrochée au ressort, il faut ajouter $\vec{f} = -\alpha.\vec{v}$ dans l'expression du PFD.
Ayant un mouvement à un seul paramètre, on peut aussi utiliser des considérations énergétiques : $\vec{f}$ étant la seule force non conservative, par exemple, par application du TPM,

$$dE_m = \delta W_{\vec{f}} = \mathcal{P}_{\vec{f}}dt = \vec{f}.\vec{v}dt = -\alpha\vec{v}.\vec{v}dt = -\alpha v^2 dt < 0$$

avec $v^2 = \dot{x}^2$ et $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$.

$$d(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2) = -\alpha\dot{x}^2 dt \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

(E) comporte en plus un terme qui traduit la dissipation d'énergie par frottement (terme en $\dot{x}$).

Remarque : dans le cas du pendule simple, on aboutit à $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$.

2.b. Équation canonique et analogie électromécanique

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$, on peut écrire l'équation différentielle sous la forme : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec Q le facteur de qualité et ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur.

Remarque : on peut aussi écrire $\ddot{x} + \frac{2\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2m}{\alpha}$ le temps de relaxation de l'oscillateur.

On retrouve ainsi une équation formellement identique à celle qui régit l'évolution de la tension aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série en régime libre (Cf. Chap EC_4) avec :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \longleftrightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Électronique	charge q	admittance L	Capacité C	résistance R
Mécanique	élongation x	masse m	inv. cst. rap. $1/k$	frottement α

On en déduit :

Électronique	intensité i	puls. propre $\sqrt{\frac{1}{LC}}$	fact. qualité $\frac{L\omega_0}{R}$	énergie $\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2C}q^2$
Mécanique	vitesse v	puls. propre $\sqrt{\frac{k}{m}}$	fact. qualité $\frac{m\omega_0}{\alpha}$	énergie $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

2.c. Rappels : différents régimes

Se reporter à EC_4 : on doit résoudre l'équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ et selon le signe du discriminant $\Delta = (\frac{\omega_0}{Q})^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\frac{1}{4Q^2} - 1)$, on obtient 3 régimes différents :

- Régime apériodique $\iff$ $\Delta > 0$ $\iff$ $Q < \frac{1}{2}$, deux solutions r_1 et r_2 réelles négatives et retour à l'équilibre sans oscillation.

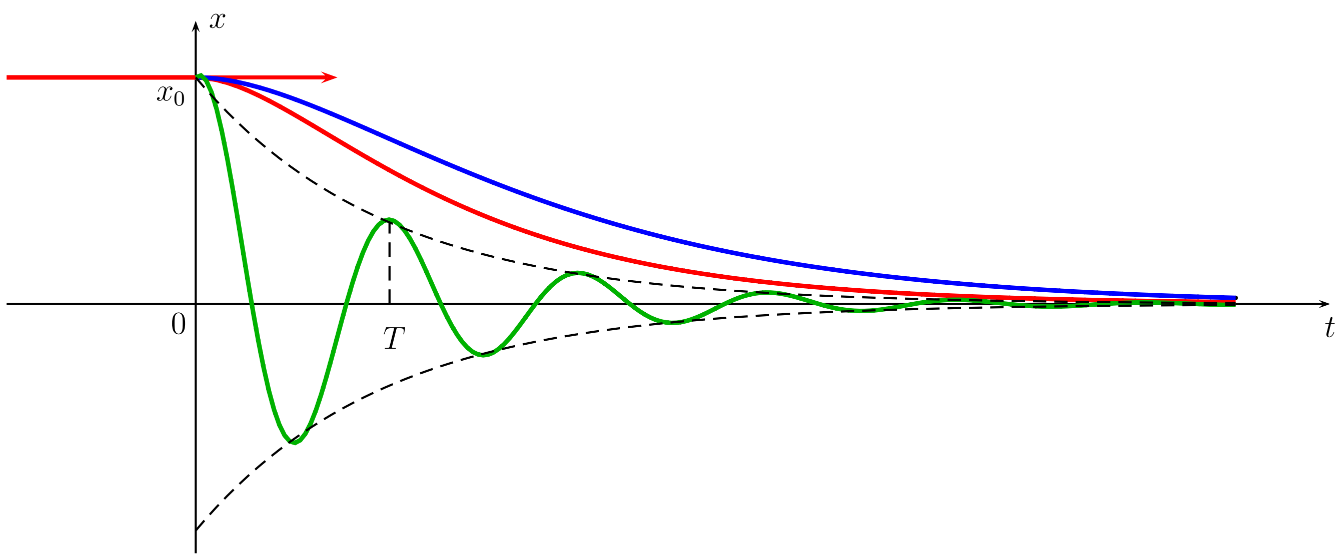
$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \qquad \text{avec} \qquad r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} < 0$$

- Régime critique $\iff$ $\Delta = 0$ $\iff$ $Q = \frac{1}{2}$ une seule solution réelle, retour à l'équilibre sans oscillation et plus rapidement avec les mêmes conditions initiales.

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

- Régime pseudo-périodique $\iff$ $\Delta < 0$ $\iff$ $Q > \frac{1}{2}$ deux solutions complexes conjuguées et retour à l'équilibre après ($\simeq Q$) oscillations.

$$x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{la pseudo pulsation}$$



Dans le cas du régime pseudo périodique, on peut définir le décrément logarithmique

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x(t)}{x(t+nT)} = \frac{1}{n}\ln\frac{Ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t+\varphi)}{Ae^{-\frac{t+nT}{\tau}}\cos[\omega(t+nT)+\varphi]}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{n}\ln e^{\frac{nT}{\tau}} = \frac{T}{\tau} = \frac{\pi}{Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \simeq \frac{\pi}{Q}$$

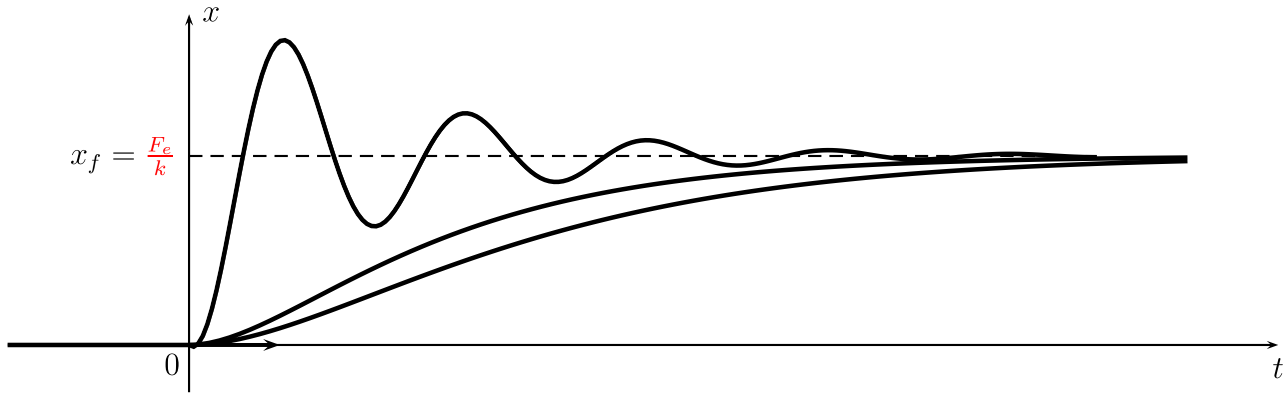
avec $n \geqslant 2$ entier et T la pseudo période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Exemple : sur la courbe ci-dessus, on lit $x(0) = 3$ cm et $x(2T) = 0{,}4$ cm, on en déduit

$$\delta = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{0{,}4} \simeq 1{,}0 \text{ et } \delta = \frac{\pi}{Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \simeq \frac{\pi}{Q} \Rightarrow Q \simeq 3{,}1$$

2.d. Réponse d'un oscillateur harmonique linéaire à un échelon de force

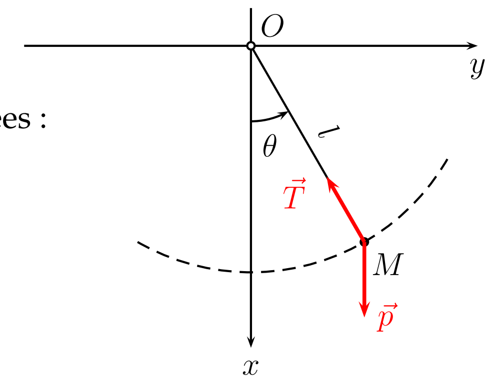
Si par exemple, on soumet le ressort à un échelon de force (dépôt d'une masse sur un plateau suspendu à un ressort par exemple), la réponse est analogue à celle observée aux bornes du condensateur d'un circuit RLC quand il est soumis à un échelon de tension.



Remarque : en notant F_e la force supplémentaire appliquée à M, le PFD appliqué à M permet d'obtenir l'équation différentielle $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_e}{m} = \omega_0^2\frac{F_e}{k}$.

IV Cas du pendule simple

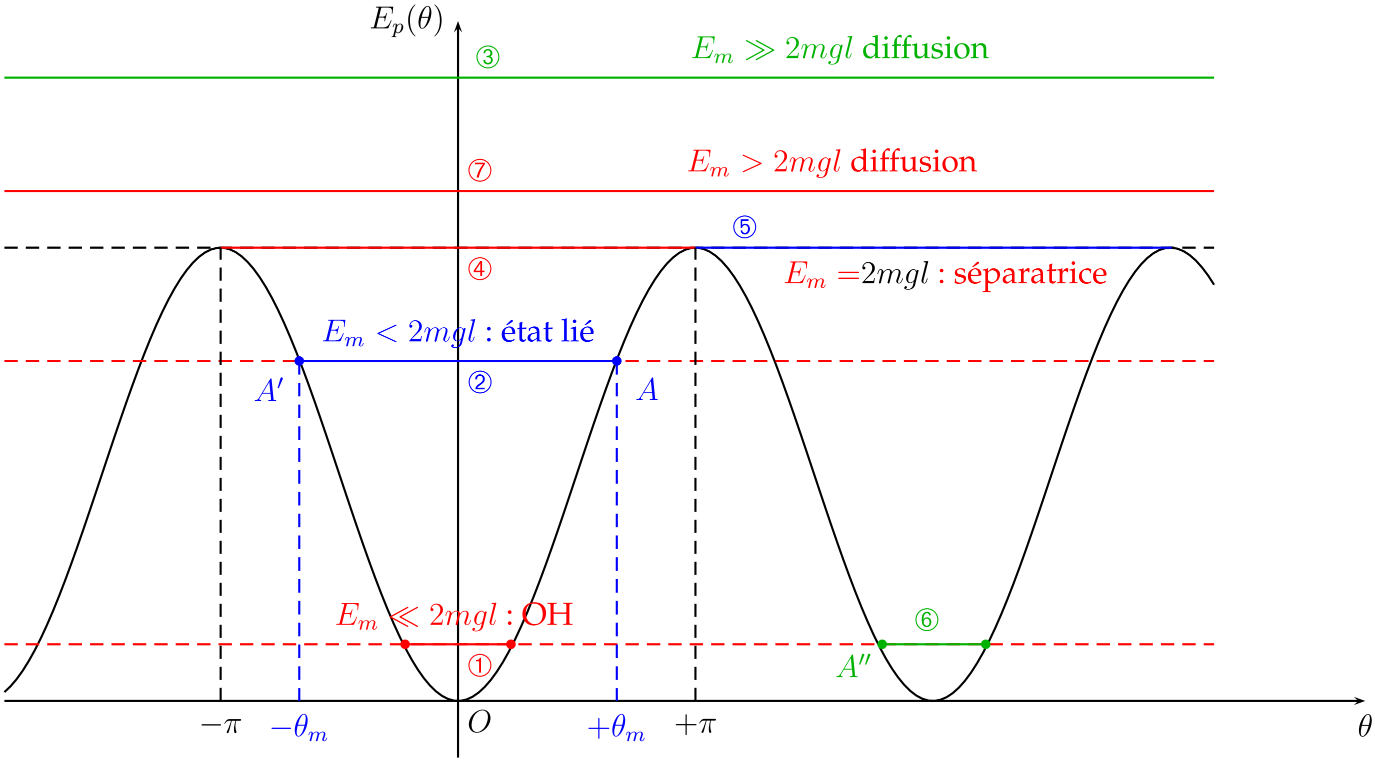
Problème à un degré de liberté : θ ici.



- Référentiel terrestre local galiléen, système de coordonnées : polaires.
- Système : boule du pendule $\{M\}$
- Forces : Poids $\vec{p}$ et tension du fil $\vec{T}$

Comme il n'y a pas de dissipation de l'énergie, utilisons la conservation de l'énergie :

- Énergie potentielle :
  $\vec{T}$ perpendiculaire au mouvement ne travaille pas et on en déduit $E_p = E_{p,pes} = -mgx + Cte$.
  Si on choisit $E_p(x) = 0$ pour $x = l$, $E_p = mg(l-x)$ avec $x = l\cos\theta$ d'où $E_p = mgl(1-\cos\theta)$



- Énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta) = Cte$
- Équation différentielle : par dérivation de l'équation précédente (intégrale première du mouvement).

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \quad \text{(E') équ. diff. non linéaire.}$$

V Gradient et énergie potentielle

Nous verrons plus tard dans l'année l'opérateur gradient, qui s'applique à une fonction scalaire (≠ vecteurs) de plusieurs variables $f(x,y,z)$ (ou $f(r,\theta,z)$ ou $f(r,\theta,\varphi)$) et qui est noté $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$. Son expression dépend du système de coordonnées et doit vous être donnée (pour le moment).

♡ Le lien entre la force et l'énergie potentielle est alors $\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p}$.

Exemple : supposons que $E_p = -mgr\cos\theta$. On donne l'expression du gradient en coordonnées cylindrique : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$, quel serait l'expression de la force $\vec{F}$ correspondante ? (remarque, la notation $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ signifie que l'on dérive la fonction f par rapport à la variable θ en faisant comme si r était une constante)

✍ $\vec{F} = +mg\cos\theta\vec{e}_r - mg\sin\theta\vec{e}_\theta$

VI Résolution numérique de l'équation dans le cas d'un second ordre

Nous avons vu comment résoudre numériquement une équation du premier ordre avec la méthode d'Euler. Toutefois, cette méthode ne peut pas être appliquée directement à un second ordre. On procède généralement via une astuce à une transformation de l'équation différentielle pour la mettre sous forme d'un système d'équations du premier ordre.
On peut alors ensuite appliquer la méthode d'Euler ou d'autres méthodes plus performantes.

1. Transformation sous la forme d'un système du premier ordre

Pour une équation d'ordre $n \geqslant 2$, la méthode usuelle est de rajouter des variables représentant les $n-1$ premières dérivées

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!], f_i = f^{(i)},$$

puis d'écrire votre équation différentielle en fonction de ces variables.

Exemple : Prenons l'équation différentielles $y''(t) + \frac{\omega_0}{Q}y'(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 Y_0^2 \cos(\omega t)$. On rajoute une variable $y_1 = y'$ puis on essaye de présenter le système sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & F(y,y_1,t) \\ y_1' & = & G(y,y_1,t) \end{array}\right. \text{ soit dans notre cas : } \left\{\begin{array}{rcl} y' & = & y_1 \\ y_1' & = & (y'' =) - \frac{\omega_0}{Q}y_1(t) - \omega_0^2 y(t) + \omega_0^2 Y_0^2 \cos(\omega t) \end{array}\right.$$

Les $n-1$ premières équations sont donc faciles : il suffit d'écrire $f_{i-1}' = f_i$ puis la dernière équation ($f_n' = \dots$) est simplement votre équation différentielle en remplaçant $f^{(i)}$ par f_i et en isolant f_n' dans le membre de gauche.

Exercice : Présentez l'équation différentielles $y^{(3)} + y'' - 3y' + 2y^2 = e^{-t}$ sous forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre.

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & y_1 \\ y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & -y_2 + 3y_1 - 2y^2 + e^{-t} \end{array}\right.$$

2. Utilisation d'une bibliothèque

Pour résoudre un système de n équations différentiels du premier ordre, on peut utiliser la fonction `odeint` importée depuis le module `scipy.integrate`. Cette fonction prend trois arguments obligatoires :

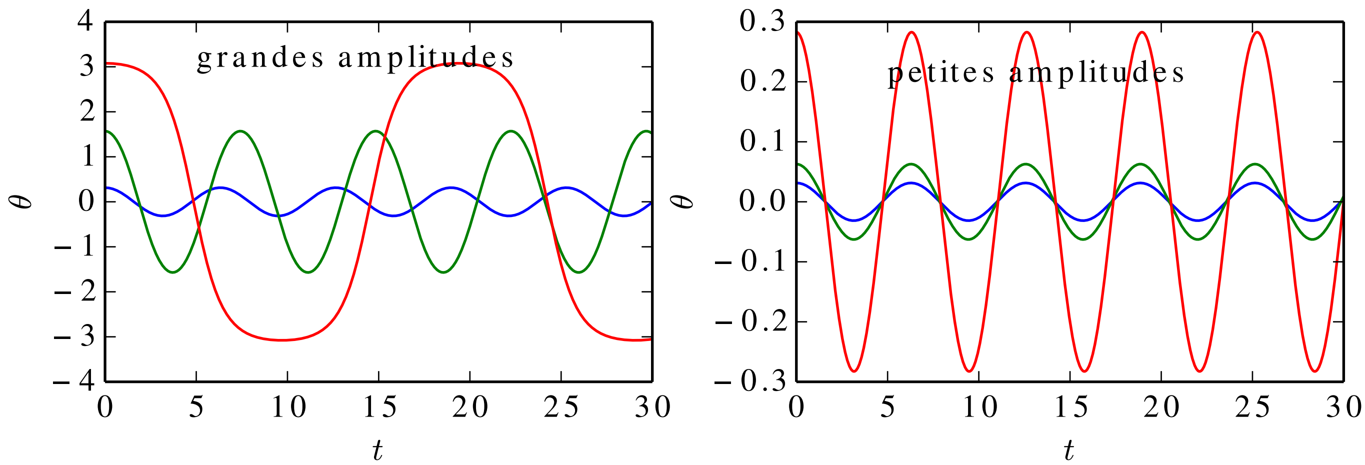
1. une fonction `func(y,t0,...)` qui permet de calculer les seconds membres (renvoyés sous forme d'une liste) et qui prend comme argument obligatoire une liste de n éléments et un temps.
2. les conditions initiales (liste de n conditions initiales)
3. un tableau de temps `t` qui correspond aux instants pour lesquels on veut que la fonction calcule les points (le premier point correspondant à l'instant où sont données les conditions initiales).

Elle renvoie un tableau de taille ($\texttt{len}(t) \times n$) qui contient pour chaque temps les valeurs de y et de ses $n-1$ premières dérivées.
Exemple :

```python
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
def eq(Y,t):#y^(3) + y'' - 3y' + 2y = e^-t
    Yp = [0]*3#va contenir Y'(t) compte tenu de l'équa-diff
    Yp[0] = Y[1]#y' = y_1
    Yp[1] = Y[2]#y_1' = y_2
    Yp[2] = -Y[2] + 3*Y[1] - 2*Y[0]**2 + np.exp(-t)#y_2' = -y_2 + 3y_1 - 2y^2 + e^-t
    return Yp
t = np.linspace(0,4,100) # création de la liste de temps
resultat = odeint(eq,[1,0,1],t) #appel de ODEINT
y = resultat[:,0]#première colonne, toutes les lignes
y_1 = resultat[:,1]#deuxième colonne, toutes les lignes
plt.plot(t,y)# faire suivre de plt.show()
```

Exercice : Écrivez un programme qui permet de résoudre l'équation différentielle à laquelle obéit le pendule simple à l'aide du solveur de scipy (Rappel : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$, on pourra rajouter dans un deuxième temps le terme d'amortissement et faire varier Q).

```python
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
omega_0=1#pulsation propre









plt.plot(t,theta)
plt.show()
```



La figure précédente représente les solutions tracées pour différentes conditions initiales. On remarque que :

- sur la figure de droite, les courbes passent toutes en même temps par 0 : la période des trois signaux est la même (<u>isochronisme</u> des petites oscillations)
- sur la figure de gauche au contraire, on observe que la période est d'autant plus élevée que l'amplitude des oscillations est élevée (non isochronisme des grandes oscillations)

Table des matières