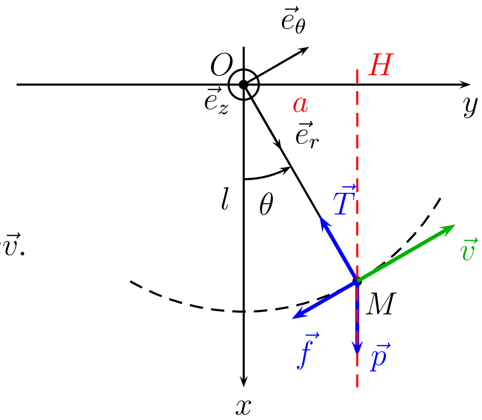
M_5 Théorème du moment cinétique

PCSI 2024 – 2025

Dire de réviser le produit vectoriel et le TRC
parler à l'oral du point d'application des forces et de son importance ici et pour le calcul de la puissance.

Intérêt : on fera plutôt appel au TMC qu'au PFD dans le cas de mouvements de rotation.

Exemple : pendule simple.



- Référentiel terrestre local considéré comme galiléen.
- Système de coordonnées : cylindro–polaires.
- Système : boule du pendule M
- Forces : Poids $\vec{p}$, tension du fil $\vec{T}$ et frottements fluides $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$.

I Moment d'une force

1. Moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point A : $\vec{\mathcal{M}}_A$.

1.a. Définition et propriétés

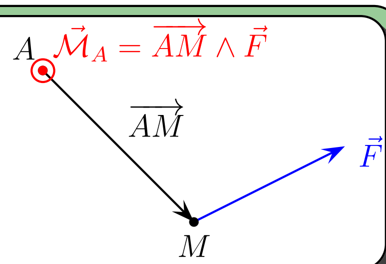
On cherche à traduire l'efficacité qu'à une force $\vec{F}$ appliquée en un point M à "mettre ce dernier en rotation" autour d'un point A.

Définition :

on appelle moment de la force $\vec{F}$ par rapport à un point A, le vecteur :

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

où M est le point d'application de la force $\vec{F}$.



- C'est une grandeur vectorielle dont la norme s'exprime en N.m=J=kg.m^{2}s^{-2}.
- $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$ est normal au plan qui contient $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{F}$ (voir figure).
- Le moment de $\vec{F}$ dépend du point par rapport auquel on le calcule (souvent l'origine O).

1.b. Méthodes de calcul

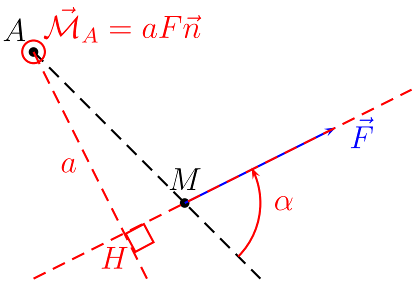
- Par décomposition de $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{F}$ selon les vecteurs unitaires de la base choisie.

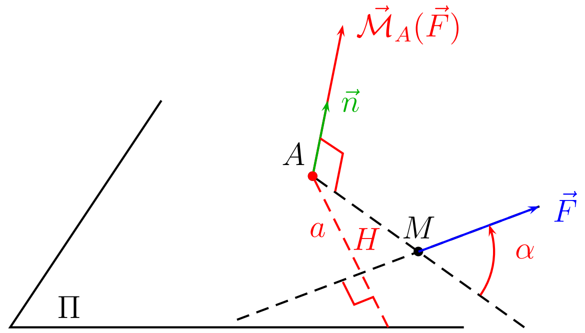
  Exemple : pendule simple : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} = l.\vec{e}_r$

  - $\star$ $\vec{T} = -T.\vec{e}_r$ d'où $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = l.\vec{e}_r \wedge (-T.\vec{e}_r) = \vec{0}$.
  - $\star$ $\vec{f} = -\alpha v.\vec{e}_\theta = -\alpha l\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$ d'où $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = l.\vec{e}_r \wedge (-\alpha l\dot{\theta}.\vec{e}_\theta) = -\alpha l^2\dot{\theta}.\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = -\alpha l^2\dot{\theta}.\vec{e}_z$.
  - $\star$ $\vec{p} = mg\cos\theta.\vec{e}_r - mg\sin\theta.\vec{e}_\theta$ d'où
    $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{p}) = l.\vec{e}_r \wedge (mg\cos\theta.\vec{e}_r - mg\sin\theta.\vec{e}_\theta) = -lmg\sin\theta.\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = -lmg\sin\theta.\vec{e}_z$.

- Pour calculer $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$, il est souvent plus efficace d'utiliser la notion de bras de levier, a la distance la plus courte entre la droite d'action (ou support) de la force et le point A :

Dans Π le plan contenant $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AM}$





$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{F} = AH.F.\vec{n} = aF.\vec{n}$$

où $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à Π et dont le sens est donné par la règle du tire - bouchon ou de la main droite.

Remarque : toute force dont le support passe par A a un moment nul par rapport à A.

Exemple : pendule simple.

- ⋆ $\vec{T}$, bras de levier nul d'où $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$.
- ⋆ $\vec{f}$, bras de levier l et vecteur $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$ orienté selon $-\vec{e}_z$ si $\dot{\theta} > 0$ d'où $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = -l.\alpha.v.\vec{e}_z = -\alpha l^2\dot{\theta}.\vec{e}_z$.
- ⋆ $\vec{p}$, bras de levier $MH = l.\sin\theta$ et $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}$ orienté selon $-\vec{e}_z$ d'où $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{p}) = l.\sin\theta.p\vec{e}_z = -lmg\sin\theta.\vec{e}_z$.

2. Moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe orienté Δ : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$

Si toutes les forces sont coplanaires, leurs moments sont portés par le même axe , on a donc intérêt à travailler par projection sur cet axe ($\Delta = Oz$ dans le cas du pendule).

Définition : la projection du moment de $\vec{F}$ sur un axe Δ orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}_\Delta$ est

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta \quad \textbf{avec } A \in \Delta$$

Si deux points A et A' appartiennent à Δ, $\mathcal{M}_{A'\Delta} = \vec{e}_\Delta.\vec{\mathcal{M}}_{A'} = \vec{e}_\Delta.(\overrightarrow{A'A} \wedge \vec{F}) + \vec{e}_\Delta.\vec{\mathcal{M}}_A$
Or, $\vec{A'A} \wedge \vec{F}$ est normal à $\overrightarrow{A'A}$ et donc à $\Delta \Rightarrow \vec{e}_\Delta.(\vec{A'A} \wedge \vec{F}) = 0$ et $\mathcal{M}_{A'\Delta} = \vec{e}_\Delta.\vec{\mathcal{M}}_A = \mathcal{M}_{A\Delta} = \mathcal{M}_\Delta$ ne dépend plus du point A situé sur l'axe.

On définit ainsi le moment de $\vec{F}$ par rapport à un axe et non plus par rapport à un point.

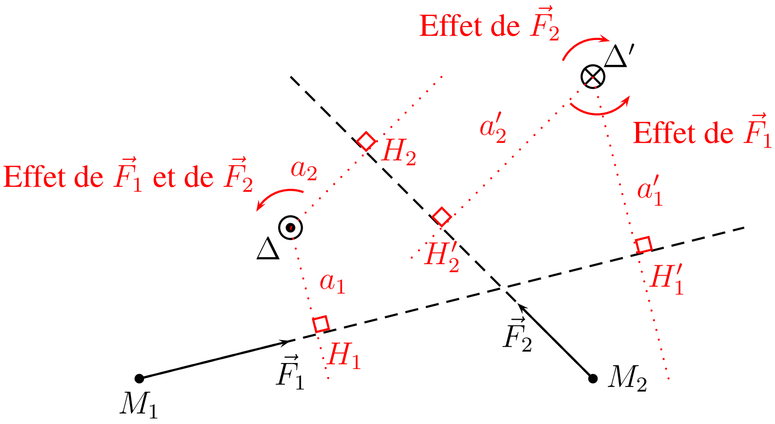
Méthode de calcul (très important !) : **en prenant l'axe Δ normal au plan contenant $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{F}$, on a**

$$\mathcal{M}_\Delta = \pm aF$$

où a est le bras de levier (i.e. plus courte distance entre la droite $(M,\vec{F})$ et l'axe Δ.

- **on place le projeté orthogonal (H) de Δ sur la direction de $\vec{F}$ ce qui donne le bras de levier.**
- **le signe se détermine par utilisation de la règle du tire bouchon : si $\vec{F}$ tend à faire tourner M dans le sens de l'orientation de Δ, la projection de son moment est positive.**

Exemples :



- figure ci-contre
  - $\star$ $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_1) = +F_1 a_1$
  - $\star$ $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_2) = +F_2 a_2$
  - $\star$ $\mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{F}_1) = -F_1 a_1'$
  - $\star$ $\mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{F}_2) = +F_2 a_2'$
- pendule simple, on choisit ici de projeter les moments selon Oz.
  - $\star$ $\vec{T}$ bras de levier nul d'où $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{T}) = 0$.
  - $\star$ $\vec{f}$ tend à faire tourner M dans opposé à θ qui oriente Oz si $\dot{\theta} > 0$, d'où $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{f}) = -\alpha l^2 \dot{\theta}$.
  - $\star$ $\vec{p}$ tend à faire tourner M dans opposé à θ si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, d'où $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{p}) = -ap = -mgl\sin\theta$.

Retenir : **la relation entre le signe du moment par rapport à un axe orienté et le fait que la force tende à faire tourner le point dans un sens ou dans l'autre autour de cet axe.**

Remarque : toute force dont la droite d'action est parallèle à un axe Δ a un moment normal à ce dernier. Sa projection sur Δ est donc nulle.

Démo : $\vec{F} = F_\Delta \vec{e}_\Delta$ car parallèle à l'axe, donc $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge F F_\Delta \vec{e}_\Delta \perp e_\Delta$ par définition du produit vectoriel, d'où $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$

Ainsi, pour mettre en mouvement une porte autour de l'axe de ses gonds Δ, on aura intérêt à appliquer une force $\vec{F}$ dans un plan normal à Δ et avec un bras de levier important (point d'application loin de l'axe).

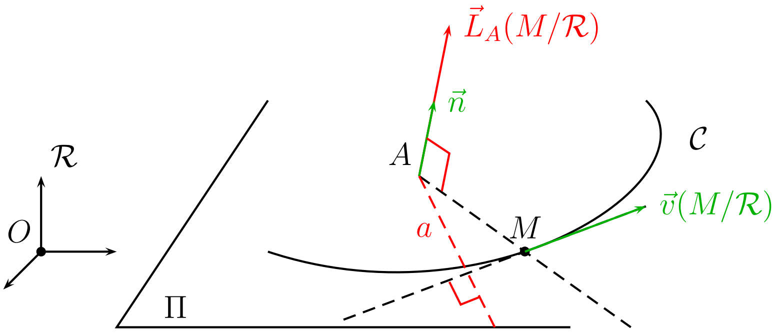
II Moment cinétique

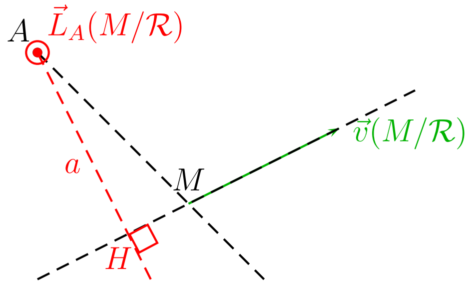
1. Moment cinétique de M par rapport à un point A

Soit un point matériel M, de quantité de mouvement $\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m.\vec{v}(M/\mathcal{R})$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ (trajectoire $\mathcal{C}$). Soit le plan Π qui contient $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ à l'instant t et un point A quelconque de $\mathcal{R}$.

Définition : par rapport à A et dans $\mathcal{R}$, on définit :

$$\vec{L}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R})$$





Remarques :

- C'est une grandeur vectorielle dont la norme s'exprime en kg.m^{2}s^{-1} et qui caractérise le fait de tourner autour du point A, lié à l'aire balayée.
- $\vec{L}_A$ est normal au plan qui contient $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$.
- Le moment cinétique dépend du référentiel d'étude et du point par rapport auquel on le calcule (A ici, mais souvent l'origine O).

Méthodes de calcul

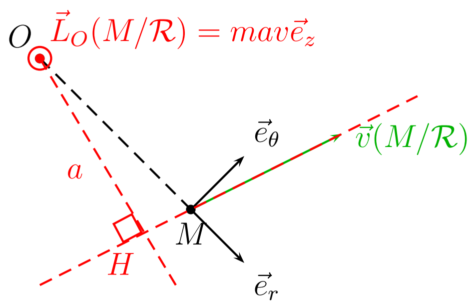
- Par décomposition des vecteurs dans la base choisie,

  Exemple : dans la base cylindro-polaire et en prenant le cas usuel où $A = O$:

$$\vec{L}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} -zr\dot{\theta} \\ -r\dot{z} + \dot{r}z \\ r^2\dot{\theta} \end{vmatrix} = -mzr\dot{\theta}\vec{e}_r + m[-r\dot{z} + \dot{r}z]\vec{e}_\theta + mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

- On peut également écrire $\vec{L}_A$ sous la forme :

$$\vec{L}_A = m\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v} = m(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{v} = mAHv\vec{n}$$



$$\Rightarrow \vec{L}_A = mav\vec{n}$$

où a est la plus courte distance entre A et la direction de $\vec{v}$ et $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à Π et dont le sens est donné par la règle du tire-bouchon ou de la main droite.

Cas particuliers important

- Mouvement plan. On prend alors Oxy le plan du mouvement, $\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}.\vec{e}_r + r\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$ d'où $\vec{L}_O = r.\vec{e}_r \wedge (\dot{r}.\vec{e}_r + r\dot{\theta}.\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$

$$\Rightarrow \vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}.\vec{e}_z$$

2. Moment cinétique de M par rapport à un axe orienté L_Δ

Définition : **L_Δ est la projection du moment cinétique $\vec{L}_A$ sur un axe Δ orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}_\Delta$ et contenant A (indépendant de A).**

Méthode de calcul : comme tout à l'heure, on a alors $L_\Delta = \pm mav$ où a est la plus courte distance entre l'axe Δ et la direction de $\vec{v}$, le signe se détermine par utilisation de la règle du tire bouchon.

Exemple : dans le cas du pendule simple, $L_{Oz} = mlv = ml^2\dot{\theta}$ positif quand $\dot{\theta} > 0$ car M tourne alors selon l'orientation de Oz.

III Théorème du moment cinétique TMC

1. Démonstration et énoncé

Dérivons par rapport au temps l'expression de $\vec{L}_A = m\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}$ le moment cinétique, dans $\mathcal{R}$ et par rapport à un point A d'un point matériel $M(m,\vec{v})$:

$$\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = m\left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{v} + m\overrightarrow{AM} \wedge \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

si on prend maintenant A est fixe dans $\mathcal{R}$, $(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt})_{\mathcal{R}} = (\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt})_{\mathcal{R}} + (\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt})_{\mathcal{R}} = \vec{0} + \vec{v}$ et si $\mathcal{R}$ est galiléen, $m(\frac{d\vec{v}}{dt})_{\mathcal{R}} = \vec{F}$, la résultante des forces appliquées en M d'où

✍

$$\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = m\vec{v} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{AM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

Théorème du moment cinétique : **dans un référentiel <u>galiléen</u>, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un point matériel, en un point <u>fixe</u> A, est égale au moment en A de la résultante des forces $\vec{F}$ qui s'exercent sur le point matériel.**

$$\left(\frac{d\vec{L}_A(M)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) \qquad \textbf{avec } A \textbf{ un point fixe dans } \mathcal{R}_g$$

♡

Remarque : souvent le point A est l'origine O du référentiel.

2. Application au pendule simple

On travaille dans $\mathcal{R}$ lié au sol et considéré comme galiléen et O est fixe dans ce référentiel, on peut donc appliquer le TMC.
On a montré que $\vec{L}_0 = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z$ et par dérivation, $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z$ car $\vec{e}_z$ constant dans $\mathcal{R}$
Le moment de la résultante des forces : $\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{f}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{p}) = \vec{0} - l\alpha v.\vec{e}_z - mga.\vec{e}_z$ avec $v = l\dot{\theta}$ et $a = l\sin\theta$ d'où

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = -\alpha l^2\dot{\theta} - mgl\sin\theta\vec{e}_z$$

et par projection sur $\vec{e}_z$, on retrouve l'équation différentielle du mouvement du pendule simple :

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \qquad \text{en posant } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

3. Version scalaire (TSMC)

Théorème Théorème scalaire du moment cinétique : par projection du TMC sur un axe Δ passant par A, on a

$$\left(\frac{dL_\Delta}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \text{ avec } \Delta \text{ un axe fixe dans } \mathcal{R}_g$$

Exemple : dans le cas du pendule simple, toutes les forces sont coplanaires et le calcul des projections sur O se fait simplement.

$L_{Oz} = ml^2\dot{\theta}$ et par application du TSMC dans $\mathcal{R}$ où l'axe Oz est fixe,

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = ml^2\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}) = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{T}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{f}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{p}) = 0 - l.\alpha.v - mga$$

et on retrouve la même équation.

IV Généralisation aux systèmes

1. Système discret

Définition : Le moment cinétique $\vec{L}_O$ d'un système est la somme des moments de chacun des points en O.

$$\vec{L}_O(\mathcal{S}) = \sum_{i\in\mathcal{S}} \vec{L}_O(M_i) = \sum_{i\in\mathcal{S}} \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{p}_i$$

Moment intérieur : De la même façon que pour les forces, on sépare les moments entre moments intérieurs et moments extérieurs à un système. Considérons un système de deux points M_1 et M_2, ils sont soumis à des forces $\vec{F}_{ext/1}$; $\vec{F}_{ext/2}$; $\vec{F}_{2/1}$; $\vec{F}_{1/2}$. Le moment des forces intérieures vaut :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O,int} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{2/1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{1/2} = \overrightarrow{OM_1} \wedge (-\vec{F}_{1/2}) + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{1/2} = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{F}_{1/2} = \vec{0}$$

En effet, d'après la 3e loi de Newton, on a $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$ et les forces s'exercent selon la droite M_1M_2. Ce résultat est généralisable à un système de plus de deux points.

Moment intérieur : Le moment intérieur à un système, c'est-à-dire la somme des moment des forces exercées par un point du système sur un autre point du système, est nul.

Remarque : Le moment des forces extérieures ne peut pas être simplifié en général, on est obligé de calculer $\sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_i$. Vigilance : chaque force avec <u>son</u> point d'application.

2. Couple

Dans le cas de la mécanique du point, la notion de résultante des force suffit à décrire le mouvement du point en utilisant le principe fondamental de la dynamique. Pour un système de points, nous avons vu le théorème de la résultante cinétique qui montre que le mouvement que l'on peut déduire de la résultante des forces est celui du centre de masse.

Pour les système de points, la résultante ne suffit pour décrire tout le mouvement, on parle plus généralement d'action ou d'effort . En effet considérons deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2} = -\vec{F_1}$ appliquées en deux points distincts M_1 et M_2 alors :

— la résultante des forces est nulle.

— le moment résultant de ces deux forces en un point O est $\overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F_2} = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{F_2}$ qui est « a priori » différent de $\vec{0}$ (sauf cas particuliers).

— le moment résultant ne dépend pas du choix du point O.

Exemple : Une personne qui tire une de vos épaules et pousse l'autre. La somme de ces deux forces n'a pas d'effet sur le mouvement du centre de masse mais engendre une rotation.

♡ **Définition : Un couple est un cas particulier de moment de force lorsque la résultante des forces correspondante est nulle. Ce moment de force a la particularité de ne pas dépendre du point par rapport auquel on le calcule.**

Remarques :

— Un couple n'a pas d'action sur le mouvement du centre de masse du système, mais tend à faire tourner le système.

— Sa dimension est la même que celle du moment d'une force et s'exprime donc en N.m

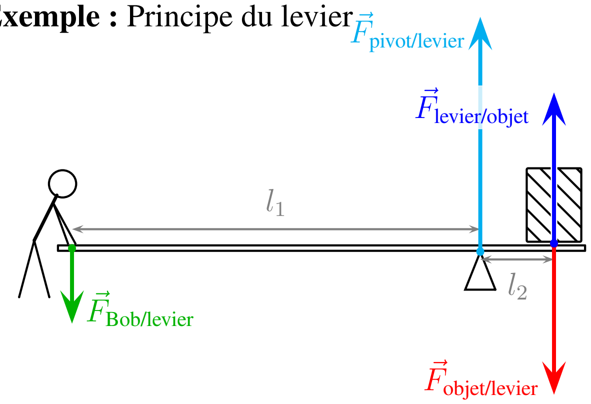
— Les couples sont fréquemment notés $\vec{\mathcal{C}}$ ou $\vec{\Gamma}$.

♡ **Théorème du moment cinétique : La dérivée du moment cinétique d'un système fermé en un point <u>fixe</u> O (resp. par rapport à un axe <u>fixe</u> Δ) dans un référentiel <u>galiléen</u> est égal au moment en O (resp. par rapport Δ) à des actions <u>extérieures</u> au système :**

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O,ext} \quad \left(\textbf{resp.} \quad \frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta,ext}\right)$$

Remarque : Parfois, on ne connait pas les forces directement, mais on connait leur couple, il faut bien entendu compter le couple dans la somme des moments (un couple est un cas particulier de moment de force).

Exemple : Principe du levier



Bob veut soulever un objet lourd, pour cela, il dispose une petite pierre sur le sol à coté de l'objet et glisse un long bâton légèrement sur l'objet, pourquoi est-il plus facile de soulever l'objet ainsi que directement ?
On pourra pour simplifier le raisonnement appliquer le TMC au bâton en négligeant sa masse, c'est-à-dire son inertie et son poids.

TMC par rapport au point où on va pivoter qui est fixe, dans le référentiel lié au sol :

$$J\ddot{\theta} = 0 = F_{\text{Bob/levier}} l_1 - F_{\text{objet/levier}} l_2 + 0$$

d'où $F_{\text{objet/levier}} = F_{\text{Bob/levier}} \frac{l_1}{l_2}$
Et d'après la 3e loi de Newton : $\vec{F}_{\text{objet/levier}} = -\vec{F}_{\text{levier/objet}}$
Force augmentée en norme d'un facteur l_1/l_2, intérêt à maximiser ce rapport, mais il ne faut pas non plus qu'il soit trop grand car sinon $F_{\text{pivot/levier}}$ grand en norme et on risque de casser notre levier.

Table des matières