M_7 Mouvement d'un solide

PCSI 2024 – 2025

Définition : On appelle solide ou solide indéformable un système physique étendu pour lequel la distance entre tous les couples de points reste constante.

Remarques :
- Cela implique aussi que les angles restent constant.
- il s'agit d'un modèle , tous les objets sont déformables si on y met suffisamment de force, et réciproquement cela peut s'appliquer à des objets «mous» si les efforts sont tels qu'au cours du mouvement l'objet ne se déforme pas.

Exemples :
- solides (tant que les efforts restent suffisamment faibles) : chaise, table, règle en bois, personne immobile ...
- non solides : une personne qui fait varier la distance entre ses mains, une voiture avec des roues qui tournent par rapport au chassis

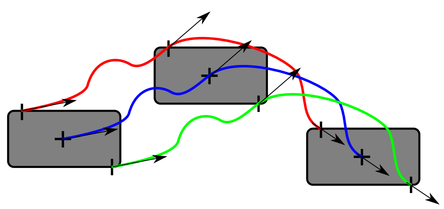
I Cinématique du solide dans des cas simples

1. Solide en translation

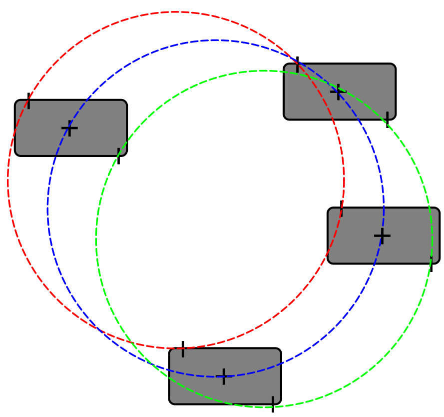
Définition : Lors d'un mouvement de translation, le champ des vecteurs vitesses est uniforme à chaque instant.

Dis autrement, si on considère deux instants t_1 et t_2 et deux points quelconques du solide A et B, alors
- à t_1 $\vec{v}_A(t_1) = \vec{v}_B(t_1)$
- à t_2 $\vec{v}_A(t_2) = \vec{v}_B(t_2)$
- mais on n'a pas nécessairement $\vec{v}_A(t_1) = \vec{v}_A(t_2)$

Autrement dit les vitesses du solides sont « constantes dans l'espace » (mais pas nécessairement dans le temps).



translation quelconque

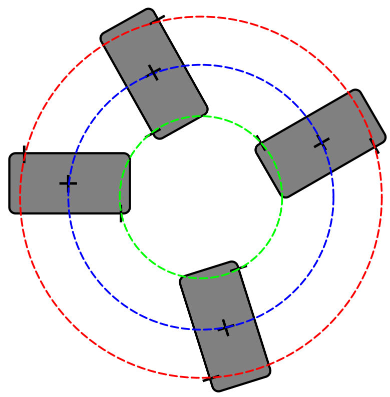


translation circulaire

2. Solide en rotation autour d'un axe fixe

Définition : Un solide est dit en mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ si tous ses points sont en mouvement circulaire autour de l'axe Δ . Si on repère un point M du solide en coordonné polaire (r,θ) avec le vecteur e_z colinéaire avec l'axe Δ et l'origine du repère sur l'axe, alors on appelle vitesse angulaire de rotation du solide la grandeur $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$

Remarque : La définition de la vitesse angulaire est en fait indépendant du choix du point M.



vecteur vitesse : Le mouvement du point M est circulaire autour de l'axe, donc la distance r ne varie pas au cours du temps. En utilisant les coordonnées polaires sa vitesse est donc

$$\vec{v}(M) = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = r\omega\vec{e}_\theta$$

Tous les points du solide ont donc leur vecteur vitesse selon $\vec{e}_\theta$ et de norme d'autant plus grande qu'ils sont loin de l'axe de rotation.

3. Rappels

Pour un système ponctuel, l'impulsion (ou quantité de mouvement) est définie par : $\vec{p} = m\vec{v}$
Pour un système non ponctuel $\mathcal{S}$, la définition est : $\vec{p}(\mathcal{S}) = \sum_{i\in\mathcal{S}} \vec{p}_i$

Nous avons <u>montré</u> que cela peut aussi s'exprimer $\vec{p}(\mathcal{S}) = m\vec{v}(G)$ (attention, cette «simplification» n'est pas toujours pertinente).

♡ Pour l'énergie cinétique d'un système, la définition est : $E_c(\mathcal{S}) = \sum_{i\in\mathcal{S}} E_{c,i}$
et en terme de simplification en utilisant le centre de masse, **<u>il n'y en a pas en général</u>**.

♡ Pour le moment cinétique d'un système (par rapport à un axe ou à un point) la définition est : $L_\Delta(\mathcal{S}) = \sum_{i\in\mathcal{S}} L_{\Delta,i}$
En terme de simplification en utilisant le centre de masse, **<u>il n'y en a pas en général</u>**.

Remarque : Attention à ne pas inventer des simplifications qui n'existent pas ! Il n'y a pas de «je réduis le système à un point», nous avons expliqué pourquoi dans le cadre du PFD on «pouvait faire comme si» toute la masse était au centre de masse, mais cela a nécessité une démonstration.

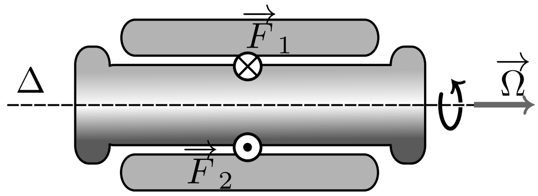
4. Liaison pivot

Définition : Une liaison pivot est un mécanisme qui ne laisse qu'un degré de liberté de rotation autour d'un axe Δ à un solide. La liaison est dite parfaite si le moment des efforts exercés par le mécanisme sur le solide par rapport à l'axe Δ est nul :

$$\mathcal{M}_\Delta = 0$$

Dans le cas contraire, la liaison produit un couple de frottement.

Un moyen de construire une liaison pivot est d'utiliser deux cylindre coaxiaux (un plein et un creux) comme illustré ci-contre. Un dispositif permet de faire en sorte que les cylindres ne peuvent pas glisser l'un par rapport à l'autre selon la direction de Δ.



Remarques :

- Dans les dispositifs en rotation (moteur, roue ...), la partie en rotation est appelée rotor et la partie immobile est appelée stator.
- Pour qu'un couple puisse s'exercer sur le rotor (soit pour freiner, soit pour mettre en mouvement), il est nécessaire que le dispositif contienne un stator pour pouvoir « s'appuyer dessus ». (Principe des actions réciproques)

5. Solide en rotation autour d'un axe fixe.

Si l'on considère un solide $\mathcal{S}$ en rotation autour d'un axe fixe à une vitesse Ω, on se place en coordonnées cylindro-polaire d'axe $\Delta = Oz$ l'axe de rotation du solide. Le champ des vitesses est alors $\vec{v} = r\Omega\vec{e}_\theta$, c'est-à-dire que pour un point M du solide, sa vitesse ne dépend que de sa distance r à l'axe de rotation. Calculons alors le moment cinétique du système $\{\mathcal{S}\}$ par rapport à l'axe de rotation Δ.
Dans le cas d'un système discret :

$$L_\Delta(\mathcal{S}) = \vec{e}_z \cdot \sum_{i\in\mathcal{S}} \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{v}_i = \vec{e}_z \cdot \sum_{i\in\mathcal{S}} (r_i\vec{e}_r(M_i) + z_i\vec{e}_z) \wedge m_i r_i \Omega \vec{e}_\theta(M_i)$$
$$= \vec{e}_z \cdot \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i(r_i^2\omega\vec{e}_z - z_i r_i \Omega \vec{e}_r(M_i)) = \Omega \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i r_i^2 = J_\Delta \Omega$$

Définition : On appelle moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ la grandeur

$$J_\Delta = \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i r_i^2$$

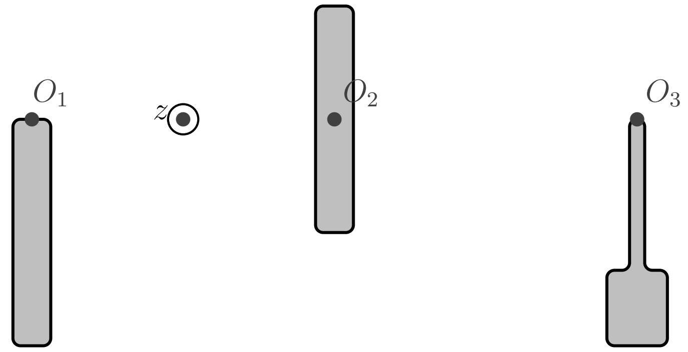
où r_i est la distance du point i à l'axe Δ et m_i sa masse.

Moment cinétique d'un solide en rotation : Si un solide est en rotation autour de l'axe Δ (orienté) à une vitesse angulaire Ω, alors son moment cinétique par rapport à Δ est simplement le produit de son moment d'inertie par rapport à Δ et de sa vitesse de rotation autour de Δ

$$L_\Delta(\mathcal{S}) = J_\Delta(\mathcal{S})\Omega$$

Remarques :
- Dans le cas d'un solide continu, l'expression du moment d'inertie est $\iiint r^2\, dm = \iiint r^2 \rho(M)\, d\tau$.
- Le moment d'inertie croit fortement lorsque les masses sont éloignés de l'axe de rotation, ce phénomène est utilisé par les gymnastes et les patineurs (voir exemple du tabouret d'inertie).

Exemple :
On considère trois objets représenté ci-contre de moment d'inertie J_1, J_2, J_3 par rapport à leur axe de rotation respectif (O_1z), (O_2z) et (O_3z). Les masses des objets sont les mêmes et les objets ne sont fait que d'un seul matériau (densité uniforme). Lequel des trois moment d'inertie est le plus faible ? Lequel est le plus élevé ? Justifier brièvement.



6. Énergie cinétique d'un solide en rotation

On considère un solide $\mathcal{S}$ en rotation autour d'un axe fixe Δ à la vitesse Ω. Son énergie cinétique est la somme des énergies cinétiques des points constituants le système.

$$E_c(\mathcal{S}) = \sum_{i\in\mathcal{S}} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i\in\mathcal{S}} \frac{1}{2} m_i (r_i\Omega)^2 = \Omega^2 \sum_{i\in\mathcal{S}} \frac{1}{2} m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$$

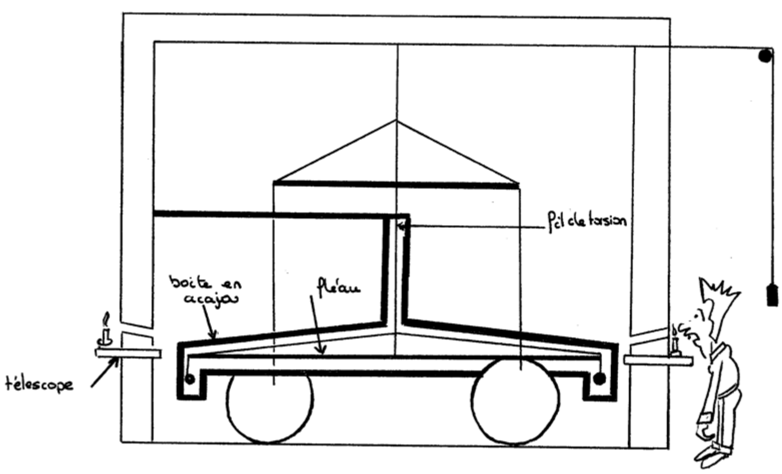
Énergie cinétique d'un solide en rotation : Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire Ω, de moment d'inertie J_Δ par rapport à cet axe, l'énergie cinétique peut s'exprimer en utilisant la formule :

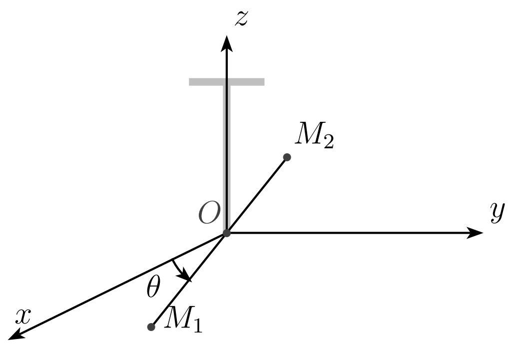
$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$$

II Exemple d'application du TMC à des solides en rotation

Rappel : lorsque l'on applique le TMC ou le PFD à un système non ponctuel (mais fermé), il est inutile de prendre en compte les forces intérieures car celles-ci se compensent.

1. Exemple du pendule de torsion





Description de l'expérience :
- deux masses M_1 et M_2 de masse m sont attachée à une tige de longueur $2l$ et de masse négligeable;
- la tige est suspendue au plafond par un fil;
- le fil peut exercer un couple sur la tige par rapport à l'axe Oz lorsqu'il est tordu, ce couple sera pris de la forme $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{e}_z$;
- au repos, la tige est alignée selon l'axe Ox, en mouvement sa position est repérée par rapport à l'angle θ qu'elle fait avec l'axe x;

Cette expérience a permis historiquement à Cavendish de « peser » la terre (aujourd'hui, on le voit plutôt comme une mesure de la constante de gravitation $\mathcal{G}$)
Mise en équation :

1. référentiel : celui du laboratoire, supposé galiléen.
2. système : $\{M_1$, M_2 et la tige$\}$
3. bilan des efforts extérieurs : poids des deux masses $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$, tension du fil qui supporte la tige $\vec{T}$ et couple du fil qui supporte la tige $\vec{\Gamma}$.

On utilise le TMC projeté sur l'axe Oz : $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{T}$ sont parallèles à Oz donc leur moment par rapport à Oz est nul. Le moment cinétique du système est $J_z\dot{\theta} = 2 \times (ml^2)\dot{\theta}$.

$$\frac{dL_z}{dt} = -C\theta \Leftrightarrow 2ml^2\ddot{\theta} = -C\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{2ml^2}\theta = 0$$

Équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{2ml^2}}$

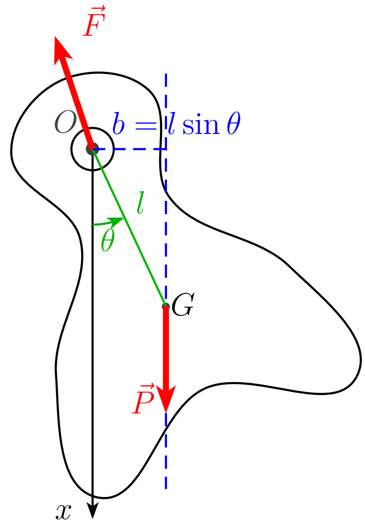
intégrale première du mouvement :
Il suffit de multiplier par $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}(J\ddot{\theta} + C\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 = cte$$

2. Exemple pendule pesant

On considère un solide lié à un axe Δ par une liaison pivot parfaite. Le schéma ci-contre est représenté dans un plan orthogonal à Δ et contenant le centre de gravité. On choisit un axe Ox vertical orienté vers le bas.

— Le moment d'inertie du solide par rapport à Δ est J
— On pose $l = OG$
— On repère la position du centre de masse G par l'angle $\theta = (Ox,\overrightarrow{OG})$
— Le système étudié est le solide dans le référentiel du laboratoire
— Les forces appliquées au système sont le poids $\vec{P}$ et la réaction de la liaison $\vec{F}$
— Une difficulté est que l'on ne connait pas la direction de $\vec{F}$



Moment du poids sur un système : Le moment du poids se calcule en utilisant le moment du poids de chaque point du système.

♡

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) = \sum_{i\in\mathcal{S}} \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\vec{g} = \left(\sum_{i\in\mathcal{S}} m_i\overrightarrow{OM_i}\right) \wedge \vec{g} = m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{g} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}$$

Énergie potentielle de pesanteur d'un système de points :

$$E_{p,pes} = \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i g z_i = mgz_G$$

En effet, cela correspond à projeter sur l'axe Oz la relation

$$\sum_{i\in\mathcal{S}} m_i\overrightarrow{OM_i} = m\overrightarrow{OG}$$

Poids : Du point du vue du moment, le poids se comporte donc comme si toute la masse du système était concentrée au centre de masse G. Il en va de même du point de vue de l'énergie potentielle de pesanteur.

Remarque : Attention, le terme $J_\Delta\ddot{\theta}$ lui ne peut pas se simplifier en en utilisant le centre de masse puisqu'il s'agit de la somme des $m_i r_i^2$ (carré !).
On va travailler avec le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation, l'avantage est que le moment de $\vec{F}$ par rapport à cet axe est nul puisque son bras de levier est nul.

$$J\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgl}{J}\sin\theta = 0 = \ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta$$

III Aspect énergétique

1. Introduction dans le cas d'un solide

Si on étudie un solide en rotation autour d'un axe fixe, alors on a vu que le TMC donne : $J\ddot{\theta} = \sum_{i \in \mathcal{S}} r_i F_{\theta,i}$ où les $F_{\theta,i}$ sont les forces extérieures.

Dans ce paragraphe, on souhaite «faire apparaitre» les énergies, pour cela on va multiplier par $\dot{\theta}$ le TMC. À gauche du signe égal, on reconnait la dérivée de l'énergie cinétique d'un solide $J\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$. À droite du signe égal, on reconnait la puissance des forces extérieures $r_i F_{\theta,i}\theta = \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i$.

On peut donc appliquer le théorème de la puissance cinétique (et donc les autres théorèmes énergétiques aussi) dans le cas d'un solide en rotation en ne prenant en compte que les forces extérieures. Dans la suite, on va s'intéresser au rôle des forces intérieures dans un cas plus général.

Remarque : on a vu que pour faire apparaitre la puissance des forces dans le TMC précédent, il suffisait de multiplier par $\dot{\theta}$. On va généraliser cela pour la puissance d'un couple.

♡

Puissance d'un couple ou d'un moment : Pour un <u>solide en rotation autour d'un axe fixe</u> à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, la puissance d'un couple $\vec{\Gamma}$ (ou d'un moment de force par rapport à l'axe) peut s'exprimer sous la forme $\mathcal{P} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega}$

2. Puissance des forces intérieures

Soit un système de deux points M_1 et M_2 en interaction et soumis à des forces extérieures. On cherche à exprimer la puissance des forces intérieures.

$$\mathcal{P}_{int} = \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}_2 + \vec{F}_{2/1} \cdot \vec{v}_1 = \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}_2 - \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}_1 = \vec{F}_{1/2} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} \right) = \vec{F}_{1/2} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}$$

Or d'après le principe des actions réciproques, $\vec{F}_{1/2}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont colinéaires. Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{M_1M_2} = M_1M_2\vec{u}$ et soit F la projection de $\vec{F}_{1/2}$ sur $\vec{u}$, alors :

$$\mathcal{P}_{int} = F\vec{u} \cdot \frac{d}{dt}(M_1M_2\vec{u}) = F\vec{u} \cdot \frac{dM_1M_2}{dt}\vec{u} + F \times M_1M_2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = F\frac{dM_1M_2}{dt} + F \times M_1M_2 \frac{1}{2}\frac{d(\vec{u} \cdot \vec{u})}{dt}$$

Or $\vec{u}$ est un vecteur unitaire donc $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$ ne dépend pas du temps. D'où

$$\mathcal{P}_{int} = F\frac{dM_1M_2}{dt}$$

Puissance des efforts intérieurs pour un système : Dans un système, la puissance des efforts intérieurs est liée à la déformation du système (variation de distance entre les points à l'intérieur d'un même système). Dans le cas particulier d'un solide (indéformable), la distance entre les points reste constante par définition et la puissance des forces intérieurs est donc nulle.

Les théorèmes énergétiques vu dans le chapitre M_3 deviennent donc (en sommant pour chaque point du système).

Théorème l'énergie cinétique : Dans un référentiel galiléen , la variation d'énergie cinétique d'un système fermé est égale à la somme des travaux des forces intérieures et des travaux des forces extérieures :

$$\Delta E_c = E_{c,2} - E_{c,1} = W_{int,1\to 2} + W_{ext,1\to 2}$$

Remarques :

— Il en va de même pour tous les autres théorèmes énergétiques : il ne faut surtout pas oublier la puissance des forces intérieures (sinon une voiture ne pourrait pas avancer)

— Dans le cas particulier d'un système indéformable (solide), nous avons vu que la puissance des forces intérieures est nulle.

3. Tabouret d'inertie

films

On considère une personne assise sur un tabouret pouvant tourner librement. Cette personne tourne initialement avec les bras écartés et en tenant des masses dans chaque main. La personne ramène les bras vers lui. On se propose de modéliser ce problème de la façon suivante :

— 2 masse m à une distance r_1 de l'axe de rotation et à une vitesse de rotation Ω_1

— les masses se rapprochent l'une de l'autre jusqu'à être distante d'une distance r_2 de l'axe de rotation.

1. par application du théorème du moment cinétique, quelle est la nouvelle vitesse de rotation Ω_2 ?
2. Quelle est l'énergie cinétique du système au début ?
3. Quelle est l'énergie cinétique du système à la fin ? (en fonction de Ω_1) Est-elle égale à l'énergie cinétique initiale ?deuxième partie de la question ajoutée
4. D'où vient la différence ?

1. L'axe est fixe et le référentiel est galiléen, on peut donc appliquer le théorème du moment cinétique. $\frac{dL_\Delta}{dt} = M_{\Delta,ext} = 0$ donc le moment cinétique se conserve.

$$L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad 2mr_1^2\Omega_1 = 2mr_2^2\Omega_2 \quad \Rightarrow \quad \Omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\Omega_1 > \Omega_1$$

2. $2\frac{1}{2}mr_1^2\Omega_1^2$
3. $2\frac{1}{2}mr_2^2\Omega_2^2 = m\frac{r_1^4}{r_2^2}\Omega_1^2$
4. $\Delta E_c = mr_1^2\left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1\right)\Omega_1^2 > 0$. Cette différence vient de l'opérateur, puissance interne qui crée une déformation du système.

Table des matières