O_3 Lentilles minces sphériques dans les conditions de Gauss

PCSI 2024 – 2025

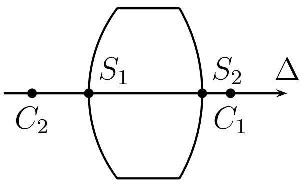
I Lentille mince sphérique

1. Généralités

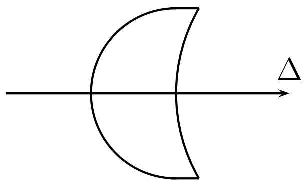
Définition : une lentille sphérique est un système optique centré résultant de l'association de deux dioptres sphériques.

Il existe six façons de fabriquer une lentille sphérique. Expérimentalement, on constate que les lentilles peuvent être convergentes ou divergentes.

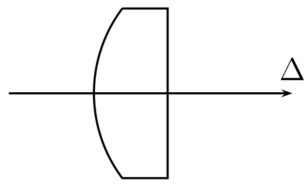
Lentilles convergentes :



Biconvexe

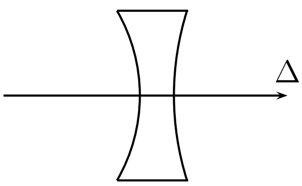


Convexe – Concave

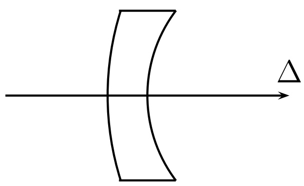


Convexe – plane

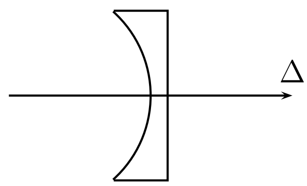
Lentilles divergentes :



Biconcave



Convexe – concave



Concave – plane

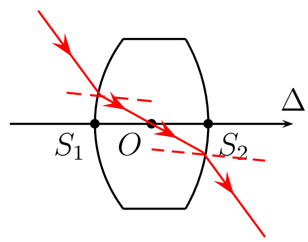
Système centré : l'axe optique Δ passe par les centres de courbure C_1 et C_2 des deux dioptres sphériques. S_1 et S_2 sont les sommets des dioptres.

Définition : une lentille est "mince" si son épaisseur (sur l'axe optique) $e = S_1S_2$ est petite : $e \ll C_1S_1$ et $e \ll C_2S_2$.

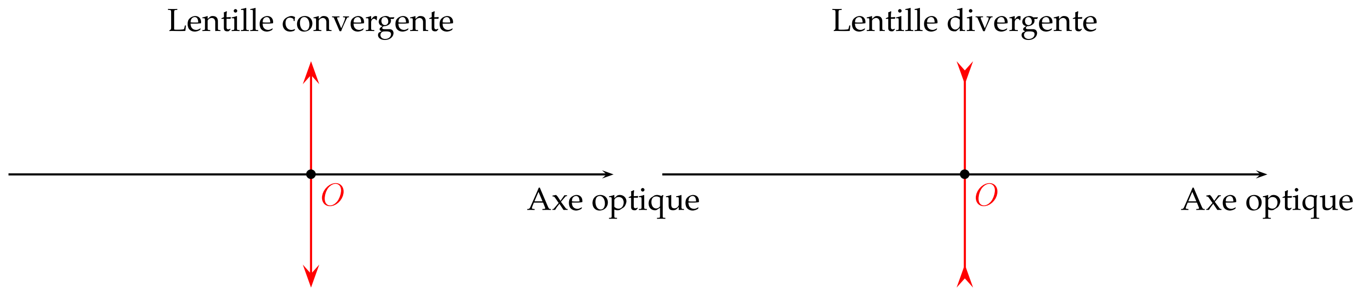
Centre optique : dans ces conditions, $S_1 \simeq S_2$, ce point est le centre optique O de la lentille.

Au voisinage de l'axe optique, la lentille s'apparente à une lame à face parallèle et le rayon ressort parallèlement à sa direction incidente, il n'est que décalé.
Si $e = S_1S_2 \simeq 0$, alors le rayon n'est pas dévié.

Tout rayon traversant une lentille mince en passant par O n'est pas dévié.



2. Représentation symbolique



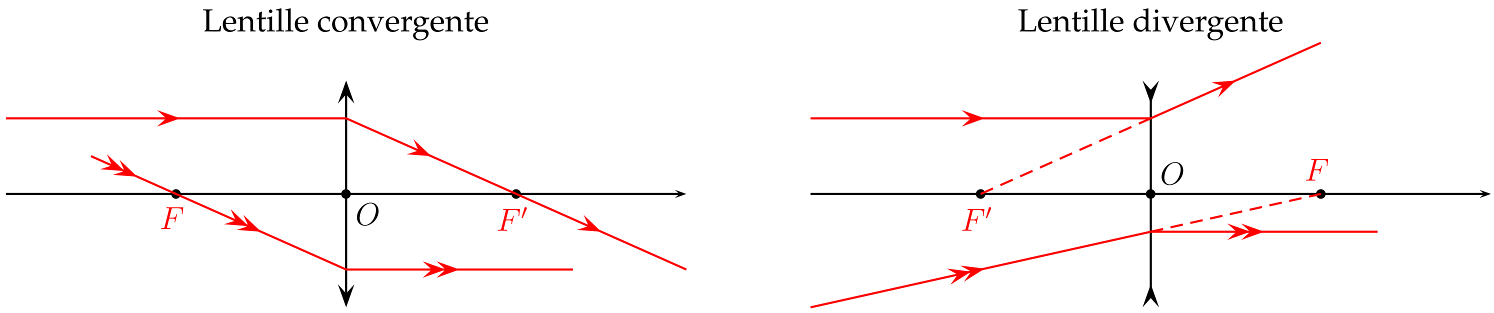
3. Stigmatisme et aplanétisme

On vérifie expérimentalement et par simulation qu'en se plaçant dans les conditions de Gauss (rayons paraxiaux : voisins de l'axe optique et peu inclinés par rapport à ce dernier),

- l'image d'un point A situé sur l'axe optique est quasiment ponctuelle sur l'axe optique : stigmatisme approché.
- l'image $A'B'$ d'un objet AB (de petite dimension) orthogonal à l'axe optique, est orthogonale à l'axe optique . aplanétisme approché.

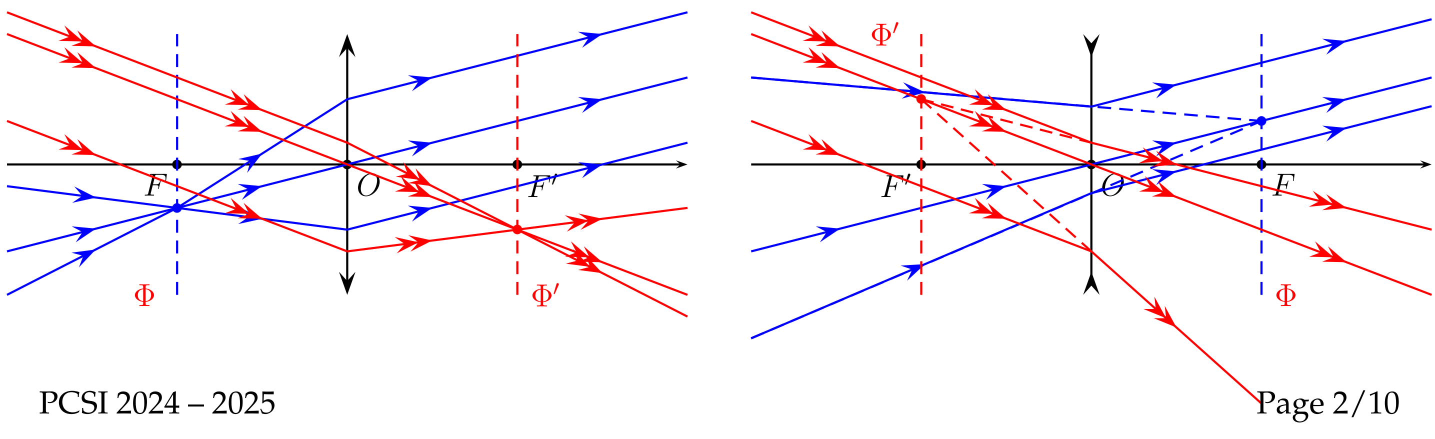
Si on s'écarte des conditions de Gauss, les lentilles présentent des aberrations : Cf. TP et simulation. On considère à partir de maintenant que l'on se place dans les conditions de Gauss.

4. Éléments optiques



- Les foyers principaux sont sur l'axe de la lentille.
- Les foyers objet et image sont symétriques l'un de l'autre (pas images).
- On appelle distance focale objet $f = \overline{OF}$ et distance focale image $f' = \overline{OF'}$. On a $f' = -f$
- Pour une lentille convergente, $f < 0$ et $f' > 0$, F et F' sont réels.
- Pour une lentille divergente,$f > 0$ et $f' < 0$, F et F' sont virtuels.
- La vergence $V = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$ est positive pour une lentille convergente et négative une lentille divergente.

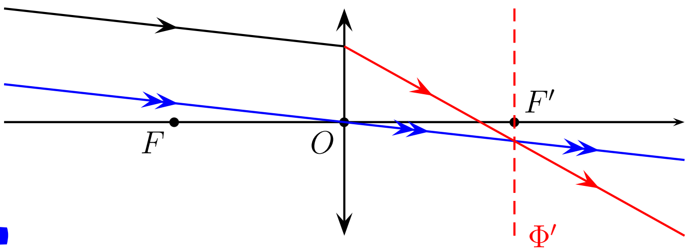
  L'unité de la vergence est la dioptrie (δ =m^{-1}).
- Le plan focal image (resp. objet) passe par F' (resp. F) et est perpendiculaire à l'axe optique.



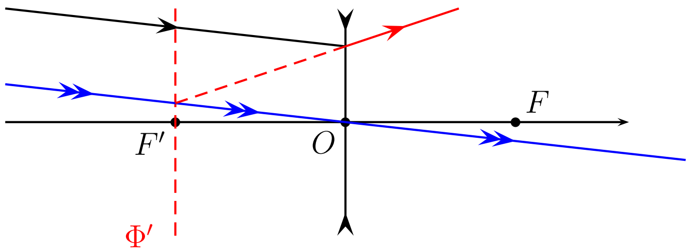
5. Tracé d'un rayon quelconque

La méthode consiste à tracer un rayon parallèle et dont on connaît le cheminement (par exemple celui passant par le centre de la lentille).

Lentille convergente



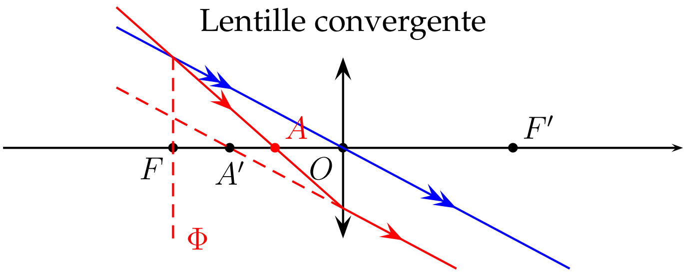
Lentille divergente



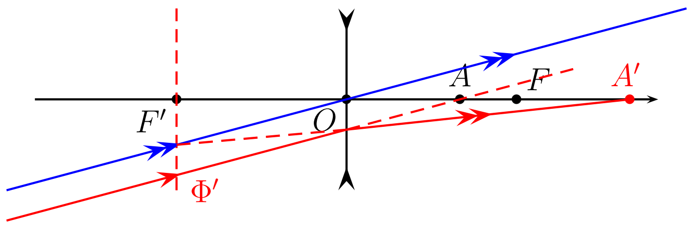
On sait qu'après traversée de la lentille, les deux rayons passeront (ou sembleront provenir) du même foyer secondaire image(point du plan focal image).

Application directe : déterminer le point conjugué de celui placé sur l'axe.

Lentille convergente



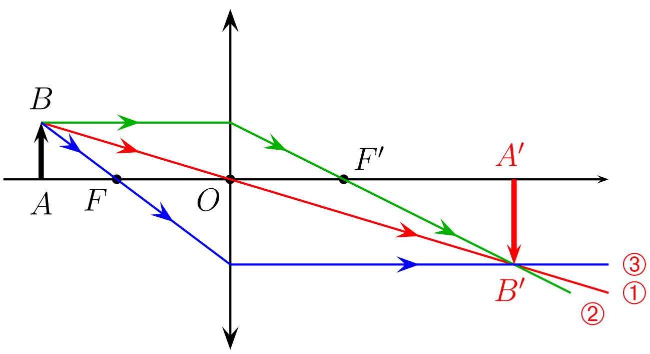
Lentille divergente



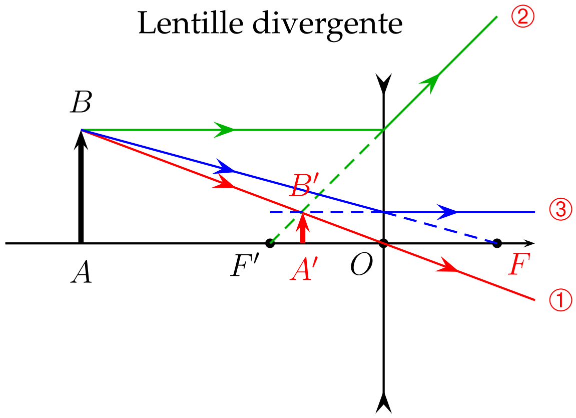
6. Construction de l'image d'un objet étendu

On cherche à tracer l'image $A'B'$ de l'objet AB perpendiculaire à l'axe.

Lentille convergente



Lentille divergente



On commence par déterminer B' , pour cela, on a le choix entre trois rayons utiles :

① Le rayon issu de B et passant par le centre optique O n'est pas dévié.

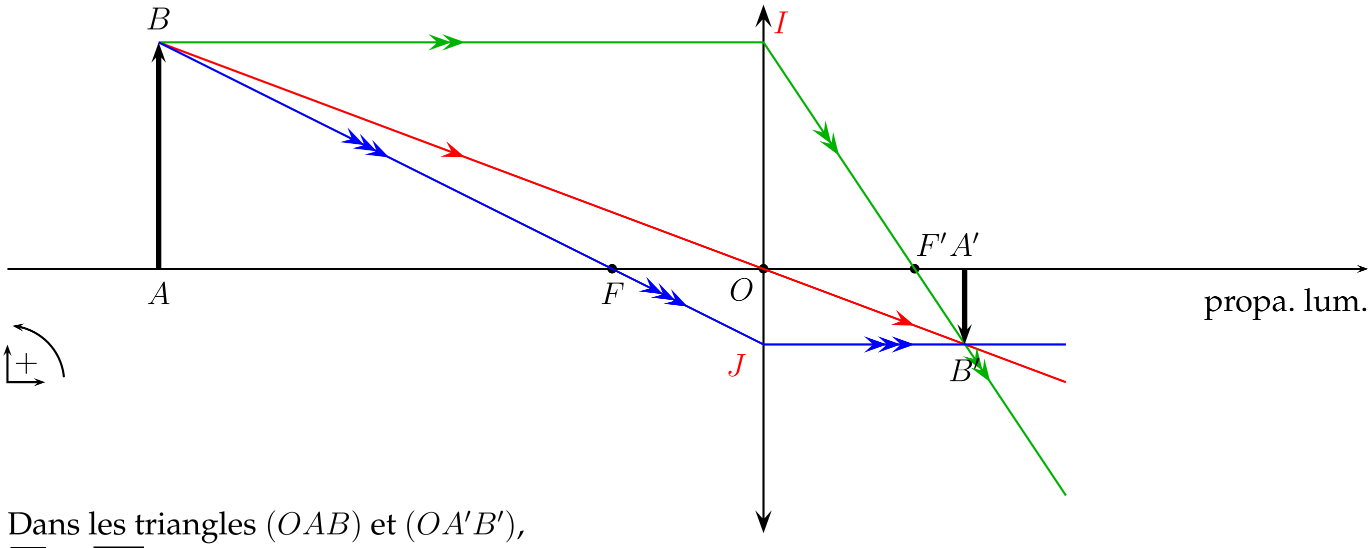
② Le rayon issu de B et parallèle à l'axe optique qui sort de la lentille en passant ou semblant passer par F'.

③ Le rayon issu de B et passant ou semblant passer par F qui sort de la lentille parallèlement à l'axe optique.

Pour déterminer la position de l'image d'un point A situé sur l'axe optique, on utilise l'aplanétisme , c'est à dire que A' est le projeté de B' sur l'axe optique.

7. Relations de conjugaison

7.a. Grandissement et formule de Descartes avec origine au centre optique



Dans les triangles (OAB) et $(OA'B')$,
$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}}$ d'où la formule du grandissement,

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{p'}{p} \qquad \text{en posant } p = \overline{OA} \text{ et } p' = \overline{OA'}$$

Dans les triangles (IOF') et $(F'A'B')$,
$\frac{\overline{OI}}{\overline{OF'}} = -\frac{\overline{A'B'}}{\overline{F'A'}}$ avec $\overline{OI} = \overline{AB}$, $\overline{F'A'} = \overline{F'O} + \overline{OA'}$, soit

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{F'O} + \overline{OA'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{OF'} - \overline{OA'}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{OA}.\overline{OF'} - \overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{F'O}.\overline{OA'}$$

et en divisant par $\overline{OA'}.\overline{OA}.\overline{OF'}$, on en déduit,

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \iff \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

Cette formule algébrique reste valable quelque soit la position de l'objet et pour toutes les lentilles minces sphériques convergentes ou divergentes. Il faut la connaitre et savoir la retrouver rapidement (les signes) en utilisant les cas limites « objet à l'infini/image à l'infini ».

7.b. Grandissement et formule de Newton avec origine aux foyers

Dans les triangles (IOF') et $(F'A'B')$,	Dans les triangles (JOF) et (FAB),
$\frac{\overline{OI}}{\overline{OF'}} = -\frac{\overline{A'B'}}{\overline{F'A'}}$	$\frac{\overline{OJ}}{\overline{OF}} = -\frac{\overline{AB}}{\overline{FA}}$

$$\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

Sachant que $\overline{F'O} = \overline{OF} = f'$, on en déduit

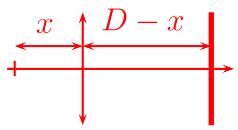
$$\boxed{\overline{FA}.\overline{F'A'} = -f'^2} = f f'$$

En fonction du problème on choisira l'une ou l'autre des formules de conjugaisons.

II Systèmes optiques

1. Lentille et écran

Exercice : on dispose sur une table d'un écran et d'un objet dont on veut faire l'image sur l'écran. Les deux sont écartés d'une distance D. On dispose aussi d'une lentille convergente de distance focale f'. Est-il possible d'obtenir une image nette sur l'écran et si oui où faut-il placer la lentille ?



on appelle x la distance entre l'objet et la lentille et donc $D-x$ celle entre la lentille et l'écran. Si on veut une image nette, il faut vérifier la relation de conjugaison : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ avec $p' = D - x$ et $p = -x$ ce qui donne comme équation :

$$\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \Rightarrow (x + D - x)f' = x(D-x) \Rightarrow x^2 - Dx + Df' = 0$$

Le discriminant est $\Delta = D^2 - 4Df' = D(D - 4f')$. On veut des solutions réelles donc $\Delta > 0$ donc il faut que $D > 4f'$ sinon il n'est pas possible d'obtenir une image nette. De plus, il y aura deux positions nettes pour la lentille (sauf dans le cas d'une racine double)

Théorème : Pour pouvoir former l'image d'un objet sur un écran à l'aide d'une lentille de distance focale f', il faut que l'objet et l'écran soient écartés d'une distance $D \geqslant 4f'$. Il existe alors deux positions de la lentille pour lesquelles l'image sera nette.

2. Exemple d'utilisation des formules de conjugaisons

L'objectif d'un appareil photographique est assimilable à une lentille mince de distance focale $f' = 5\,\text{cm}$. La partie photosensible est disposée sur une plaque rectangulaire centrée sur l'axe. On souhaite photographier des objets réels, et en particuliers des paysages. Un photographe, prend d'abord en photo le paysage au loin, puis une statue située à 5 m de lui. De combien et dans quel sens doit-il changer la distance entre l'objectif et le capteur entre les deux photos pour qu'elles soient réussies ?
La mise au point ne permet pas de bouger la partie photosensible de plus de $5\,\text{mm}$. Pour répondre à ce « cahier des charges », quelles distances doivent être réglables entre le capteur et l'objectif et quel est l'objet le plus proche que l'on pourra photographier ?
Photographier des paysages = faire l'image de l'infini : on doit pouvoir placer le capteur au niveau du foyer image (5 cm de la lentille)

on utilise la formule de newton vu qu'on veut se repérer par rapport au foyer !
$\overline{FA}\,\overline{F'A'} = -f'^2$. $\overline{FA} = -(500-5)$ cm donc $\overline{F'A'} = 5^2/495 = 0{,}05\,\text{cm}$

Photographier des objets réels : il faut que p soit négatif (objet réel) et $p' > 0$ (image réelle). Or $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{f'} < \frac{1}{f'}$ donc comme p' et f' sont positifs, $p' > f'$. Les distances sont donc comprises entre 5 et $5{,}5\,\text{cm}$.

Donc les objets observables sont compris entre l'infini et $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \Rightarrow p = \frac{p'f'}{f'-p'} = \frac{5{,}5\times 5}{-0{,}5} = -55\,\text{cm}$. Les objets photographiables sont donc situés à une distance supérieure à $55\,\text{cm}$ du photographe.

3. Lentilles minces accolées

Définition : deux lentilles minces sont dites accolées si la distance séparant leur centre optique est faible devant leur distance focale : $O_1O_2 \ll f_1$ et f_2.

Théorème des vergences : Prenons un point A dont l'image par (L_1) est A_1 dont l'image par (L_2) est A' : $A - (L_1) \rightarrow A_1 - (L_2) \rightarrow A'$.
On a les relations suivantes :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f_1'} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}$$

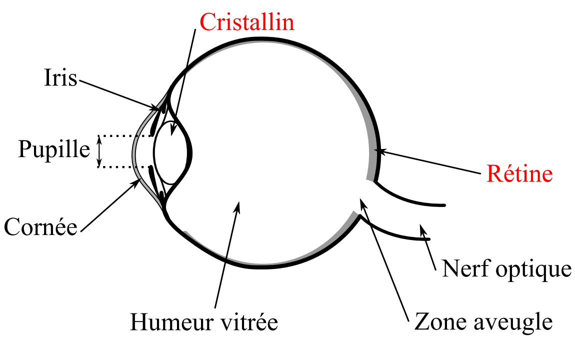
Le système des deux lentilles accolées est donc équivalent à une lentille de vergence $V = V_1 + V_2$

Intérêts : ce type de dispositif peut être utilisé pour mesurer la vergence (et donc la distance focale) d'une lentille divergente connaissant celle d'une lentille convergente (Cf. TP – Focométrie) ou pour constituer un achromat : lentille constitué de deux verres différents dont les pouvoirs de dispersion se compensent de sorte qu'on a moins d'aberrations chromatiques (Cf. TP – Cours).
Cet exemple permet aussi d'illustrer la manière dont on construit/calcule l'image par un système optique complexe :

Théorème : Pour construire l'image A' d'un point A par un système optique composé de plusieurs éléments (E_k), on construit les images successives A_k à travers les différents éléments : $A \xrightarrow{E_1} A_1 \xrightarrow{E_2} \ldots A_{k-1} \xrightarrow{E_k} A_k \ldots \xrightarrow{E_n} A_n = A'$

4. L'œil

4.a. Description



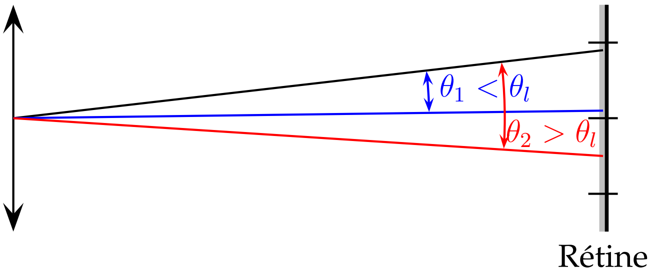
Le mécanisme de la vision est complexe, on retiendra toutefois que l'œil contient :

- Une partie colorée visible de l'extérieur : l'iris qui délimite un diaphragme appelé pupille. Ce diaphragme permet en particulier d'adapter l'intensité lumineuse entrante en fonction des conditions extérieures. Remarque : varie en fonction d'autres paramètres (émotions, mensonge…)
- Le cristallin se comporte comme une lentille de vergence variable. Des muscles permettent de rendre le cristallin plus convergent.
- La rétine est constituée des cellules qui détectent la lumière et les couleurs. Le but du cristallin est donc de faire l'image de ce que l'on souhaite observer sur la rétine.

— Le nerf optique transmet les informations au cerveau. Il n'y a pas de cellule réceptrice à son niveau et il y a donc une tache aveugle à son niveau.

On modélise généralement l'œil simplement en considérant une lentille de vergence variable (pour le cristallin) et un écran/capteur fixe (pour la rétine).

Limite de résolution : La rétine est composée de bâtonnets qui sont des cellules de taille finie, ainsi si deux points sont « trop » proches, leur image se formera sur la même cellule et l'œil ne sera donc pas capable de les séparer. On parle de limite de résolution. Cette résolution n'est pas uniforme : le maximum d'acuité visuel est obtenu en face du cristallin, au niveau de la fovéa (ou tache jaune). On estime en général que l'œil humain peut séparer deux objets s'ils sont séparés d'au moins 1 minute d'arc (1/60 de degré, $\theta_l = 3.10^{-4}$ rad).



4.b. Accommodation et œil emmétrope

Au repos, un œil emmétrope ou normal forme sur la rétine l'image de l'infini . Pour observer un objet plus proche, les muscles se contractent pour rendre le cristallin plus convergent, c'est l'accommodation. Ce processus est limité (on ne peut pas rendre le cristallin infiniment convergent). Il existe donc une plage d'accommodation pour laquelle un œil peut former une image nette.

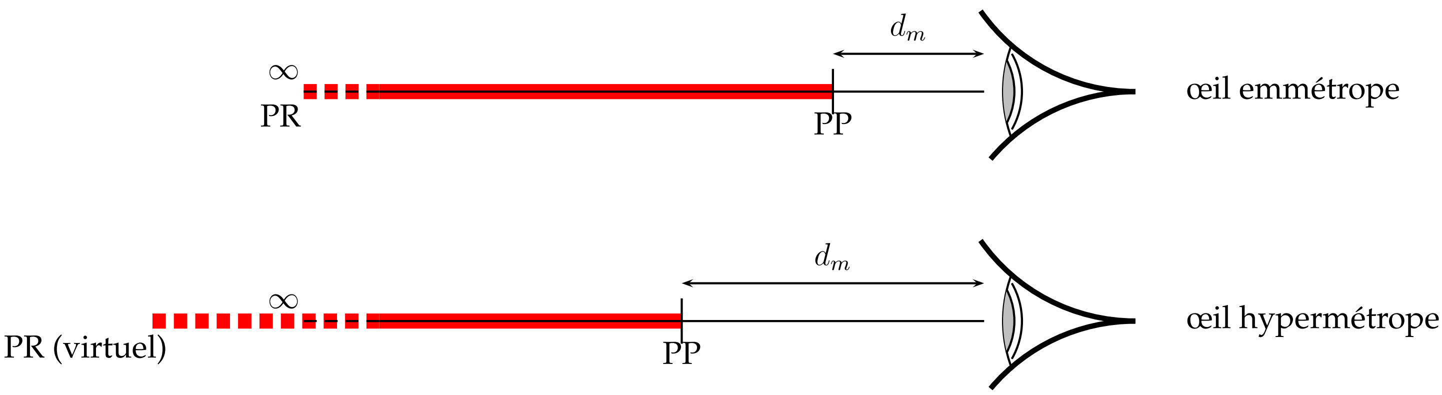
Le point le plus proche pour lequel l'œil peut accommoder est appelé *ponctum proximum* (PP) . Il est situé à une distance d_m appelée distance limite d'accommodation. Cette distance varie selon les individus et l'âge, mais on peut retenir l'ordre de grandeur $d_m \simeq 25$ cm . Le point le plus éloigné pour lequel l'œil peut accommoder est appelé *ponctum remotum* (PR) .

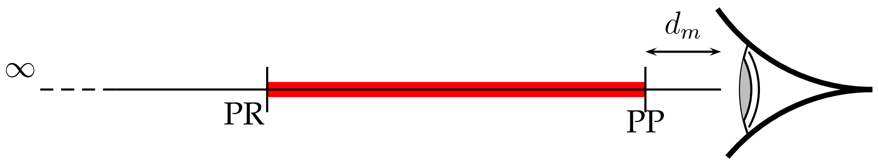
Maladie :

— L'œil hypermétrope : la rétine est trop proche du cristallin, le cristallin n'est donc pas assez convergent.

— L'œil myope : la rétine est trop loin du cristallin, le cristallin est donc trop convergent.

— L'œil astigmate : le cristallin n'est pas sphérique, il converge plus ou moins selon les directions.

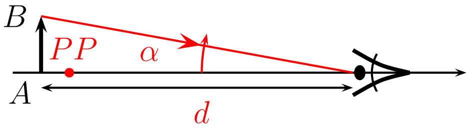




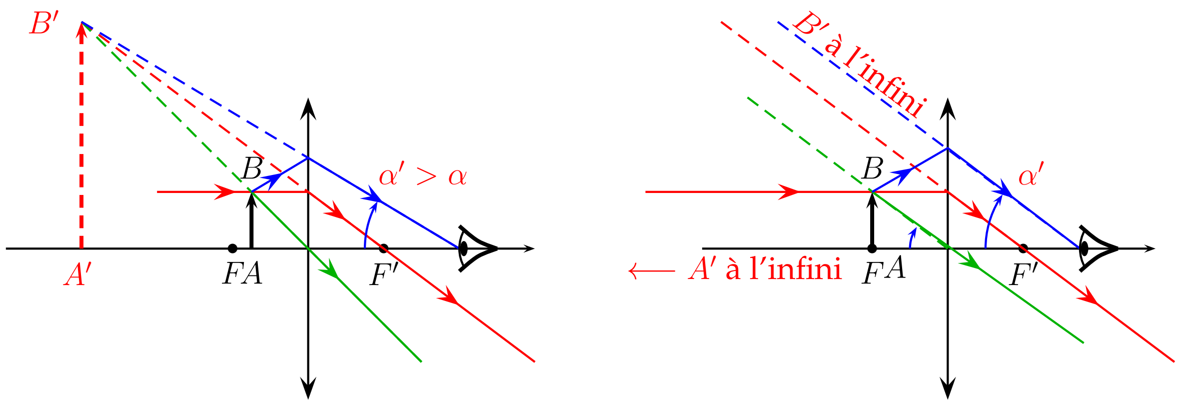
5. Association { œil + loupe }

5.a. Intérêt de la loupe

Pour observer un petit objet sous un diamètre angulaire α suffisamment grand, on peut :



- soit le rapprocher de l'œil mais il faut alors accommoder et la vision devient floue si $d < d_{\text{PP}}$.
- soit utiliser une lentille convergente :
  On place alors l'objet entre le plan focal et la lentille (loupe) pour une accommodation moindre et un angle α' supérieur (figure ci-dessous à gauche).



  Pour éviter toute accommodation, on place souvent l'objet dans le plan focal objet de la loupe, α' est alors maximal et l'image est au PR : à l'infini (figure ci-dessus à droite).
  La position de l'œil est alors indifférente mais on le place assez près de la loupe pour limiter les aberrations (conditions de Gauss respectées).

Remarque : on utilise le principe de la loupe dans de nombreux instruments (oculaire : association de lentilles épaisses assimilables à une lentille unique de laquelle on approche l'œil).

5.b. Appareil photographique

Un appareil photographique est généralement constitué d'une association de lentilles, équivalentes à une lentille mince[1], d'une cellule photosensible (autrefois basés sur des réactions chimiques, aujourd'hui capteur ccd) et d'un diaphragme. Le réglage de la mise au point se fait en changeant la distance entre la lentille et la plaque photosensible.

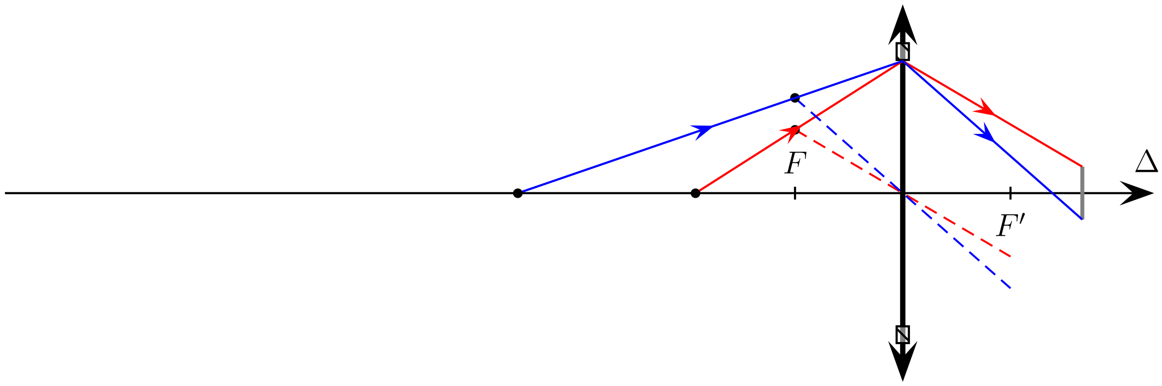
La netteté est la meilleure pour les objets situés « selon les lois de l'optique géométrique ».
Toutefois, comme il a été vu dans le chapitre précédent, compte tenu de la résolution finie du capteur, des objets situés un peu plus loin ou un peu moins loin que le réglage donneront eux aussi une image nette.

1. Parfois de vergence variable en faisant varier l'agencement interne des différentes lentilles. Cela permet de zoomer/dézoomer.

Définition : On appelle profondeur de champ la longueur de la plage de positions donnant une image nette. Cette profondeur de champ est souvent utilisée pour un aspect esthétique et dépend en particulier de la focale utilisée, du réglage (position du capteur par rapport à la lentille), du diamètre du diaphragme ainsi que des propriétés du capteur.

animation python animation_profondeur_de_champ2 et schema_profondeur_de_champ3 + dessin à la main

✍ Sur le schéma ci-dessous, déterminez graphiquement la profondeur de champ compte tenu de la taille d'un pixel, de la position du capteur et de la taille du diaphragme.

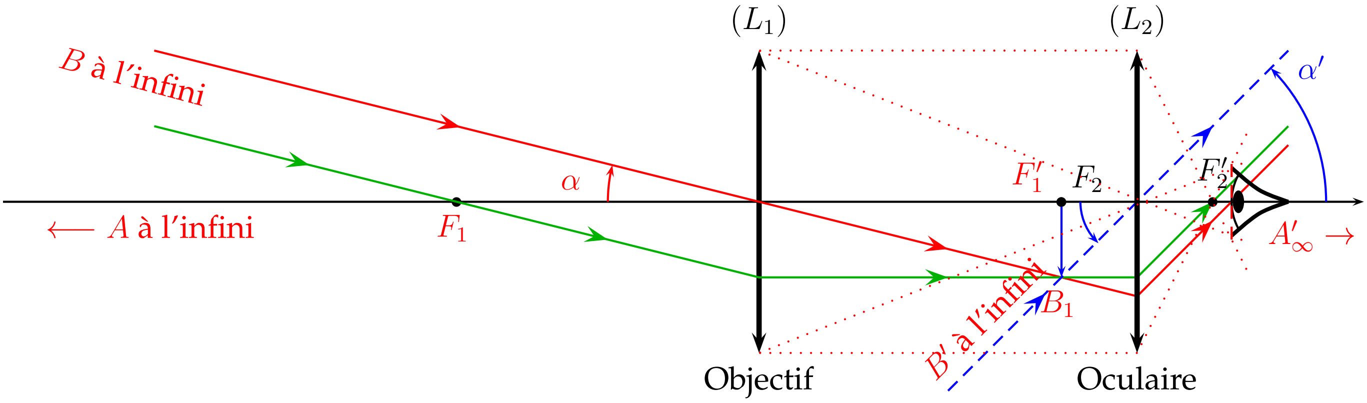


6. Association de lentilles

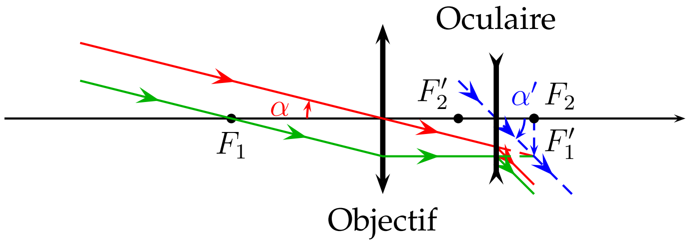
6.a. Lunette de Galilée

Principe et constitution : une lunette sert à regarder un objet situé à l'infini sans que l'œil n'ait à accommoder, sous un diamètre apparent plus grand et avec plus de luminosité.
♡ On utilisera pour cela un système centré comportant deux lentilles.
A_1 est l'image intermédiaire telle que $A_\infty - (L_1) \to A_1 = F_1' = F_2 - (L_2) \to A'_\infty$.
L'image d'un objet situé à l'infini se situe elle même à l'infini, on parle de système afocal.

✍



Pour collecter un maximum de lumière, l'observateur doit placer son œil au cercle oculaire, image de (L_1) par (L_2).



Grossissement : on définit le grossissement algébrique $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$.

✍ On a ici $\alpha = \frac{\overline{A_1B_1}}{f_1} < 0$ et $\alpha' = \frac{\overline{A_1B_1}}{f_2'} > 0$ d'où $G = -\frac{f_1'}{f_2'} < 0$

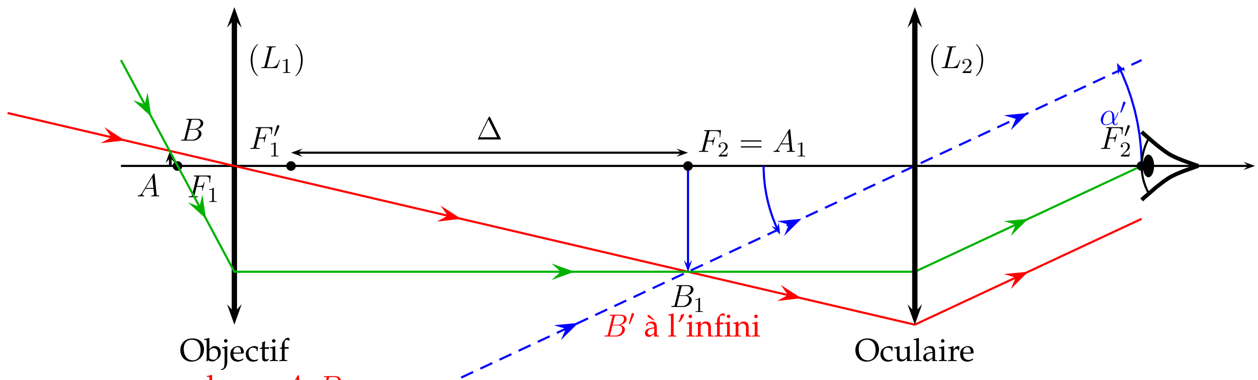
L'image est donc inversée , comme le montre la figure ci-dessus. B était « au dessus de l'axe optique » mais sera vu par l'œil « en dessous ».

Lunette terrestre : elle permet de travailler avec un grossissement positif $G = -\frac{f_1'}{f_2'} > 0$

6.b. Microscope

Principe et constitution : le microscope permet de regarder un objet proche sous un diamètre apparent plus grand et sans que l'œil n'ait à accommoder.

♡ Le système n'est plus afocal. $A - (L_1) \rightarrow A_1 = F_2 \neq F_1' - (L_2) \rightarrow A'_\infty$.

✍ 

Commencer par placer A_1B_1

Table des matières

I Lentille mince sphérique
1. Généralités
2. Représentation symbolique
3. Stigmatisme et aplanétisme
4. Éléments optiques
5. Tracé d'un rayon quelconque
6. Construction de l'image d'un objet étendu
7. Relations de conjugaison
   - 7.a. Grandissement et formule de Descartes avec origine au centre optique
   - 7.b. Grandissement et formule de Newton avec origine aux foyers

II Systèmes optiques
1. Lentille et écran
2. Exemple d'utilisation des formules de conjugaisons
3. Lentilles minces accolées
4. L'œil
   - 4.a. Description
   - 4.b. Accommodation et œil emmétrope
5. Association { œil + loupe }
   - 5.a. Intérêt de la loupe
   - 5.b. Appareil photographique
6. Association de lentilles
   - 6.a. Lunette de Galilée
   - 6.b. Microscope