On_1 : Propagation des ondes

PCSI 2022 – 2023

I Préambule : formules de trigonométrie

Lorsque l'on travaille sur les ondes, il est fréquent d'additionner ou de soustraire des ondes sinusoïdales. Il faut connaitre et utiliser les formules d'additions de cosinus.
Démonstration :
$\cos p - \cos q = \Re(e^{ip} - e^{iq})$
$e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p+q}{2}}\right)$ on reconnait $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$
$e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \times 2i\sin\frac{p-q}{2} = 2i\left(\cos\frac{p+q}{2} + i\sin\frac{p+q}{2}\right)\sin\frac{p-q}{2}$
d'où $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

	2		$\frac{p+q}{2}$		$\frac{p-q}{2}$
$\sin p + \sin q =$		si		co	
$\sin p - \sin q =$		co		si	
$\cos p + \cos q =$		co		co	
$\cos p - \cos q =$		-si		si	
$\overbrace{\ \ }^{a+b}$ $\overbrace{\ \ }^{a-b}$			a		b

si-co-co si-co-co moins si-si
C'est-à-dire par exemple :

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \quad ; \quad \cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

II Caractéristiques d'un signal périodique

Les principales caractéristiques d'un signal ont été vues sur l'exemple du signal sinusoïdal (amplitude, période, valeur moyenne, fréquence, pulsations). On peut rajouter la grandeur amplitude crête-à-crête qui correspond à $S_{pp} = s_{max} - s_{min}$ (pp pour peak-peak)

Remarque : Attention, les mesures automatiques de l'oscilloscope annoncent parfois amplitude alors que la grandeur mesurée est l'amplitude peak-peak, pensez donc à vérifier.

Pour étendre la notion de valeur moyenne vue pour un signal sinusoïdal, on utilise la définition suivante :

Définition : On appelle valeur moyenne d'un signal $s(t)$ périodique la grandeur notée $\langle s(t)\rangle$ et dont l'expression est :

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} s(t)\,dt$$

Le temps τ est un temps quelconque, on choisit fréquemment 0.

Exemple : Calculer la valeur moyenne pour

1. un signal créneau TTL (5 V pendant une demi-période puis 0 V l'autre demi-période)
2. un signal sinusoïdal quelconque.

✍

Signal créneau TTL : $\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} U dt = \frac{1}{T} U \frac{T}{2} = U/2$
Signal sinusoïdal quelconque : $s(t) = A + B\cos(\omega t + \varphi)$: $\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T A dt + \frac{1}{T}\int_0^T B\cos(\omega t + \varphi)dt = A + \left[-\frac{B}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)\right]_0^T = A$ car T est la période, donc même valeur en 0 et en T

Aspect énergétique : La plupart du temps, les grandeurs énergétiques associées à un signal dépendent du signal de façon quadratique , c'est-à-dire proportionnelle à $s(t)^2$. Ainsi, un signal de valeur moyenne nulle peut correspondre à une énergie de valeur moyenne non nulle. Par exemple l'énergie cinétique dans le cas de l'oscillateur harmonique : la vitesse est en moyenne nulle, mais pas l'énergie cinétique. La grandeur pertinente est alors $\langle s(t)^2\rangle$, mais elle est homogène non pas à s mais à s^2.

Définition : La valeur efficace d'un signal $s(t)$ est la grandeur

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s(t)^2\rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} s(t)^2\, dt}$$

Sa dimension et son unité sont les mêmes que celles de $s(t)$.

Remarques :

- Cette grandeur est parfois appelée valeur RMS (root mean square).
- La valeur efficace d'un signal dépend non seulement de son amplitude, mais aussi de sa forme.

Par exemple, calculer la valeur efficace pour :

1. un signal créneau de valeur moyenne nulle et d'amplitude 2 V
2. un signal sinusoïdal de même amplitude et de valeur moyenne nulle.

✍

1. $s^2 = cte = U^2 \Rightarrow \langle s^2\rangle = U^2 \Rightarrow s_{eff} = U$
2. $s^2 = U^2\cos^2(\omega t) = U^2\left(\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\right) \Rightarrow \langle s^2\rangle = U^2\left(\frac{1+0}{2}\right) \Rightarrow s_{eff} = U/\sqrt{2}$

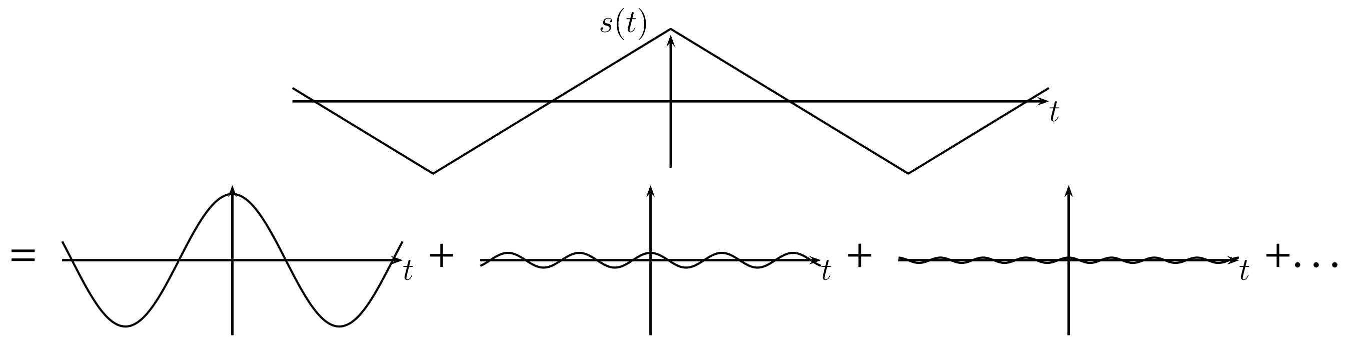
III Spectre d'un signal périodique

Définition : Un signal est dit monochromatique s'il est sinusoïdal. Dans le cas contraire, il est dit polychromatique.

Un signal périodique polychromatique peut être décomposé comme la somme de plusieurs cosinus. Cette décomposition s'appelle décomposition en série de Fourrier. Par exemple, un signal triangulaire peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} \cos\left((2i+1) \times 2\pi f\, t\right)$$

.

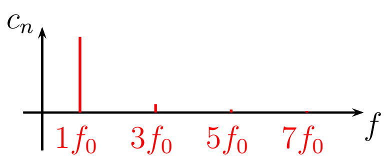


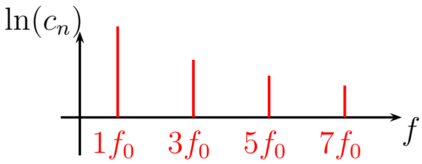
De façon plus générale, un signal périodique de fréquence f_0 peut s'exprimer sous la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos\left(n \times 2\pi f_0\, t + \varphi_n\right)$$

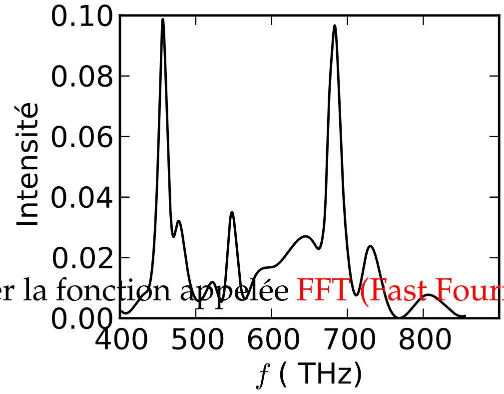
Définition : Le spectre d'un signal est l'amplitude c_n des cosinus, dans sa décomposition de Fourrier, en fonction de la fréquence.

Dans le cas d'un signal périodique, le spectre du signal a donc une allure de bâtons de différentes amplitudes à des fréquences qui sont un multiple entier de la fréquence du signal. Par exemple dans le cas du signal triangulaire précédent, on obtient le spectre ci-dessous à gauche. Comme les différentes amplitudes décroissent en général rapidement, il est fréquent de représenter le logarithme de l'amplitude en fonction de la fréquence (figure ci-dessous à droite)





Pour un signal plus complexe, le spectre obtenu peut prendre l'allure d'une courbe et non plus de bâtonnet. Par exemple, si l'on étudie la lumière provenant d'un néon, on obtient la courbe ci-contre. (1 THz correspond à 10^{12} Hz)



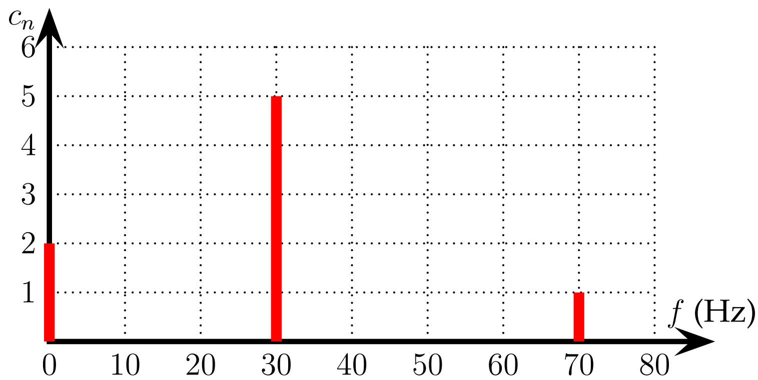
L'opération qui permet de passer d'un signal à son spectre s'appelle transformée de Fourrier.
Sur les appareils de mesures, il faut généralement chercher la fonction appelée FFT (Fast Fourrier Transform).

Exemple 1 :
On considère le signal suivant (t en seconde ; unité arbitraire pour s) :
$s(t) = 1 + 2\cos(2\pi \times 1 \times t + \pi) + 0{,}5\cos(2\pi \times 4 \times t + 2) - 0{,}5\sin(2\pi \times 5 \times t)$

Représenter son spectre. On indiquera les valeurs et les unités en abscisse. On indiquera les valeurs (mais pas les unités) en ordonnée.

Exemple 2 :
Remarque : on considère une grandeur $s(t)$ sans unité pour cette question. Le spectre de s est représenté ci-contre. Proposez une formule possible pour $s(t)$.

$s(t) =$



Valeur efficace et décomposition spectrale : On admet que si $s(t) = \sum c_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$ (avec $f_n \neq 0$ et distincts deux-à-deux) alors $s_{eff}^2 = \sum c_n^2 \times \frac{1}{2}$.

Dis autrement, le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques. Or puisque l'on a dit que la valeur efficace au carré était généralement proportionnelle à l'énergie d'un signal, cela signifie que l'énergie d'un signal est égale à la somme des énergies de ses harmoniques.

Vous êtes censé savoir réaliser la synthèse d'un signal (donner le signal si on vous donne le spectre) ou son analyse spectrale (donner le spectre si on vous donne le signal). Numériquement, c'est très facile en python grâce à l'utilisation des bibliothèques numpy et matplotlib.

Intérêt des décompositions en série de Fourier : prévoir le comportement d'un système linéaire face à tout type de signal périodique : on décompose ce dernier (spectre), on étudie la réponse de chaque raie ce qui donne un nouveau spectre, on recompose et on en déduit le signal obtenu.

IV Déphasage entre deux signaux synchrones

Soient les grandeurs sinusoïdales synchrones (i.e. de même pulsation ω) :

$$s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \qquad \text{et} \qquad s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

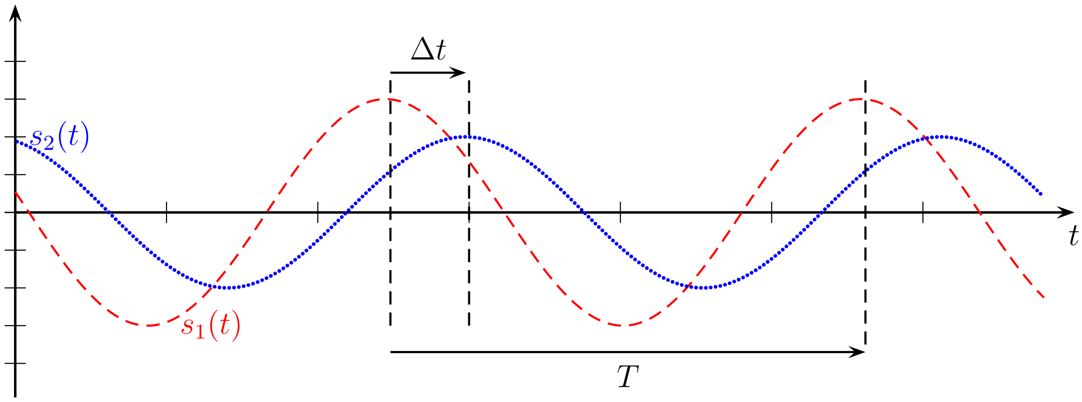


FIGURE 1 – Déphasage entre deux signaux synchrones

La différence $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ est la différence de phase ou déphasage entre $s_2(t)$ et $s_1(t)$, on dit que $s_1(t)$ est en avance sur $s_2(t)$ s'il atteint son maximum « avant $s_2(t)$ » sur une période. Dans le cas contraire, on dit qu'il est en retard sur $s_2(t)$
Par exemple sur la figure 1, le signal s_2 est en retard par rapport à s_1 et donc s_1 est en avance par rapport à s_2.
On a alors $\Delta t = t(v_{2,max}) - t(v_{1,max}) > 0$ et $\Delta\varphi < 0$.
Un retard de

- une période $\Delta t = T$ correspond à un déphasage $\Delta\varphi = -2\pi$
- une demi-période à $\Delta t = \frac{T}{2}$ à un déphasage de $\Delta\varphi = -\pi$.

✍ Par utilisation d'une règle de trois on obtient facilement

$$\Delta\varphi = -2\pi\frac{\Delta t}{T}$$

Cas particuliers intéressants :

- Signaux en phase : si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont en phase, ils atteignent leur maximum au même instant, pas de décalage temporel : $\Delta t = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0$.
  Si $\varphi_1 = \varphi_2$ (modulo 2π), l'amplitude de la somme est maximale. On a alors simplement

  $$\text{Signaux en phase : } \varphi_1 = \varphi_2[2\pi] \iff \Delta\varphi = 0 \Rightarrow S_M = S_1 + S_2$$

- Signaux en opposition de phase : si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont en opposition de phase, un des deux atteint son maximum lorsque l'autre atteint son minimum, décalage temporel d'une demi période : $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \pm\pi$.
  Si $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$ (modulo 2π), l'amplitude de la somme est minimale. On a alors simplement

  $$\text{Signaux en opposition de phase : } \varphi_1 = \varphi_2 + \pi[2\pi] \Rightarrow S_M = |S_1 - S_2|$$

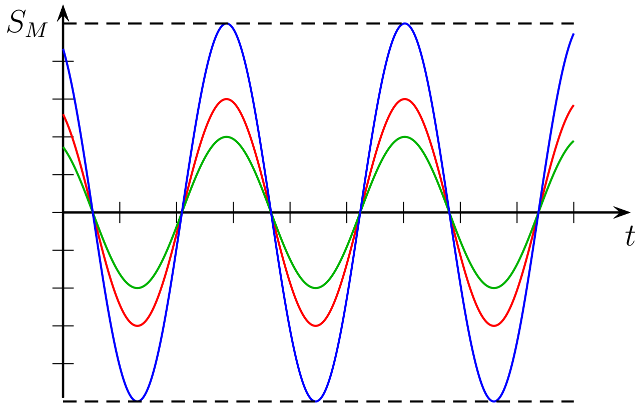


FIGURE 2 – Signaux en phase : $\Delta\varphi = 0$

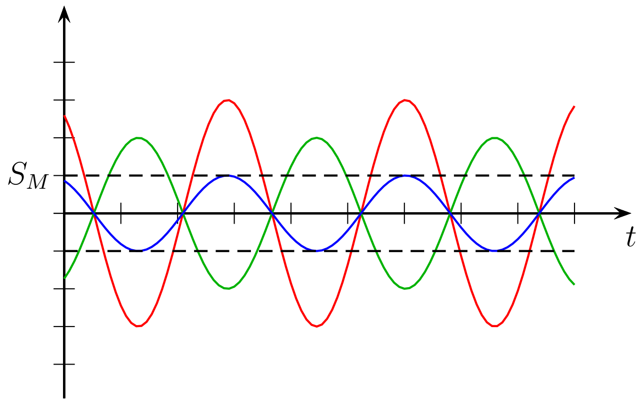
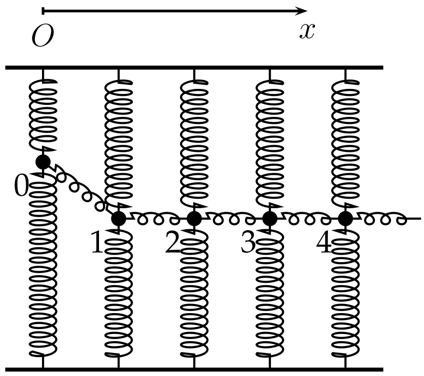


FIGURE 3 – Signaux en opposition de phase : $\Delta\varphi = \pi$

Remarque : L'addition d'un signal en opposition de phase peut donc permettre d'annuler une onde. Cela peut être employé pour réduire les nuisances sonores dans les milieux bruyants. On parle alors de système actif (car il faut l'alimenter) par opposition à des systèmes passifs qui se baserait uniquement sur l'atténuation par réflexion ou absorption

V Onde progressive

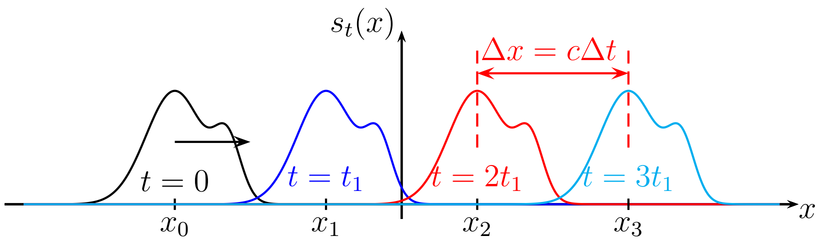


Si l'on considère plusieurs oscillateurs couplés , c'est-à-dire qui ne sont pas indépendant les uns des autres, alors, le mouvement d'un oscillateur (ici celui à gauche) va induire un mouvement de l'oscillateur suivant. Celui ci va à son tour induire un mouvement à l'oscillateur suivant et ainsi de suite. Il y a donc une perturbation par rapport à l'équilibre qui se propage sans que les points matériels se déplacent en moyenne.

On peut donc considérer la position de l'oscillateur n au cours du temps : $s_n(t)$. Dans un milieu continu (eau, air, barre de métal…), les oscillateurs sont extrêmement nombreux et proches les uns des autres. On ne les repère plus par leur numéro, mais par leur position x : $s_x(t)$ ou $s(x,t)$.

Définition : Une onde est un phénomène de propagation d'une perturbation sans transport de matière.

Si l'on considère une onde qui se propage, à une dimension vers la droite, sans être absorbée (atténuée), ni déformée (pas de dispersion) et que l'on observe la forme de la perturbation à différents instants, on obtient les courbes ci-contre.



La perturbation se propage sans se déformer , donc la courbe $s_{t_1}(x)$ est la même que la courbe $s_{t=0}(x)$, mais translatée vers la droite de Δx. Ainsi

$$s_{t_1}(x) = s_{t=0}(x - \Delta x) = s_{t=0}(x - c\Delta t) = s_{t=0}(x - ct_1).$$

On peut donc trouver une fonction f telle qu'on écrit la perturbation à chaque instant sous la forme $s(x,t) = f(x - ct)$. f correspond simplement à la forme de la perturbation à l'instant $t = 0$.

Définition : **Une onde $s(x,t)$ pouvant s'écrire sous la forme**

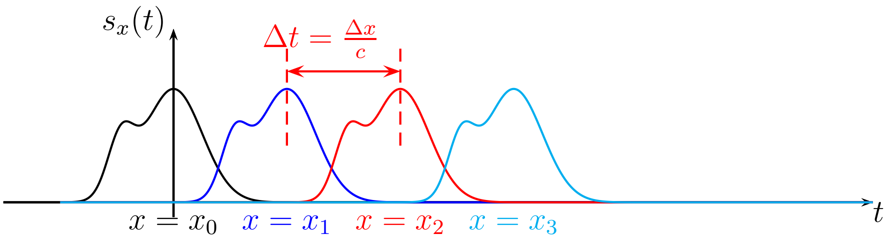
$$s(x,t) = f(x-ct) \quad \textbf{(resp.} \quad s(x,t) = g(x+ct)\textbf{)}$$

est une onde progressive dans un milieu non absorbant (pas d'atténuation) et non dispersif (pas de déformation du signal) qui se propage dans la direction $+\vec{e}_x$ (resp. $-\vec{e}_x$) avec une célérité c.

Exemple : on considère une onde se propageant selon les x croissants à une célérité c et dont le profil à $t=0$ est $s(x,t=0) = s_0\cos(kx)e^{-\left(\frac{x}{L}\right)^2}$ avec s_0, k et L trois constantes. En déduire la formule générale décrivant l'onde $s(x,t)$.

$s(x,t) = s_0\cos(k(x-ct))e^{-\left(\frac{x-ct}{L}\right)^2}$

On peut adopter un autre point de vue : un observateur se place à une position donnée et étudie l'évolution temporelle de la perturbation. La courbe est cette fois $s_x(t)$.



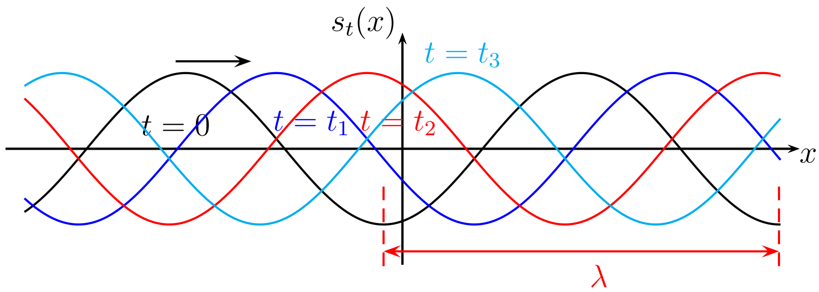
À nouveau, le signal est le même à différentes positions, mais translaté vers la droite. On peut donc aussi écrire les ondes progressives sous la forme suivante :

- $f(t-x/c)$ pour une onde progressive se propageant dans la direction des x croissants
- $f(t+x/c)$ pour une onde progressive se propageant dans la direction des x décroissants

Dispersion : Attention, tout ce que l'on a dit précédemment n'est vrai que dans les milieux non dispersifs, c'est-à-dire dans les milieux où la vitesse des ondes sinusoïdales ne dépend pas de la fréquence (ou de la longueur d'onde). Exemple de propagation dans des milieux dispersifs : lumière dans un prisme, vague lorsque la profondeur varie, ondes sonores à hautes fréquences.

VI Cas part des ondes progressives sinusoïdales

Le chapitre sur le filtrage ainsi que le paragraphe précédent ont souligné l'importance des signaux sinusoïdaux puisque n'importe quel signal peut être décomposé comme une somme de signaux sinusoïdaux.
Si l'on considère une onde dont la forme à $t=0$ est sinusoïdale ($s_{t=0}(x) = a\cos(kx)$). L'onde possède alors une périodicité spatiale.



Définition : La longueur d'onde d'un signal possédant une périodicité spatiale est la plus petite distance au bout de laquelle le signal se répète identique à lui même. Elle est fréquemment noté λ , a pour dimension L et pour unité légale le mètre.

Lien entre k et λ : quel est le lien entre k et λ (démonstration attendue) ?

$$k\lambda = 2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Si cette onde sinusoïdale se se propage dans le sens des x croissants, alors l'onde $s(x,t)$ peut s'exprimer de la façon suivante :

$$s(x,t) = a\cos\left(k(x - ct)\right)$$

L'onde possède donc aussi une périodicité temporelle T : à un endroit donné, elle varie de façon sinusoïdale $a\cos(-\omega t + \varphi)$.

Exercice Trouver le lien entre la fréquence, la longueur d'onde et la célérité (démonstration attendue) :

$$s(x,t) = a\cos\left(k(x - ct)\right) = a\cos\left(kx - \omega t\right)$$

$$\Rightarrow kc = \omega \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}c = 2\pi f \Leftrightarrow c = \lambda f \Leftrightarrow cT = \lambda$$

Autre manière de voir les choses : en dessinant les courbes au cours du temps, on observe que l'on parcourt exactement une période spatiale en une période temporelle. (Attention ce point n'est pas aussi évident qu'il en a l'air : pourquoi avance t'on de λ en T ?)

Remarques :

- Ce résultat se vérifie très facilement par homogénéité donc il est interdit de se tromper
- Compte tenu de la double périodicité spatiale et temporelle, au lieu de supposer que l'on avait une onde sinusoïdale qui se propage, on aurait pu supposer qu'un émetteur oscillait sinusoïdalement.
- k est appelé vecteur d'onde ($k\vec{e}_x$ en fait). Sa dimension est L^{-1} et son unité légale est rad/m.

Table des matières

manip à monter :

1. chaine d'oscillateur ?
2. corde simple, que l'on fait vibrer à la main (Gros élastique)
3. corde vibrante + stromboscope
4. cuve à onde
5. diffraction

Expériences à monter :

1. Interférence Ultrason
2. Michelson en lame d'air
3. Battement avec deux diapason de fréq proche ?
4. HP pour audio (battement)